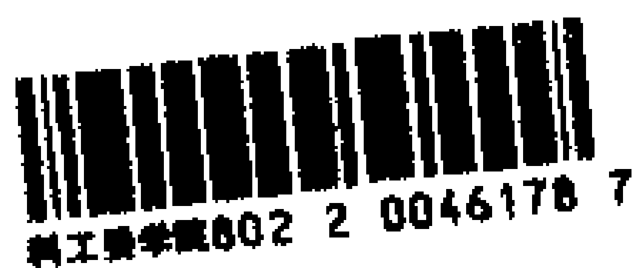
大学
数学系
自学丛书

高等几何



GAODENG JIHE



大学数学系自学丛书

高 等 几 何

东北师范大学
张永顺　金成相 主编

辽 宁 人 民 出 版 社

一九八四年·沈阳

高等几何

Gaodeng Jihe

张永顺　金成相 主编

辽宁人民出版社出版　　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　　朝阳六六七厂印刷

字数：444,000　　开本：850×1168 1/32　　印张：18 3/8　　插页：2
印数：1—12,500
1984年12月第1版　　1984年12月第1次印刷

责任编辑：俞晓群　　封面设计：安今生

统一书号：7090·288　　定价：2.35元

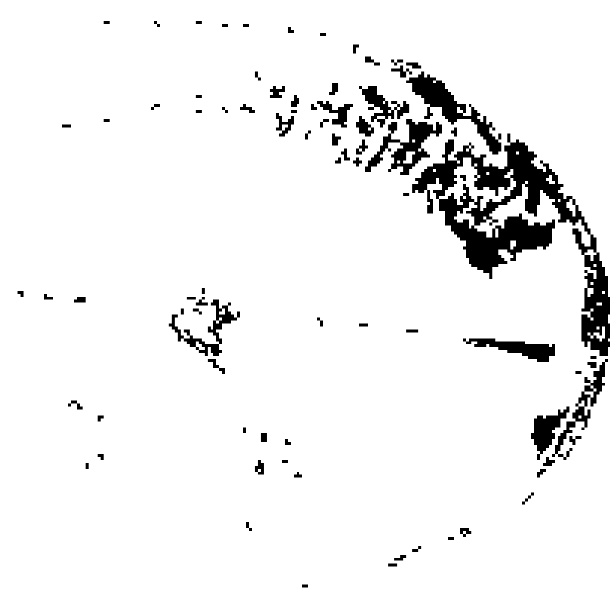
出 版 说 明

为了适应广大在职人员和社会青年自学成才的需要，根据国家建立高等教育自学考试制度的精神，以满足学员自学教材的要求，由辽宁人民出版社出版一套大学数学系自学丛书。

本丛书是由东北师范大学数学系，根据教育部规定的普通高等院校本科必修课现行教学计划和教学大纲编写的。教材内容系统，数据充实，条理清晰，深入浅出；每章均有学习指导和习题解答，便于自学。经过刻苦自学，即可无师自通，达到本科毕业水平。

本丛书有：空间解析几何、高等代数、数学分析、高等几何、常微分方程、复变函数论、近世代数、实变函数论、微分几何、计算机与算法语言BASIC、概率论与数理统计、计算方法等。本丛书既可供自学应试之用，也可供大专院校的本科在校生和函授生及业余大学学生使用。

本丛书由于水平所限，不当之处在所难免，我们热诚希望广大自学读者批评指正。



目　　录

第一部分　高等几何

上　编　公理法与几何学

本编主要讲几何学公理法(演绎法)．将从它的发展历史、它的原理、遵循的逻辑原则和具体运用等方面来阐明，以期达到对公理法有一个较全面的认识．同时通过第三章用公理法对欧几里得(Euclid)几何学及罗巴切夫斯基(Lobachevsky)几何学的建立，了解两种几何的基本内容、逻辑结构和相关性．

几何学公理法是通过公理建立几何学，可以看作是用静的观点研究几何，而下一编所讲的几何学群论原则是通过变换群建立几何学，可以看作是用动的观点研究几何．这两个理论和方法是几何学发展中两个突出的成果，是对几何学的研究和发展有深远影响的基本理论和方法．

第一章　几何学的公理方法概述

本章首先介绍了几何学公理方法的发展历史，主要是在繁多的历史材料中，抓住了几个重大事件，从中理出一条线索展开的，借以说明公理法产生的必然性和重要性。其次概括地提出了公理法的构造和原理，使我们对几何公理法有个整体的认识，为后两章的具体运用作准备。

§1　几何学的发展与公理法

中学几何教科书或其它逻辑结构比较严密的初等几何学书籍，开头总是先提出一些不加定义的原始概念，例如原始对象"点"、"直线"、"平面"，以及原始对象之间的原始关系，如"点在直线上"、"点A在点B、C之间"、"两直线重合"……；其次就是以原始概念为基础建立起来的一系列定义；再次就是作为该几何学基础的一系列公理；再其次就是推导出来的一连串按着逻辑次序排列的定理。这一连串按着严格逻辑原则和本身的内在联系排列起来的概念（定义）、公理和定理，就形成了一门有系统的几何学。这种从少数公理出发，遵循严格的逻辑原则建立几何学演绎体系的方法，称为**公理法**或**演绎法**。

公元前三世纪，希腊著名的几何学家欧几里得的名著《几何原本》是首先用不完善的公理方法建立的演绎体系，他所采用的方法称为**古典公理法**。后来经过不断地补充和改进，直到十九世纪末，德国数学家希尔伯特在前人大量工作的基础上，

写出了《几何基础》一书，用完善的公理方法建立了欧几里得几何学，这种公理方法称为近代公理法。

公理法是随着几何学的发展而产生，并且逐步得到完善的。几何学产生于上古时期，人们在生产实践中不断地积累了几何知识，并随着生活和生产的发展和需要丰富起来，当经验几何学积累了庞大数量的知识材料以后，有系统地把这些材料加以整理，就简直成为不可避免的了，建立各个知识领域互相间的正确联系，也同样成为不可避免的了。因此，几何学便走进了理论的领域。这时，经验的方法就不中用了，而是要经过理性思维，将丰富的材料加以去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的改造制作工夫，造成概念和理论的系统。几何学的公理方法就是在几何学的整理和研究中创造出来的科学方法之一。它从开始到形成，大体上经历了：欧几里得以前的工作，包括几何起源、积累和大量的整理工作；欧几里得本人的工作，主要是他在前人工作的基础上写出了《几何原本》一书，奠定了古典的公理方法；欧几里得以后的工作，主要对《几何原本》中提出的古典的公理方法加以补充和改进，其中包括对欧几里得第五公设的讨论、非欧几何的产生、对欧几里得公理系统的改进等等，直到十九世纪末近代公理法的形成。

为了更好地认识公理方法的产生和形成，下面就来谈一谈公理法发展的简单历史。

1·1　几何学的起源和最初的积累

从历史的资料可以看出，有着古老文化的中国、埃及、巴比伦以及印度都是几何学的重要发源地。

在中国，古代劳动人民在生活和生产实践中逐步形成了图形的概念。如出土的新石器时代的石斧、石铲，上面凿有整齐的圆形孔；1921年在河南渑池出土的仰韶文化彩陶器（公元前6000年左右），上面画有规则的几何条纹；1954到1957年在西安半坡村由考古发掘的夏代以前的原始部落遗址，有圆形和正

方形的房屋基地；从殷墟出土的车轴，其饰物有五边形递至九边形；《史记》中也记载了夏禹治水的时候，“左准绳，右规矩”进行测绘；殷商甲骨文中有“田”和“畕”等字，说明殷商已在土地测量中将田地分成若干小块；殷商后期制造的钟鼎，不但形状美观，而且画有各种几何图案。这些事实说明，当时人们已经初步认识了某些图形。

当农牧业、手工业、土木建筑有了新的发展，人们为了解决生产中遇到的测量、建筑、天文等问题时，需要探讨各种图形的性质和相互联系，因而在实践中不断地发现了几何图形的规律性。关于最初记载几何知识的资料大部分已经失传了。我国古代较早的算经十书：《周髀算经》《九章算术》《孙子算经》《五曹算经》《夏侯阳算经》《张丘建算经》《五经算术》《数术记遗》《海岛算经》和《缉古算经》等，其中有许多内容是关于几何方面的。其中较早的《周髀算经》（约写于公元前400年前）记载着劳动人民发现的数学和天文知识。如书中记载有周公（约生于公元前1100年）与商高的问答，商高较详细地讲了有关勾股问题和一些结果。商高说：“数学的一种方法是研究一些圆形和方形的，圆形是由方形产生的，方形又是由矩尺（折成直角的尺）产生的，而矩又出于乘方和开方的演算。因此在勾股形（直角三角形中）中，如果勾（短的直角边）是三，股（另一直角边）是四，则弦（斜边）是五。”商高不仅提出了勾股定理这个特例，而且他还指出了一般的勾股定理，以及用勾股形和勾股定理测量不可到达对象间的距离的一些方法和道理。

《周髀算经》还记载，商高稍后，陈子曾用勾股定理和相似图形的比例关系，推算过地球与太阳的距离以及太阳的直径。

此外，我国古代还有一些书籍总结了劳动人民创造的几何知识，达到较高的水平，《墨经》就是一例。墨子（约公元前

478—392年），战国时代的著名思想家，以他为代表的墨家以及后期的墨家，研究和探讨了思维的形式和规律，创立了我国古代逻辑学；结合光学、天文学的实际研究，总结了几何方面的一些原理和方法。在他们著述的《墨经》中有丰富的几何学内容，其中不仅有定义、公理、定理，而且有无限大、极限和集合论的思想。例如《墨经》上说："平，同高也"，指两平行的直线或两平面的距离处处相等；"同长，以正相尽也"，指同长的线段可互相叠合；"圜，一中同长也"，指圆或球的中心距圆周或球面上任何点，都有同样的长度；"体，分于兼也"，是说个体是整体的一部分；"穷，或有前，不容尺也"，指有边界的域，从一端到另一端用尺可以量尽；"端，体之无厚面最前者也"，指点是形体的尖端，只有位置而没大小；"方，柱隅四讙也"，指矩形的四边是直的，四角都是直角；"非半不𣁋（音灼），则不动，说在端"，当形体被分割时，若累次截取它的一半，长此继续下去，达于极限时，就不能再分了，最后留下一个不动的一点。现存的《墨经》分经上经下两卷，共一百七十九条是墨子本人所著，在经文各条下，各附有经说，这是墨子讲经时由他的学生笔录的。以上仅举几例并作以粗浅的解释，是否准确，尚须进一步探讨。《墨经》中几何学的主要特点是联系实际，立论精辟，思想深刻。

我国古代，对面积和体积的研究，有着光辉的成就。在《九章算术》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》中都有记载。《九章算术》（约写于公元前400年）系统地总结了我国上古至先秦两汉时期劳动人民在生产实践中积累起来的数学知识，其中第一章"方田"，主要是关于园田面积的计算；第五章"商功"是各种土建工程、容器测量等有关的体积计算。书中提出了各种面积和体积的计算公式，其中正方形、长方形、三角形、梯形、圆形等面积公式，以及棱柱、棱锥、棱台、圆柱、圆锥、圆台等体积公式都是正确的。

有些近似公式也达到了一定的准确程度，例如：弓形和球的近似公式，用现代的符号可写成：

弓形（弧田）面积 $S = \frac{bc+b^2}{2}$（b 是高，c 是底边长）；

球（立圆）体积 $V = \frac{9}{16}D^3$（D 为直径）等等，但是这些公式都没有证明。后人在对上述的算经的注释中采用了分、合、移、补等方法，证明了这些面积和体积公式。

以上列举的事实，仅是我国人民创造的大量几何知识的一部分，但足以说明我国是重要的几何发源地。

在埃及，几何知识也是由于测量土地、土木建筑、手工业以及天文等的需要而产生和积累起来的。古代埃及的尼罗河经常泛滥，劳动人民为了计算尼罗河水的涨落期的需要，产生了埃及的天文学。而天文学是需要几何学和数学的。再者，尼罗河每年涨水后需要重新丈量土地的边界，更是直接需要几何学知识，从而就产生和发展了几何学。

记载埃及人数学知识较早的文字材料，主要是两批草片文书（公元前2000—1700年左右），一批是现存莫斯科的《杂录》，一批是现存英国博物馆，由英国人兰德（Rhind）于1858年在埃及发现的《阿梅斯（Ahmes）杂录》。其中记载有数学问题和解答。在几何学方面有计算耕地面积、谷仓容积、以及建造金字塔的有关问题。有的计算面积、体积的公式，达到了相当准确的程度。例如“圆的面积等于边长为其直径$\frac{8}{9}$的正方形面积”这一近似公式中，实际上已知圆周率等于3.1605。又如计算以正方形为上下底的棱台体积公式，用现代的记号表示就是

$$V = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

其中 a、b 是两底的边长，h 是棱台的高。这是完全正确的公式，可见埃及几何学发展的水平也是相当高的。

在巴比伦，由于底格里斯和幼发拉底两河流域的美索不达米亚平原，土地肥沃，农业发展很快，生产推动了天文学和数

学的发展。巴比伦的劳动人民在生产实践中结合天文观测发现了不少几何知识。例如，在较早的一些泥版文书中曾记载着圆的面积 $S=\frac{C^2}{12}$（其中 C 是圆周长），这相当于知道了圆周率等于 3 。而在计算正六边形与其外接圆周长之比时，又进一步采用了$\frac{1}{8}$作为 π 值。此外把圆分为 360 度是巴比伦天文学家在公元前一世纪首创的。

几何学是人们对现实世界空间形式的一种认识，这种认识主要地依赖于劳动人民的生产实践。中国、埃及、巴比伦等文明古国，在几何学方面所作出的重大贡献，说明了这一道理。

1·2　欧几里得的《几何原本》

几何学公理法的产生与希腊人的工作分不开，特别是欧几里得《几何原本》的产生，标志着古典公理法的产生。

在古希腊，劳动人民同样在生产实践中积累了许多几何知识，特别是由于商业贸易的需要，推动交通航海事业的发展，扩大了埃及、巴比伦和希腊的文化交流。到了公元前七世纪，埃及和巴比伦的几何知识传到希腊，被应用于实践。那时，希腊的社会生产有了很大发展，农业、手工业、商业、土木建筑和交通航海等迅速发展起来，因而推动了天文学、力学和几何学的进一步发展。这时对已有的庞大的几何知识进行整理、概括和系统化，成为一项重要工作，希腊的许多自然科学工作者参与了这一工作。

泰勒斯（Thales，公元前639—548年）被称为希腊的几何学鼻祖，他曾到埃及和巴比伦研究几何学，并在那里应用相似形理论测量了金字塔的高度。他回国后，通过建立学校和学派，大力传播埃及和巴比伦的几何知识。他和他的学生曾总结出半圆的圆周角为直角，三角形合同定理等。

希腊几何学家毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前 569—500年）和他创立的毕达哥拉斯学派，对几何学的概念的定义，定

理的证明等几何学方法进行过探讨．这个学派提出了著名的毕达哥拉斯定理（即勾股定理），还总结出关于三角形、平行线、多边形、圆、球等某些定理，特别是知道“三角形内角和等于二直角”，以及“黄金分割”的作图，正多面体的定理等．他的学生希派苏斯（Hippasus）曾研究过“不可公度量”等理论问题．

随后，在希腊首都雅典出现了著名的柏拉图（Plato 公元前427—347年）学派．柏拉图虽然不是数学家，但他热心这门科学，特别是几何学．他认为知识有加以演绎整理的必要．他是第一个把严密推理法则加以系统化的人，因而他的门人曾按逻辑次序整理了定理．这个学派的著名数学家希波克拉特（Hippocrates，公元前五世纪）就曾写过一本叫做《几何原本》的书，据说用符号代替“点”和“直线”，把定理按一定的逻辑关系来排先后次序，是他最早实行的；他还研究过新月形面积以及历史上有名的三大难题中的“立方倍积”问题和“化圆为方”问题．这个学派中的数学家欧道克斯（Eudoxus，公元前408—355年）用“取尽法”（极限思想）获得柱、锥、球体积的计算方法，系统地研究过比例的理论等等．

被恩格斯称为古希腊思想家的亚里士多德（Aristotle，公元前384—322年），对许多知识领域进行过探讨，从中概括了思维的形式和规律，系统地提出形式逻辑的有关理论问题，奠定了逻辑学的初步基础，为几何学提供了逻辑方法．他主张任何一种严密的科学体系是从一些不能证明的原理开始的，而不证明的原理分成两类，即公理和公设．他还主张几何对象要加以定义，解释它们的特性，而为了定义这些对象，要有一些不能定义的基本对象，加以默认．

公元前三世纪，希腊著名数学家欧几里得（公元前 330—275年左右），在泰勒斯、毕达哥拉斯、柏拉图等学派的工作基础上，运用了亚里士多德提供的逻辑方法，写出了光辉的著作

《几何原本》，这是历史上第一本体系比较完整的数学理论著作。他把几何学建立在定义、公设、公理等几个最初的假设上；以这些假设为基础，运用逻辑的定义和推理方法导出后面的一切定义和定理，把历史上积累的庞大而又分散的几何知识，用逻辑的“链子”编排成为一个比较系统的概念和理论的体系。他示范性地规定了几何证明方法，例如分析法、综合法和归谬法等。《几何原本》被认为是用古典公理法建立的几何学。

欧几里得的《几何原本》全书共十三卷，除其中第五、七、八、九、十卷是用几何方法讲述比例和算术理论，其余各卷纯粹讲几何内容。

第一卷包括有关平行线、三角形、平行四边形等定理和证明；第二卷主要是讨论几何学中的代数法；第三卷讨论圆的有关定理；第四卷讨论圆的内接与外切多边形定理；第六卷讨论相似形理论；最后三卷主要是立体几何。这些内容几乎包括了现在中学课本的全部内容。

《几何原本》第一卷首先提出二十三个定义，前七个定义和最后一个定义是：

（1）点是没有部分的。

（2）线有长度没有宽度。

（3）线的界是点。

（4）直线是同其中各点看齐的线。

（5）面只有长度和宽度。

（6）面的界是线。

（7）平面是与其直线看齐的面。

（23）平行直线是这样的直线，它们在同一平面上，而且往两个方向无限延长时，在两个方向上都不会相交。

接着欧几里得列出五条公设和五条公理。他采用了亚里士多德对公设和公理的区分，把公理看成是适用于一切科学的真理，而公设则只应用于几何，这些公设和公理当做是一切逻辑

证明的依据。

五条公设是：

（1）从任意点到另一点可以作直线。

（2）直线可以无限延长。

（3）以任意点为中心，可用任意长度为半径作圆。

（4）所有直角皆相等。

（5）如果两条直线与第三条直线相交，所构成的同侧内角的和小于两个直角，则这两条直线在这一侧相交。

五条公理是：

（1）等于同一量的量相等。

（2）等量加等量，其和相等。

（3）等量减等量，其差相等。

（4）可叠和的量相等。

（5）全体大于部分。

《几何原本》的出现，标志着古希腊几何学发展到了一个重要历史阶段，这部伟大的著作在世界上得到很高评价。

《几何原本》为公理法奠定了基础，成为现代公理法的根源。《几何原本》问世以后，被当做是传播几何知识和培养逻辑思维的好书，世界上许多民族都用自己的语言翻译了《几何原本》，我国最早的译本是明代徐光启译出的。

1·3 欧几里得第五公设问题

《几何原本》所创立的古典公理方法仍然存在不少的缺点。

首先，欧几里得在他的《几何原本》中企图对每个概念都加以定义，因此一些定义不能成为正确的数学定义。例如：定义1、2、5、6等不过是对点、线、面等几何对象的直观描述；定义4的意义含混不清，等等。因此，它们在以后的论证中不起作用。

其次，《几何原本》中的公设和公理是不够用的。例如没

有顺序、运动、连续等公理．因此，《几何原本》中对许多命题的论证，不得不借助于直观．这从严格的公理方法来看是不允许的．任何一个几何事实，不管是多么直观明显，如果它不包括在公理里，都要加以证明．因为一个直观明显事实，我们判断它常常带有主观片面性，可能得出不正确的结论．例如，从前人们在很长时间里，认为地球是不动的，太阳绕着地球运行，后来才得出与此相反的结论。这一点足以说明直观显然性不是建立科学的依据．

但是，研究欧几里得《几何原本》的古代学者中，只有少数人注意到上述的缺点，试图对《几何原本》的定义进行修正，对公理的不足进行补充．大多数人注意的是第五公设问题，原因是：第一，《几何原本》中前四个公设含义十分简单，具有直观的显然性，而第五公设比较复杂，看来很象一个定理；第二，第五公设在《几何原本》中应用很晚，欧几里得在前28个命题的证明中，都避免使用它，只在第29个命题中才第一次用到．因此，古代许多数学家认为欧几里得第五公设是一条定理，由于他没能证明，才不得不把它列为第五个公设．这样，许多学者就企图用《几何原本》中其余的公设和公理来证明它，以便消除他们认为是《几何原本》中的这个“污点”．

从欧几里得时代起，直到十九世纪初期，在大约两千年漫长的时间里，许多学者对第五公设曾作出种种证明．其中著名的有蒲罗克鲁（Proclus，公元410—475年，希腊人），瓦里斯（Wallis，公元1616—1703年，英国人），萨开里（Saccheri，公元1667—1733年，意大利人），兰伯特（Lambert，公元1728—1777年，德国人），勒让德（Legendre，公元1752—1833年，法国人）等等．在所有的证明中，尽管都是巧妙的，但仔细分析后，就会发现他们在证明中，或是不知不觉地利用了直观明显性，或是利用了与第五公设等价的命题（见第三章§2，

2,3)。因此，所有这些证明，实质上都是无效的。

下面举几个这种证明的例子。

1. 蒲罗克鲁的证明。

已知直线 a、b 与直线 c 相交，在直线 c 的一侧构成内角 α，β，且 $\alpha+\beta<2d$（d 表示直角）。

求证 a 与 b 在这一侧相交。

证明　过直线 b 与 c 的交点 B 作直线 b'，使直线 b' 与直线 c 构成的角 α' 等于 α，则直线 b' 与 a 不相交（图1·1）。

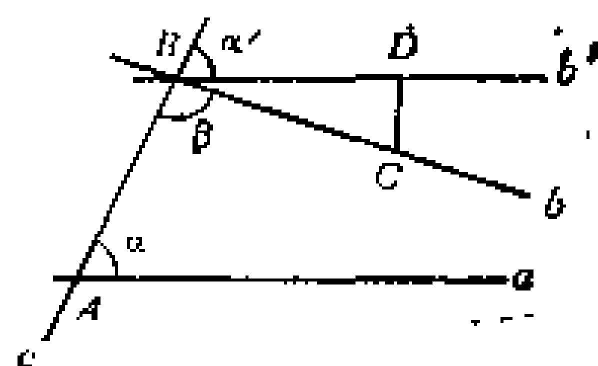


图1·1

因为 $\alpha'+\beta=\alpha+\beta<2d$，所以 b' 与 b 不同，且 b 在 α' 的邻补角内。

在直线 b 上取一点 C，并使 C 在 a 、b' 之间。使点 C 沿直线 b 逐渐与点 B 无限远离，则点 C 到直线 b' 的距离 CD 随点 C 远离 B 而连续地无限增大。因为距离 CD 必然要在点 C 的某个位置等于直线 a 与 b' 间的距离，所以直线 a 与 b 相交于点 C 的这个位置。

这个证明在什么地方有漏洞呢？原来是蒲罗克鲁在证明中用到了假定："如果直线 a 与 b' 不相交，则它们之间的距离是有限的，并且这个距离处处相等."而这个命题是与第五公设等价的，不事先承认第五公设就无法证明它的成立。因此，这个证明是无效的。

2. 勒让德的证明。

已知条件和求证结论与前例相同。

证明　如图1·2，从点 B 作直线 a 的垂直线段 BH，得直角 $\triangle AHB$。

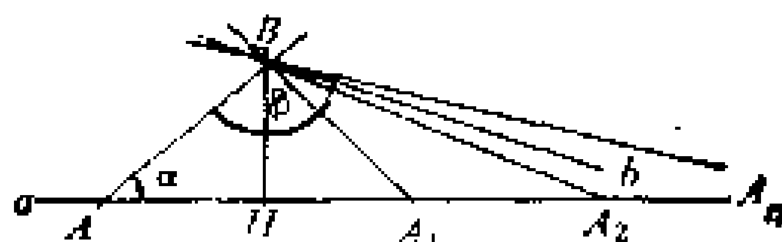


图1·2

因为三角形内角和等于 $2d$，$\alpha+\beta<2d$，所以 $\angle HBb<d$。

从垂足H起，沿直线a取点A_1，使$HA_1=HB$，再取点A_2，使$A_1A_2=A_1B$等等，如此继续下去，直到取点A_n，使$A_{n-1}A_n=A_{n-1}B$。连结AB_1，AB_2，…BA_n。

因为$\triangle BHA_1$是等腰三角形，它的内角和等于$2d$，所以两底角相等且等于$\frac{1}{2}d$。又因为$\triangle BA_1A_2$也是等腰三角形，而三角形外角等于它的不相邻的两内角和，所以两底角都等于$\frac{1}{2^2}d$。逐次继续下去，最后的等腰$\triangle BA_{n-1}A_n$的底角等于$\frac{1}{2^n}d$。由此得到$\angle HBA_n=d-\frac{1}{2^n}d$。

设$\angle HBb=d-\varepsilon$，这里$\varepsilon>0$，如果取充分大的n，必能使$\frac{1}{2^n}d<\varepsilon$，于是$\angle HBb<\angle HBA_n$。这时，直线$b$落在$\triangle HBA_n$的一个角$\angle HBA_n$的内部，因此，$b$必与它的第三边$HA_n$相交，也就是直线$a$与$b$相交。

勒让德的证明是根据下面的命题："三角形的内角和等于二直角"而这个命题也与第五公设等价，必须当第五公设成立时它才成立。因此，他的证明也是无效的。

3. 萨开里和兰伯特的工作

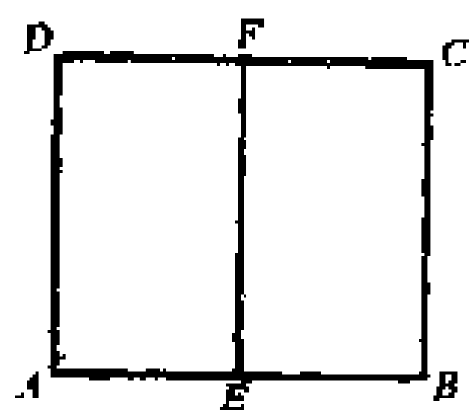


图1·3

萨开里企图用反证法来证明第五公设。他给出了四边形$ABCD$，$\angle A=\angle B=d$，$AD=BC$，EF是中点线（图1·3）。

萨开里首先证明了EF同时垂直于AB和CD，以及$\angle C=\angle D$（以EF为轴，左边的四边形可以翻转落到右边的四边形上）

其次他提出三个假设：$\angle D=d$，$\angle D>d$，和$\angle D<d$。

他得到，如果$\angle D=d$，则存在矩形，于是第五公设成立。因此，只需否定钝角和锐角假设，就证明了第五公设。萨开里用完全正确的推理把钝角假设引向矛盾。但是，在他从锐角假设出发企图引出矛盾的时候，得到一系列的命题，其中没有一个是与绝对命题（不用第五公设推出的）相矛盾，最后推出第

33命题时，由于他引用了一个错误的结论，才否定了锐角假设，这个证明当然是无效的。萨开里所导出的这些新命题，实际上就是非欧几何的部分内容。

兰伯特是德国几何学家，他的证法与萨开里的讨论非常接近。他研究了具有三个直角的四边形，并给出第四个角以三种假设，即等于直角、大于直角、小于直角。他证明了第四个角如果等于直角，则第五公设成立。他用正确的推导否定了钝角假设，但无法否定锐角假设。

兰伯特从锐角假设获得的一系列推论，例如"三角形内角和小于二直角"、"$\triangle ABC$面积与角亏$\delta=\pi-\angle A-\angle B-\angle C$成比例"等等。实际上也是非欧几何的部分内容。

对第五公设的研究，经历了二千年漫长的时间，走过了一条曲折的道路。但是，通过第五公设的种种试证，逐步认清了第五公设在《几何原本》中的特殊地位，明确了第五公设与一些命题的等价关系，获得一系列非欧几何的内容，这就使几何公理方法的研究又向前推进了一步，同时为非欧几何的出现创造了必要的条件。

1·4　非欧几何的发现

罗巴切夫斯基（Н·И·лобачевский，公元1792—1856年，俄国人）试图用反证法证明第五公设。他保留欧几里得第五公设以外的一切公设与公理，并且否定了第五公设，从假设："同一直线的垂线和斜线不一定相交"出发推导下去，如果出现矛盾，就证明了第五公设。罗巴切夫斯基推出一连串的命题，形成了一个严密完善的新体系，而没有发现任何矛盾。因此，罗巴切夫斯基认为这个新的公理系统所建立起来的几何体系代表着一种新的几何学，并把它称为"虚几何学"，于1826年2月23日在嘉桑大学物理数学系的会议上宣讲了他的关于《虚几何学》的论文。1829年又在他首次发表的著作《关于几何原理》中，阐明了第五公设不能从其余的公设与公理推出，理由

就是“虚几何学”的存在。

罗巴切夫斯基的“虚几何学”，在同时代的一些学者看来是荒谬的，因为两千多年的传统思想一直认为欧几里得几何是唯一可能的，而新几何的许多命题与传统观念相违背。但罗巴切夫斯基并未因此灰心，继续新几何的研究，相继发表了《新几何原理与平行线理论》、《虚几何学对于积分的应用》、《泛几何学》等等，并试图在实践中验证。

高斯（Gauss，公元1777—1855 年，德国人）和约·鲍耶（J.Bolyai，公元1802—1860年，匈牙利人）在同一时期也曾分别独立地建立了同样的非欧几何，但高斯生前未发表。

当罗巴切夫斯基发表《虚几何学》的二十八年后，德国著名数学家黎曼（Riemann，公元1826—1866年）又提出了既不是欧氏又不是罗氏的黎曼几何学。黎曼几何没有平行线，而采用公理：“同一平面上的任何两条直线一定相交”。在这种几何里，三角形内角和大于二直角。

非欧几何的产生进一步说明了公理方法的重要作用。它的产生，彻底解决了第五公设问题，肯定了第五公设不是欧氏其余公理的推论；扩大了几何学的内容和意义，扩展了空间观念，解放了人们的思想，这对数学的发展有深远的影响。

如果说欧几里得《几何原本》是用公理法建立几何体系的雏型，那末罗巴切夫斯基的非欧几何体系则是用公理法建立几何学的又一个尝试，推动了公理法的发展。

1·5 近代公理法的形成

公理法达到完善的地步是在十九世纪末，由德国数学家希尔伯特（Hilbert，公元1862—1943年）最后完成的。

公理法的发展和完成，同对《几何原本》公理体系进行补充与改进工作分不开的，关于第五公设的研究仅是这一工作的一部分。下面举出几个有突出贡献的数学家。

希腊数学家阿基米德（Archimedes，公元前 297—212年）

是最早发现《几何原本》中公理不足的少数学者之一。在他的著作《球和柱体的理论》中曾经提出五条公理，企图对《几何原本》的公理不足加以补充。其中第五条就是现在作为连续公理之一的阿基米德公理。

著名的欧几里得几何评论家萨开里、兰伯特、勒让德等，在他们的著作《肃清污点的欧几里得》、《平行线理论》、《几何学原理》中都曾对《几何原本》的定义、公设、公理作过不少改造的尝试。

在几何公理研究中，第一个取得重大成就的是德国数学家帕士（Pasch，公元1843—1930年），在他的著作《新几何学讲义》中，比较完善地提出欧氏几何的公理系统。帕士认为，几何基本命题应从实验得来，而几何体系的展开应按逻辑推理的途径进行。他提出的前十二个公理，后来被希尔伯特适当地改造后列为他的公理系统中的前两组公理。

希尔伯特于1899年发表了著名的著作《几何基础》，这部书被看作是几何基础研究的经典著作。希尔伯特首先提出作为欧氏几何学的原始元素和原始关系，根据这些元素和关系成功地建立了欧氏几何学的公理系统，并按照不同的作用把它们分为五组：结合公理、顺序公理、合同公理、平行公理和连续公理。他还从这五组公理出发进行严格的逻辑推理，建立了欧氏几何的逻辑结构，使其成为一个非常完善而严谨的科学体系。此外，希尔伯特又提出而且解决了公理系统的基本问题，即公理的相容性、独立性和完备性，因而得到明确的构成公理系统的原则。这样，几何公理法最后达到了极其完善的地步，被称为近代公理法。

公理法虽然是从研究几何学中发展和完成的，但很快就成为研究和整理自然科学的一种重要方法，特别是渗透到许多数学分科之中，例如代数学、函数论、集合论、概率论、拓扑学等等学科。但是，必须指出，公理化的方法，只有在人们的实

践中不断的积累大量的数学或其他科学知识的前提下才能发挥作用，从而使某种科学的材料理论化、系统化。在数学的研究工作中，如果没有新的观念，新的方向，新的材料的创建，而只着眼于公理化，数学将变成只对旧的内容的重新排列和严格化，而失去其活力，那将阻碍数学的发展。

§2　公理法的构造和原理

我们常说的初等几何学是属于欧几里得几何学范畴的，它们都是用严格(近代公理法)或不严格（古典公理法）的公理方法建立的演绎体系。这种体系的特点就象本书开头讲过的那样，是由一连串的原始概念、公理、定义、定理和证明，按着严格的逻辑原则和关系，有次序排列起来的系统。由公理和定义确定的几何图形概念以及由公理和定理所肯定下来的图形性质，是这门几何学的内容；而建立这门几何学的基础（公理系统），以及公理、定义、定理等之间的逻辑关系，则构成了这门几何学的逻辑结构。用公理法建立的几何学的演绎体系，是这种几何学的内容和逻辑结构的统一。

例如欧几里得的《几何原本》是从不完全的五条公设和五条公理出发建立的演绎体系，而希尔伯特的《几何基础》第一章所建立的欧氏几何学，是由五组公理：结合（关联）公理I_{1-8}，顺序公理II_{1-4}，合同公理III_{1-5}，平行公理IV，连续公理V_{1-2}共20条公理建立的演绎体系。其中前者是用不严格的公理法，而后者用的是严格的公理法。

由于作为初等几何学基础的公理条文不一致（例如，本书第三组公理选用运动公理，而希尔伯特选用的是合同公理），公理提出的先后次序不一致（例如，一些教材很早就提出了平行公理，希尔伯特是作为第四组公理，而本书最后才提出平行公理），因此，作为该公理系统推论的定理以及定义，提出的

先后顺序也就不一致，即逻辑结构不同。这样一来，同是初等几何的演绎体系，但却有很大的差别。可是，用来建立初等几何的公理法的构造和原理是一致的，所遵循的逻辑原则和方法是一致的。本书所要着眼研究的也就是这样的原理。

概括地说，用公理法建立几何学演绎体系时，由以下四个方面组成：

1. 原始概念的列举；

2. 定义的叙述；

3. 公理的列举；

4. 定理的叙述和证明。

下面分别说明各组成部分的意义、作用和所遵循的原则。

1. 原始概念的列举

原始概念是不定义的概念，它是一切定义的基础。“原始”是相对一个几何体系而言的。原始概念也称基本概念。

原始概念包括“原始元素”和“原始关系”。例如：欧氏几何的原始元素是“点”、“直线”和“平面”；原始关系有“结合关系”、“顺序关系、“运动关系”等等。可以用“点在直线上”、“点在…两点之间”、“叠合”等等来表达这些关系。

某些课本中常常对原始概念加以具体的描述，如“点没大小”、“线有长度没有宽度”等，其目的是给学生造成直观的认识，这些都不是定义。

为什么要列举一些不定义的“原始概念”呢；这是因为按照逻辑的原则，在定义一个概念时，必须根据前面已知的概念，而这些已知概念，又是根据它们以前的概念来定义等等，这样追溯上去，总有几个开头的概念不能再下定义，所以最初需要选择少数不加定义的原始概念作为基础，用它们来定义所有其余的概念。

原始概念虽然不定义，但它们所具有的本质属性是通过公

理来确定的，可以认为原始概念是通过公理间接“定义的”。点、直线、平面等元素都是抽象的概念，书本上所画的直观图形只不过是它们的具体模型之一。我们用铁丝或线绳作成的教具，也只是它们的具体模型。从公理法的角度来看，点、直线、平面的模型有无穷多种，就是说凡是满足公理系统中规定的基本属性的事物，都可以看成是该几何学的模型或解释。这样，几何学的对象就有了更加广泛的意义和内容，从而也就有了更加广泛应用的可能。

几何学体系的建立，一般是从原始概念开始的。

2. 定义的叙述

定义是揭示某个概念的本质属性，以区别于其它概念的一种逻辑方法。开头列举出一些原始概念以后，就可以用来定义其它一些新概念。例如“有一个公共点的两条直线叫做相交直线”等等。

在严格的演绎体系里，除了原始概念以外，其余的概念都必须通过定义给出。

3. 公理的列举

有了最初的一些概念以后，紧跟着就是陆续提出建立该几何学的公理系统。几何学的公理可以简单地说成：作为逻辑论证的基础而本身不加证明的命题。

所以要列举一些公理，是因为每一新定理都要根据前面的已知定理证明后才成立，但是前面的已知定理又是根据更前面的定理证明后才成立的，这样追溯上去，开头总有几个命题不能证明。因此必须采用一些不加证明的原始命题作为证明后面其他命题的基础。

公理是怎样得来的呢？有的是从历史上延续下来的、一直被人们所公认的、具有不证自明的显然事实，例如欧氏几何里的某些公理；有的就是为了某些理论上的需要，作为出发点而被规定下来的，其中有些是暂时不易被人接受的，例如罗氏平

行公理就是如此。但是，公理的来源一般地是以实践作为基础的，而规定的公理正确与否，最终必须经过实践的验证。

用公理方法建立一个几何体系时，最重要和最根本的问题是确定该几何的公理系统。

不同的公理系统可以建立不同的几何学，甚至是互相对立的几何体系。欧氏、罗氏和黎氏三种几何学就是很典型的例子。从这个观点来看，几何学的种类可以多至无穷。

同一种几何学的公理系统，允许选取不同的条文(命题)，有的选取这一组，有的选取另一组，有的多些，有的少些。例如欧氏几何学的公理系统就有欧几里得的选法，希尔伯特的选法以及其他选法等等。就拿欧氏平行公理来说，最早是欧几里得的第五公设，现在的初等几何一般采用普雷菲尔(Playfair，公元1748—1819年）命题："通过直线外一点，最多有一条直线与已知直线不相交。"作为平行公理。实际上凡是与第五公设等价的命题都可以取代它作为平行公理，这样的命题可以有许多。例如：

三角形内角和等于二直角。

一直线的垂线和斜线一定相交。

通过平面上任意三个不共直线的点，一定存在外接圆。

三角形三条边上的高交于一点。

平面上有三个点到一直线的距离相等，且在直线的同侧，则这三个点在一直线上。

存在相似三角形。

通过一个角内部的任意点，总可以作和角的两边都相交的直线。

上述命题都与第五公设等价。等价的意思是说用这一条公理取代第五公设后，加上欧氏公理体系的其余公理，仍然可以导出欧氏几何的全部定理。

另外，希尔伯特还提出了关于公理系统的无矛盾性、独立

性和完备性，这三性称为公理系统的基本问题（将在第三章最后介绍）。

4. 定理的叙述和证明

定理是其正确性已被证明的命题。而证明是陈述一个判断的充足理由，即借助于一些真实性已经确定的命题（定义、公理、定理），来肯定某一命题的真实性的推理过程。用公理方法建立几何体系时，除了公理以外，每个定理都需要证明才能成立。这样，只要公理经得住客观检验，每一定理又在逻辑证明时无误，那么这些定理的真实性就不会使我们怀疑，这也是公理方法的作用之一。在同一种几何学里，由于公理系统中的具体条文不同，或因作者对条文的编排不同，定理的排列顺序可以有所不同。

用公理法建立的几何学具有严密的逻辑结构，公理系统是该几何学的基础，满足公理系统的几何元素的集合称为几何空间。这种抽象空间的观念，使得几何学脱离了直观性的约束，脱离了古典欧氏几何的传统观念的约束，更显示出它的抽象性和应用的广泛性，从而奠定了现代数学的发展途径。

习　　题

1. 为什么说几何学的产生和发展是由生产决定的？

2. 建立系统严明的几何学为什么必须选定原始概念和公理？

3. 公理法的结构是什么？

4. 试论非欧几何的产生和它的重大意义。

5. 试论希尔伯特对公理法的贡献。

6. 分析现行中学几何教材的逻辑结构。

第二章　几何学中的逻辑原则和方法

本章讨论逻辑学的原理和方法在几何学中的应用，如讨论几何学中的概念和定义，判断与数学命题，推理与证明等原则、方法。这些原则和方法是几何公理法所要严格遵循的，也是整个数学所要遵循的。

§1　概念与定义

本节先讨论概念的意义、内涵和外延、种和属等，然后进一步研究几何学中常用的定义方法和规则。

1·1　概念

概念是反映客观事物本质属性的思维形式。

数学概念和其他概念一样，都是从现实世界中抽象出来的。如点、线、面、体是从物体占有的空间形式中抽象出来的；自然数、分数、有理数、无理数等都是从事物间数量关系中抽象出来的。

概念的抽象性主要表现在它已经不是事物的现象，不是事物的各个片面，不是它们的外部联系，而是抓住了事物的本质和内部联系了。这种对事物所达到的本质和普遍的认识，正是科学抽象所具有的重要意义。

在事物的属性之中有“本质属性”（或“特有属性”）和“非本质属性”的区别。本质属性表现事物的特性，即只为这一类对象所具有，而不为其他对象所具有，从而把这类对象和其他对象区别开来，并可以根据它推出该对象的其余非本质的属

性。例如正方形这个概念，只要指出“等边且等角的四边形”的性质，就足以把它和所有四边形区别开。而其余性质，如“对角线相等”、“对角线互相垂直平分”、“对角线与边不能通约”、“可作外接圆、内切圆”等，都是非本质属性。

1．概念的内涵与外延

概念是思维的基本形式，概念必须明确，否则就不能正确地反映客观事物及其特性，也就无法进行正确的判断、正确的推理与论证，总之也就无法进行正确的思维。究竟怎样才能使概念明确呢？这个问题牵涉到概念的内涵与外延。

概念的内涵是指概念所反映对象的本质属性的总和。

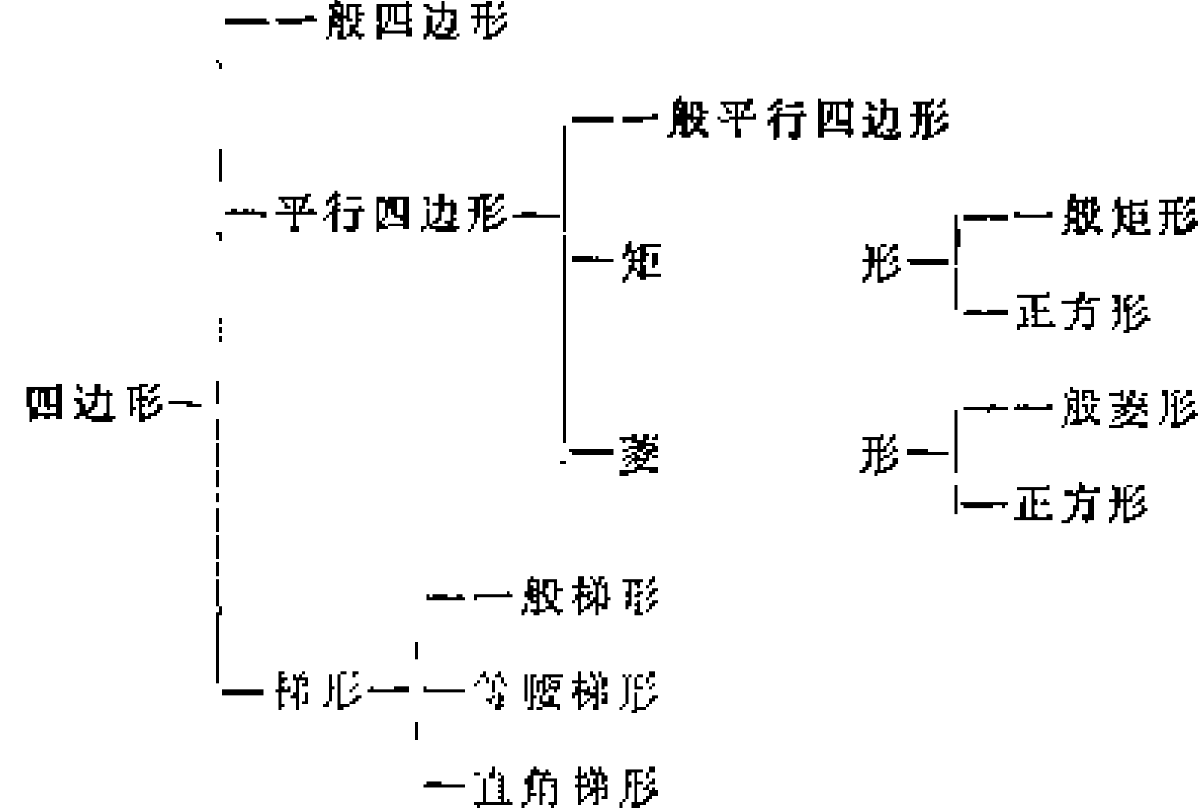
例如：平行四边形的内涵是；（1）四边形；（2）两组对边分别平行。

正方形的内涵是：（1）四边形；（2）四个边相等；（3）两个邻角相等。

概念的外延是指概念所反映的一切对象的总和，也就是指概念的固有范围。

例如三角形包括许多种，按角分类有锐角三角形、钝角三角形、直角三角形；按边分类又有不等边三角形、等腰三角形，等边三角形等等。所有这一些类型的三角形全体是三角形这个概念的外延。又如四边形的外延就是所有四边形全体。

四边形可按种属关系进行如下的分类：



其中所有的四边形是四边形概念的外延；而一般平行四边形、矩形、菱形、正方形全体构成平行四边形的外延；一般矩形、正方形构成矩形的外延；一般菱形、正方形构成菱形的外延。从中可以看出这样一个规律：如果概念的内涵扩大，那么它的外延缩小。反过来，如果概念的内涵缩小，那么它的外延扩大。

概念的内涵与外延是概念的两个方面，所谓一个概念明确，就是明确这个概念的内涵和外延，也就是明确这个概念所指的是哪些对象和有哪些本质属性。这样才能准确地使用概念。

2. 概念的种和属

如果概念B的外延包含在概念A的外延内，那么概念A称为种，而概念B称为属。这样的两个概念叫做具有种和属的关系。

种和属是相对的。同一个概念，对某一概念来说是种概念，但对另一个概念来说却可能成为属概念。例如：多边形、四边形、平行四边形、矩形、正方形等概念，每一个外延较大的概念对外延较小的概念来说都是种概念，而每一个外延较小的概念对于外延较大的概念来说又都是属概念。如“平行四边形”对“四边形”来说是属概念，而对“矩形”或“正方形”来说又是种概念。

“圆”与“几何图形”有种属关系，而“圆”与“四边形”没有种属关系。“五边形”与“六边形”都是“多边形”的属，但它俩却没有种属关系。

一个对象可能有许多个种，其中最和它靠近的种，称为它的最邻近的种。例如：“多边形”、“四边形”、“平行四边形”都是“矩形”的种，而“矩形”最邻近的种是“平行四边形”，其余较大的两个种则不是。“正方形”最邻近的种有两个，即“矩形”和“菱形”。

1·2 定义

给概念下定义，是揭示概念的本质属性，也就是揭示下定义概念的内涵．概念有明确的定义，才能从本质上把一个概念同其他概念区别开来．

为了揭示概念的本质属性，正确而迅速地给概念下定义，常常使用“最邻近的种”加“属差”的方法，其公式为：

下定义的概念＝属差＋最邻近的种概念．

“属差”是被定义的概念和与它并列的其它属概念在本质属性上的差别．例如：“一般四边形”、“平行四边形”与“梯形”对于“四边形”这个种来说是并列的属概念．但“平行四边形”有两组对边平行，“梯形”只有一组对边平行而另一组对边不平行，而“一般四边形”两组对边都不平行这就是它们之间的属差．又如“三角形”、四边形”、“五边形”都是“多边形”的并列的属，它们之间的属差是边数不同．

按上述公式，梯形和平行四边形可以分别定义为：

一组对边平行，另一组对边不平行（属差）的四边形（最邻近的种）叫做梯形．

两组对边分别平行（属差）的四边形（最邻近的种）叫做平行四边形．

又如“矩形”和“菱形”，它们最邻近的种概念都是“平行四边形”，它们之间的属差是前者“有一个直角”，后者“邻边相等”，所以它们的定义分别是：

有一个直角的平行四边形叫做矩形．

邻边相等的平行四边形叫做菱形．

正方形最邻近的种是“矩形”或“菱形”，而正方形与“邻边不相等”的这一类矩形的差别在于“邻边相等”；而正方形与“内角不是直角”的这一类菱形的差别就在于“内角是直角”，这就是属差．所以正方形可定义为：

邻边相等的矩形叫做正方形．

有一个内角是直角的菱形叫做正方形。

通过正方形的定义，我们看出，一个概念的定义并不是唯一的。

上述的定义方法是最常用的，但不是唯一的方法。如三角形的定义常用：

连接不在同一直线上的三个点所构成的图形叫做三角形。

这个定义中所用的“图形”不是“三角形”最邻近的种。

下定义的另一种常用的方法就是所谓发生定义。发生定义是反映对象怎样形成和产生的定义方法。

例如：“平面上到一个定点有定距离的点所形成的图形叫做圆”，“从m个元素里，每次取出n个元素，按照一定的顺序排列，叫做从m个元素里每次取出n个元素的排列”。上面提到的三角形定义也是个发生定义。

定义必须遵守下面的规则：

规则1 定义必须是相应、相称的。即被下定义概念的外延与定义概念的外延应当相等。

违反这条规则，就会犯定义过宽或过窄的错误。例如“对应角分别相等的两个多边形叫做相似多边形”这个定义的外延就过宽了，它不仅包含着所有的相似多边形，而且还包含许多不相似的多边形，因为按着这个定义，所有的长方形和正方形都是彼此相似的。又例如，“对应角相等，对应边的比都等于确定正整数的多边形，叫做相似多边形。”这个定义的外延又过窄了，因为它把相似比限制在正整数的范围，从而排除了相似比不等于正整数（例如正分数）的相似多边形。

规则2 不能循环定义。

这条规则是指不应发生的两种错误。一种是概念甲借助于概念乙来定义，随后又用概念甲来定义概念乙。例如事先我们已经给出“平面上两条不平行的直线叫做相交直线”，而以后又给出“平面上两条不相交的直线叫做平行直线”。一种是犯

了同语反复，例如“构成直角的角叫做直角”，就是说用“直角”来定义“直角”。

§2 判断与数学命题

本节首先讨论判断的意义和常用的判断类型，然后讨论几何中的判断——命题，包括命题的组成、变化以及判断命题等价关系的法则（同一、逆否命题、分断式命题法则）等，还将讨论逆定理的制造方法和命题的充分必要条件。

2·1 判断

判断是对于思维对象有所肯定或否定的思维形式。

判断是在概念的基础上进一步认识客观事物的思维形式。判断之不同于概念或其它思维形式，首先就在于判断是通过肯定或否定来揭示对象与某种特点、属性的关系。不肯定什么，不否定什么，就不是判断。

思维形式的概念是通过词进行的，而思维形式的判断是借助于句子来进行的。同时，逻辑的判断又有它本身的结构。

判断一般由三部分组成。被判断的客观对象叫“主词”；判断某对象有无某种属性或关系的部分叫“宾词”；联系主词和宾词的词叫“系词”，一般采用“是”或“不是”。

例如“图形*ABCD*是(不是)平行四边形”，其中“图形*ABCD*”是这一判断的主词，“平行四边形”是宾词，“是(不是)”是系词。

判断按主词是单称、特称和全称概念，可以分成单称、特称和全称判断。这是按主词的量来划分的。

判断又可分为肯定判断和否定判断。这是按质来划分的，用“是”或“不是”来揭示。

判断按主词和宾词间的关系又可分成“直言判断”、“假言判断”和“选言判断”。

下面是数学中常用的几种判断：

1　直言判断

直言判断所反映的是事物间简单联系或区别，是最常见的、最简单的、最基本的判断．它可以分为：

（1）单称判断．判断的最简单形式，是肯定或否定某一单个事物的某种性质．

单称肯定判断．其公式为"S是P"．例如：四边形$ABCD$是平行四边形．

单称否定判断．其公式为"S不是P"．例如：直线a与直线b不平行．

（2）特称判断．肯定或否定某类事物中有的事物如何如何．它还可以分为：

特称肯定判断．其公式为"有些S是P"．例如：有些平行四边形对角线相等．

特称否定判断，其公式为"有些S不是P"．例如：有些直线不与圆相切．

（3）全称判断．肯定或否定某类所有事物如何如何．它还可以分为：

全称肯定判断．其公式为"所有S都是P"．例如：所有的直角都相等．

全称否定判断．其公式为"所有S都不是P"．例如：所有的点都不在直线上．

2　假言判断

假言判断所反映的是事物间较复杂的或因果关系．数学定理多是假言判断．它的公式是"若S是P，则R是Q"．例如：若点P在圆O的外部，则$OP>r$（O是圆心，r是半径）．

3　选言判断

选言判断所反映的是事物间有选择的关系，其公式是"S或是P或是Q"．例如：直线a与圆O相切或与圆O相交或与圆O相离．

2·2 数学命题

在数学里叙述某一判断的句子叫做命题。定理、公理等都是命题。

1 命题的组成

数学命题很多是假言判断，是由两个或两个以上的判断构成的。如果将假言判断前一个判断“S是P”简记作A，将后一个判断“R是Q”简记作B，则这类命题的一般形式可以写成“若A，则B”，其中A称为命题的题设，有时也称为命题的条件，B称为命题的题断，或称为命题的结论。就是说，数学命题是由题设和题断两部分组成，其标准格式是“若A，则B”，有时写成 $A \Rightarrow B$（一般指真实的命题，符号“$\Rightarrow$”表示从左边推出右边，读作“推出”）或写成“如果A，那么B”，“已知A，求证B”。例如：

若两角是对顶角，则两角相等。

如果两个三角形的两边和它们的夹角对应相等，那么两个三角形全等。

已知四边形 $ADCD$ 中，$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$，求证 $AC \perp BD$。

数学命题不一定都写成标准格式，常常写成简略形式。例如：

对顶角相等。

求到已知直线有定距离的点的轨迹。

这两个命题要化成标准格式，应写成：

如果两个角是对顶角，那么这两个角相等。

已知动点到已知直线的距离一定，求动点的轨迹。

2 命题的四种形式

命题有四种变化，因而有四种形式。

若交换已知命题的题设和题断，则得出原命题的逆命题；若将已知命题的题设和题断同时予以否定，则得原命题的否命

题；若将逆命题再予以否定或将否命题的题设和题断进行交换，则得原命题的逆否命题．其标准格式为：

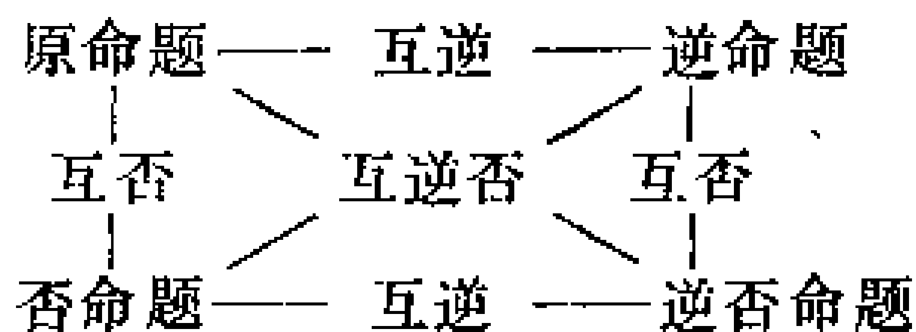
原命题：若A，则B。

逆命题：若B，则A。

否命题：若非A，则非B。

逆否命题：若非B，则非A。

命题的四种形式，有下表所示表示的关系：



3 命题四种形式中的等价性

如果命题的四种形式中甲、乙两个命题，当甲命题真实（或说甲命题成立）时，乙命题也真实；反过来乙命题真实时，甲命题也真实，则两个命题叫做**等价命题**．等价命题一定是真则同真，假则同假．

命题不一定总是真实的．从一个原命题出发所变化出来的四种形式，更不一定都成立．现在通过例子看看它们之间的真假关系．

例 1　原命题：若三角形的两角相等，则此两角的对边相等．——真．

逆命题：若三角形两边相等，则此两边的对角相等．——真．

否命题：若三角形的两角不等，则此两角对边不等．——真．

逆否命题：若三角形的两边不等，则此两边对角不等．——真．

例 2　原命题：若两角相等，则两角都是直角．——假．

逆命题：若两角都是直角，则两角相等．——真．

否命题：若两角不等，则两角不都是直角．——真．

逆否命题：若两角不都是直角，则两角不等——假．

研究命题变化的等价关系，对于认识命题的作用和对命题的证明都有很重要的意义．下面给出判断等价命题的几个法则．

（1）逆否命题法则

从上面的例子看出，原命题和逆否命题，逆命题和否命题都是互为逆否的两个命题，它们总是真则同真，假则同假，所以互为逆否的两个命题是等价的，这个规律叫做逆否命题法则．这个规律很容易用反证法证明．

（2）同一法则

逆命题与原命题不一定同真同假．如果一个命题中的已知和求证的图形都是唯一存在的，则原命题和逆命题一定是等价的．这时称该命题满足同一法则．例如："等腰三角形顶角平分线是底边上的中线．"这一命题就满足同一法则．因为对于一个确定的等腰三角形，其顶角平分线和底边上的中线这两个对象都是唯一存在的，显然它的逆命题"等腰三角形底边上的中线是顶角平分线"成立．又如命题"如果一直线过圆上一点且垂直于过这点的半径，则直线在这一点与圆相切"也满足同一法则，因为过半径外端（点）的垂线和切线都是唯一的，所以其逆命题"如果一直线在一点与圆相切，则直线垂直于过这点的半径"也成立．

后面要讲的间接证法中的同一法就是根据同一法则．

（3）分断式命题

把几个命题合并成一个命题，而且几个命题的题设和题断所叙述的事项，彼此面面周到（对象间在某一关系下的所有可能情形，都无遗漏地列举出来）又互不相容，这种命题叫做分断式命题．例如定理"在一个三角形中，若两角相等，则所对的两边相等；若两角不等，则所对的两边不等，大角对大边，

小角对小边。”这个命题实际上是由三个命题合成的，用符号表示就是：

在$\triangle ABC$中：

（i）若$\angle A=\angle B$，则$BC=CA$；

(ii)若$\angle A>\angle B$，则$BC>CA$；

(iii)若$\angle A<\angle B$，则$BC<CA$。

其中题设把两角的大小关系中“等于”、“大于”、“小于”一一说完，在题断中把两个角所对的两个边的关系也一一说完，即双方具有面面周到的特点；同时题设一方彼此互不相容，题断一方也彼此互不相容，这就是一个分断式命题。又如“在同圆或等圆中，等弦距圆心等距；不等弦距圆心不等距，大者弦心距短，小者弦心距长”，也是一个分断式命题。

分断式命题有如下的等价关系。

我们以上面的第一个分断式命题为例。假设命题是正确的。从(ii)、(iii)同时成立的条件下，我们还可以推出来（i）的否命题也成立，即“若$\angle A\neq\angle B$，则$BC\neq CA$”这是因为若$\angle A\neq\angle B$，必有$\angle A>\angle B$或$\angle A<\angle B$，于是$BC>CA$或$BC<CA$，即$BC\neq CA$。同理可以推出若（i）、(iii)，成立，则(ii)的否命题成立；以及若（i），(ii)成立则(iii)的否命题成立。由于已知（i）、(ii)、(iii)都成立，所以推出它们中的每一个否命题都成立。

对一般的情形证明如下：已知分断式命题

$$\begin{cases}\text{若}A_1\text{，则}B_1\\ \text{若}A_2\text{，则}B_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \text{若}A_n\text{，则}B_n\end{cases}$$

我们来证明此分断式命题与它的逆（或否）命题等价。

设已知分断式命题成立。如果从n个单一的分命题中取出$n-1$个来，例如：

$$A_i \Rightarrow B_i \quad (i=2,\ 3,\ \cdots,n)$$

根据面面周到又互不相容的条件，必能推出

$$非A_1 \Rightarrow 非B_1$$

因此 $B_1 \Rightarrow A_1$

同理可证 $B_j \Rightarrow A_j \quad (j=2,3,\ \cdots n,\ )$

所以原命题成立，则其否命题和逆命题成立。

设已知分断式命题不成立，则至少存在一个数 $k\ (1\leqslant k\leqslant n)$，使

$$A_k \nRightarrow B_k$$

假设 $B_i \Rightarrow A_i \quad (i=1,2,\ \cdots,n)$

根据上半部分的证明，必有

$$A_j \Rightarrow B_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

因此 $A_k \Rightarrow B_k$

这与 $A_k \nRightarrow B_k$ 矛盾。因此，如果分断式命题不成立，则其逆命题或否命题也不成立。

这样，我们证明了分断式命题与其逆（或否）命题等价。

4 逆命题的作法．逆定理

在题设和题断只有一个事项的简单命题中，把题设和题断相互调换位置，便得出逆命题．如果逆命题成立就得逆定理．

如果命题的题设和题断有多个事项的复杂命题，例如：

三角形两边中点连线平行于第三边．

分析它的题设和题断应该是：

$$若\triangle ABC 中\left\{\begin{array}{l}M是AB的中点\\N是AC的中点\end{array}\right\}\Rightarrow MN \parallel BC.$$

它的题设有两条．

如果将这个命题的题设和题断全部交换位置，则逆命题是：

三角形中平行于第三边的直线是另两边中点连线．

它显然是不成立的．这个定理的逆定理一般地都采取了如下的命题：

过三角形一边中点且平行于另一边的直线，必过第三边的中点。

这实际上是将题设和题断按一对一调换而得到的：

若$\triangle ABC$中$\left\{\begin{array}{l}MN \parallel BC \\ N\text{是}AC\text{的中点}\end{array}\right\} \Rightarrow M$是$AB$的中点。

若$\triangle ABC$中$\left\{\begin{array}{l}MN \parallel BC \\ M\text{是}AB\text{的中点}\end{array}\right\} \Rightarrow N$是$AC$的中点。

通过上述例子说明，在建立逆定理时，首先要制造逆命题。对于复杂的命题，习惯上先将题设和题断细分成若干条单纯事项，再将题设和题断进行部分对调，特别是对调相等条数，则可得出许多的逆命题，然后再验证各逆命题是否成立，成立的都是逆定理。一个定理的逆定理可能有多个。一般地，等条数对调的方法得到逆定理的希望较大。例如：

定理 如果圆O的弦AB垂直平分弦MN，则AB是直径。

这个定理可以细分为：

在圆O内$\left\{\begin{array}{l}\text{弦}AB\perp\text{弦}MN \\ AB\text{平分}MN\end{array}\right\} \Rightarrow AB$为直径。

将题断和题设进行部分对调可得出如下三个逆命题：

在圆O内$\left\{\begin{array}{l}AB\perp MN \\ AB\text{为直径}\end{array}\right\} \Rightarrow AB$平分$MN$　　（真）

在圆O内$\left\{\begin{array}{l}AB\text{为直径} \\ AB\text{平分}MN\end{array}\right\} \Rightarrow AB\perp MN$　　（真）

在圆O内，AB为直径$\not\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}AB\perp MN \\ AB\text{平分}MN\end{array}\right.$　　（假）

这样得出两条逆定理：

（1）若圆O的直径AB垂直弦MN，则AB平分MN。

（2）若圆O的直径AB平分弦MN，则AB垂直MN。

第三个逆命题不真实，构不成逆定理。从这个例子看出等条数对换所得出的逆命题成为逆定理的可能性较大，不等量对

换常常得不出逆定理。

5 命题的条件

数学的许多命题是否成立，与命题的条件有关，这种条件就是命题的题设。根据条件A对结论B的作用，命题的条件具有两种特征三种情况。

两种特征是：

充分特征——有条件A就有结论B。这时称条件A为结论B的充分条件。

必要特征——没有条件A就没有结论B。这时称条件A为结论B的必要条件。

三种情况是：

（1）充分但不必要条件。这种条件只具有充分特征，但不具有必要特征。例如：

命题："若两角是对顶角（条件A），则这两个角相等（结论B）。"它是真实的·但否命题（或逆命题）不成立，因为两角不是对顶角时，这两个角也可能相等。因此条件A和结论B的关系是："有A则有B，没有A不一定没有B"。在这种情况下，就说条件A是结论B成立的充分但不必要的条件，有时简称充分条件。

（2）必要但不充分条件。这种条件只具有必要特征，但不具有充分特征。例如：

命题"若两角相等（条件A），则这两角都是直角（结论B）"是不一定成立的，因为相等的角不一定都是直角。但否命题（或逆命题）："若两角不等，则这两角不都是直角"却一定成立。因此条件A和结论B有如下关系："有A不一定有B，没有A一定没有B。"在这种情况下，就说A是B成立的必要但不充分的条件，有时也简称必要条件。

（3）充分且必要条件，这种条件既具有充分特征，又具有必要特征，例如：

命题“若三角形是等腰的（条件A），则底角相等（结论B）”是成立的，同时否命题（或逆命题）：“若三角形不是等腰的，则任意二内角不等”也一定成立。这时条件A与结论B有如下的关系：“有A就有B，没有A也没有B。”在这种情况下，就说A是B的充分且必要的条件，简称充要条件。

从上面的三种条件可以看出，如果A是B的充分条件，则B是A的必要条件；又如果A是B的必要条件，则B是A的充分条件，这就是条件转换关系，这从命题的等价性来看是显然的。因为：

“若A，则B”真，“若非A，则非B”不真，这时A是B的充分条件，若将它们换成逆否命题，则有：“若非B，则非A”真，“若B，则A”不真，这时以B做条件看，B是A的必要条件。

“若A，则B”不真，“若非A，则非B”真，这时A是B的必要条件。若将它们换成逆否命题，则有：“若非B，则非A”不真，“若B，则A”真，这时以B为条件看，B是A的充分条件。例如：

命题 如果两个三角形底和高分别对应相等，那么两三角形面积相等。

这个命题是成立的。

否命题 如果两个三角形底和高不分别对应相等，那末两三角形面积不相等。

这个命题显然不成立。因为底和高不分别对应相等，两三角形也可能面积相等。

这个命题的条件是结论的充分但不必要条件；转换条件后，则条件是结论的必要但不充分条件。

§3 推理与证明

3·1 推理

推理是从一个或几个判断得出一个新判断的思维形式。

上一节里讲过的判断，是人们认识事物的一种重要的思维形式。但是，判断是怎样来的呢？有的是直接经过观察、试验得到的，有的是经过推理得到的。推理是比判断更高一级的思维形式。

推理一般由两部分组成，即前提和结论。进行推理时，根据它们推出一个新判断的那些已有的判断，叫做推理的前提；从前提通过推理得到的新的判断，叫做推理的结论。构成推理的这种判断间的特殊联系，就是前提和结论的关系。常用的推理有归纳推理、演绎推理和类比推理等。

1 归纳推理

归纳推理是从特殊到一般的思维方法，也就是从单称或特称（判断）的前提中得到一般结论的推理方法。

归纳推理在数学中常用的有完全归纳推理和不完全归纳推理两种。

完全归纳推理．被考察的同类事物是有限的，对每个事物都逐一研究，再进行概括而得出的一般性结论的推理。

例如考察有向直线上任意三个点A、B、C构成的有向线段，根据三点的位置关系有以下三种可能：

（1）B介于A、C之间。

这时可以得出结果（图2·1—1）

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$



图2·1—1

（2）C介于A、B之间。

（图2·1—2）这时由于

$$\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$$

$$\overline{AB}-\overline{CB}=\overline{AC}$$

所以有 $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$

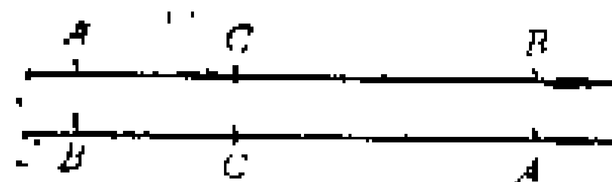


图2·1—2

（3） A介于B、C之间．这时由于(图2·1—3)

$$\overline{BA}+\overline{AC}=\overline{BC}$$

所以 $$-\overline{BA}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

即 $$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

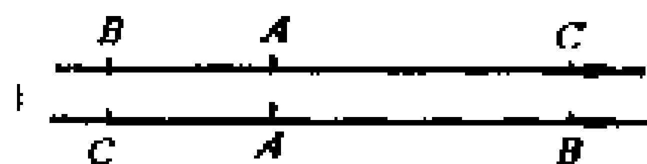


图2·1—3

我们对所有可能出现的情形进行了考察，证明了每一种情形都有同样的结果，即第一个有向线段的末端（沿着有向直线的方向）与第二个有向线段的始端是同一个点时，则这两个线段之和等于第一个线段的始端和第二个线段的末端所构成的线段．或归纳为下面的定理：

“对于有向直线上任意三点A、B、C，无论其位置如何，总有$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$。”

根据完全归纳推理，由真实的前提所作出来的结论，总是可靠的。

不完全归纳推理．被考察的同类事物的数量是无限多的，或者即使是有限也不可能把每一事物都逐一考察到，这时只能根据对其中一部分事物的研究，来推测一般性的结论．

根据不完全归纳推理作出的结论可能是错误的，也可能是正确的,但不完全归纳推理可以帮助人们发现新规律.因为,人们发现的一般规律,往往先在实践中认识个别事实,给人们提供了线索,并由此作出某些一般性(假设的)结论,再经过演绎推理或其他方法得到最后的证实.数学中的规律,常常是这样得到的.

例如：中学代数教学中，引出等差级数求和的公式时，先举出几个特例：

$$1+2+3+4=10=\frac{1}{2}\cdot 4(1+4)$$

$$1+2+3+4+5=15=\frac{1}{2}\cdot 5(1+5)$$

$$3+5+7+9+11=35=\frac{1}{2}\cdot 5(3+11)$$

通过许多特例的结果，归纳出来“等差级数的和等于首项与末项之和乘以项数再除以2”，即：

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{1}{2}\cdot n(a_1+a_n)$$

最后证明了这个用不完全归纳推理作出来的一般性结论是正确的。

又例如函数

$$y=x^2+x+41$$

当 $x=0$时，$y=41$（质数）

$x=1$时，$y=43$（质数）

$x=2$时，$y=47$（质数）

当 $x=3$，4，…，39 时所得的值也全是质数，那么用不完全归纳推理可以作出：“当 x 是零和所有正整数，函数 $y=x^2+x+41$ 的 y 值都是质数。”这样一般性的结论。这是不正确的结论，因为当 $x=40$ 时，有

$$y=40^2+40+41=40(40+1)+41=41^2$$

这个 y 值不再是质数了。用不完全归纳推理作出的结论必须加以证明。

2 演绎推理

演绎推理是从一般到特殊的思维方法。演绎推理中最常见的就是三段论。三段论是从两个已知直言判断推出第三个新的判断的推理方法，而且两个判断中的一个一定是全称判断。

三段论由三个部分组成：大前提（全称的判断），小前提（特称的判断），结论（最后的判断）。例如：

凡矩形其对角线相等（大前提）。

正方形是矩形（小前提）。

所以，正方形的对角线相等（结论）。

三段论中共有三个概念，如上例中的矩形、对角线相等、正方形。

结论中作主词的概念叫做“小词”，如上例中的“正方

形”，常用S来表示。结论中作为宾词的概念叫“大词”，如上例中的“对角线相等”，常用P来表示。在前提中出现两次而在结论中不再出现的概念叫“中词”，如上例中的“矩形”，它起大词与小词相联系的媒介作用，中词常用M表示。含有大词的前提就是大前提，含有小词的前提就是小前提。三段论只有通过中词的媒介作用才能从两个前提推出一个结论来。三段论的结构用符号表示，就是：

一切M都是P（大前提）

S是M（小前提）

所以S是P（结论）

这是数学中常用的推理形式。

演绎推理的正确性依赖于两个前提的正确性，只要前提正确，结论就一定正确。

数学中的三段论，为了叙述简略，常常略去一个前提（多半是大前提），有时甚至仅写出结论。

例如推理：“因为这两个角是直角，所以这两个角相等。”或更简单的写成“两个直角相等。”前者省略了大前提，后者省略了大、小前提。如果恢复三段论式，应该是：

一切直角都相等，

这两个角是直角，

所以这两个角相等。

3　类比推理

类比推理是这样一种推理：根据两个对象在某些属性上的相同而得出这两个对象在其他属性上也可能相同的结论。如对象A有属性a、b、c、d，对象B有属性a、b、c，那么就可以设想对象B也可能有属性d这一结论。

例如，根据“直角三角形斜边上正方形面积，等于两直角边上正方形面积之和”可以推测出“直角三角形斜边上多边形面积，等于直角边上分别与它相似的两个多边形面积之和”

的结论。

类比推理是一种或然性的推理，它只能给人们提供线索，启发人们思考和发现问题，结论是否正确，还必须借助其他方法去验证。

类比推理与不完全归纳推理有共同性，也有差异。共同性是它们推出的结论都是推测，差异性是前者由特殊到特殊，后者是由特殊到一般。

3·2 证明

证明是陈述一个判断是真实的充足理由的思维形式。也就是用一些确实可靠的判断为依据，通过一个或几个推理，来阐明某个判断的真实性的过程。这些推理之间有逻辑连贯性，即前一个推理的结论，一般地是后一个推理的前提，直到推出待证判断（命题）的正确性（或肯定该判断不成立）。

证明与推理的区别在于：在推理的思维运动中，其程序是从前提到结论，前题是事先已知的判断，并由前提作为理由，推出一个新的结论，即从理由推出新的论断。证明与推理的程序相反，是先给出一个论断，然后去寻找该论断是真实的充足理由，由于找出了这些理由作为根据，才能够通过几个推理阐明了事先给出的论断的真实性。证明是比推理更复杂更深化的逻辑形式和方法。

数学的证明能够帮助我们证实某些命题或某一个理论的真实性，和推理一样是建立数学理论的重要方法。

1. 证明的组成

证明由三部分组成：

（1）论题：是真实性需要加以证明的那个判断，在数学中就是待证的命题；

（2）论据：是证明论题的真实性时所根据的那些判断。在数学中就是已知的定义和在待证命题前已提出的公理和定理（简称前此公理、前此定理、前此定义）；

（3）论证：是由论据推导出论题结论的推理过程。

任何证明，如果弄不清楚所要证明的是什么，或证明时所用到的根据是什么，或为什么正好从论据能推出论题的真实性来等等，其结果都可能使整个证明失败。

在证明过程中，首先要把待证命题中哪些是已知，哪些是求证分辨清楚。即经过认真分析论题，将题设和题断分清，然后用具体符号和文字表示出来，同时画出直观图（有时也可不画直观图），作为证明时寻求证明路子的直观参考。其次在证明过程中用到的每一个推理，要层次清楚，论据准确，语言精练，直到最后得出题断的成立，这样就能准确地达到证明的目的。

2．证明的几条规则

一个正确的证明必须遵守下面的规则：

（1）论题要明确，不许偷换。即不准改变题设和题断的内容。

（2）论据必须是真实可靠的。即使用的每个论据都是得到充分肯定的事实（前此定义、定理等）。

（3）在一个证明中，论据不能由论题推出。否则由论据推出论题，又由论题推出论据，就犯了恶性循环的错误。

（4）论据必须能推出论题。论据与论题不相干或论据不充分，都会使整个证明失效。

3．证明方法

数学中常用的证明方法，由于着眼点不同可以有以下的分类方法。

在证明中由于采用推理形式不同，可以分成演绎证法和归纳证法。

在证明中由于采用“从未知到已知”和“从已知到未知”的思维运动的方向不同，证明又可以分为分析证法与综合证法。

在证明中由于直接从待证命题出发，或间接从待证命题的等价命题出发，证明又可分为直接证法与间接证法。

这些证法是从不同的角度上对证明方法作出的分类。所以要这样分类，目的是便于掌握各种证法的特点。因为每一个证明都是由推理完成的，所以演绎推理和归纳推理是基础；由于每一个证明总离不开分析与综合的思维过程，所以分析与综合是解决问题的关键；而直接还是间接从待证命题出发，又是证明的出发点，所以实际上每一个证明，都是几种证法的联合运用的结果。我们不仅要掌握各个证法的特点，又要统一地运用它们去实现每一个证明。

§4 演绎证法与归纳证法

4.1 演绎证法

证明过程只用演绎推理的称为演绎证法。

演绎证法一般包含若干步，而每一步都具有演绎推理的三段论形式，不过为了叙述简便，常用简略形式（省略前提）的推理。

例1　如果三角形两边不等，那么这两边所对的角不等，大边所对的角较大。

证明　已知$\triangle ABC$，$AB>AC$（图2·2），证明$\angle ACB>\angle ABC$。

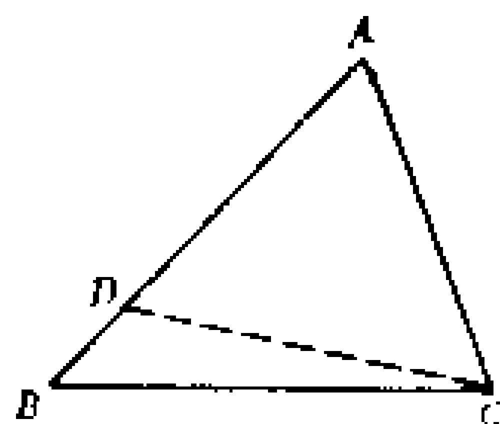


图2·2

在AB边上截取$AD=AC$。

$\because \triangle ADC$是等腰三角形

$\therefore \angle ADC=\angle ACD$

$\because \angle ACD$是$\angle ACB$的一部分

$\therefore \angle ACB>\angle ACD$

$\because \angle ACB>\angle ACD$，$\angle ADC=\angle ACD$

$\therefore \angle ACB>\angle ADC$

又$\because \angle ADC$是$\triangle DBC$中$\angle BDC$的外角

$\therefore \angle ADC>\angle ABC$

又$\because \angle ACB>\angle ADC$，$\angle ADC>\angle ABC$

$\therefore \angle ACB > \angle ABC$。

这个证明过程实际上是由下面五个演绎推理组成的：

第一个推理：

等腰三角形的底角相等（大前提）；

$\triangle ADC$是以 DC 为底的等腰三角形（小前提）；

$\therefore \triangle ADC$的底角$\angle ADC = \angle ACD$（结论）。

第二个推理：

全量大于分量（大前提）；

$\angle ACD$是$\angle ACB$的一部分（小前提）；

$\therefore \quad \angle ACB > \angle ACD$（结论）。

第三个推理：

甲量大于乙量，乙量等于丙量，那么甲量也大于丙量（大前提），

现在$\angle ACB > \angle ACD$，$\angle ACD = \angle ADC$（小前提），

$\therefore \angle ACB > \angle ADC$（结论）。

第四个推理：

三角形一个外角大于和它不相邻的内角（大前提）；

$\angle ADC$是 $\angle BDC$ 的外角，$\angle ABC$是$\angle ADC$不相邻的内角（小前提）；

$\therefore \angle ADC > \angle ABC$（结论）。

第五个推理：

甲量大于乙量，乙量大于丙量，那么，甲量大于丙量（大前提）；

现在$\angle ACB > \angle ADC$，$\angle ADC > \angle ABC$（小前提）；

$\therefore \angle ACB > \angle ABC$（结论）。

从这个证明过程可以看出，它是从定理的题设出发，找出了等量公理，等腰三角形性质，外角定理等为论据，经过五个演绎推理，其中前一个推理的结论作为后一推理的前提，连贯进行，直到最后判明题断成立，从而揭示出命题成立的充足理

由。

4·2 归纳证法

证明过程主要用归纳推理的称为归纳证法。归纳证法是依据许多特殊的事实，证明出论题中的一般性结论。

归纳证法又分完全归纳证法和数学归纳法等。

1．完全归纳证法

如果待证命题的题断只包含有儿种情况，可就各种可能情况一一加以证明（一般用演绎推理），然后用归纳推理推出一般性结论的真实性，叫做完全归纳法或枚举归纳法。

例2 三角形周界上（边和顶点）任意两点的距离，至少不大于三边之一。

证明 已知$\triangle ABC$，P、Q为周界上任意两点，证明下面三个不等式中至少有一个成立：

$$PQ \ngtr BC \quad (1)$$

$$PQ \ngtr CA \quad (2)$$

$$PQ \ngtr AB \quad (3)$$

证前分析：用完全归纳法，要善于将各种可能情形适当分类，切实注意不漏不重，重则白费力气，漏则容易出错。

三角形周界上任意两点的位置，按该点与顶点重合或在边内来分类，有且仅有下述情况：

（1）两点均为三角形的顶点，至于该两点具体和那两个顶点重合无关紧要，本质上是一致的，证明其一即可。

（2）两点中有一点与顶点重合而另一点在边内。这有两种情形：一点与顶点重合，另一点在过第一点的边内或在该点的对边内。

（3）两点均在边上。这有两种情形：两点在同一边内，或两点在不同的边内。

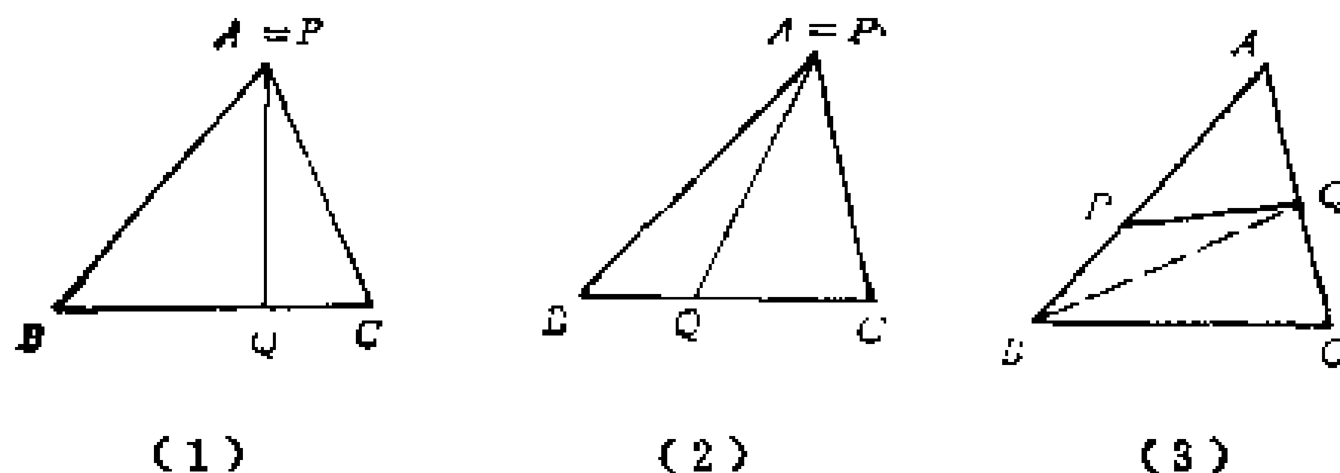
因此，我们在证明时可分成五种情形进行。

1° 设P、Q与$\triangle ABC$的两个顶点例如B、C分别重

合。这时由于$PQ=BC$，所以（1）式成立。

2° 设P、Q有一点与$\triangle ABC$某边的一个端点重合而另一点在此边上，例如P与B重合而Q在BC边内。这时$PQ<BC$，（1）式成立。

3° 设P、Q有一点与$\triangle ABC$一顶点重合而另一点在其对边内，例如P与A重合而Q在BC内。这时若$AQ\perp BC$（图2·3(1)），则$AQ<AC$且$AQ<AB$，所以（2）、（3）式成立。若AQ不垂直于BC（图2·3(2)）则$\angle AQB$与$\angle AQC$有一个是钝角。设$\angle AQB$是钝角，则$AQ<AB$，所以（3）式成立。



（1）　　（2）　　（3）

图 2·3

4° 设P、Q在$\triangle ABC$的同一边内，例如同在BC边内。这时$PQ<BC$，所以（1）式成立。

5° 设P、Q分别在$\triangle ABC$的两边内，例如分别在AB和AC内（图2·3(3)），连BQ，则在$\triangle ABQ$中，根据3°的证明，下列两个不等式必有一个成立：

$$PQ<AQ \qquad (4)$$

$$PQ<BQ \qquad (5)$$

若（4）成立，则因为$AQ<AC$，因而$PQ<AC$，所以（2）式成立。若（5）式成立，则在$\triangle ABC$中，不是$BQ<BC$成立，就是$BQ<AB$成立，因而不是$PQ<BC$成立，就是$PQ<AB$成立，所以（1）或（4）式必有一个成立。

归纳以上各种情形，本题得证。

例 3　圆弧所对的圆周角等于该弧所对圆心角的一半。

证明　已知如图，证明$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$。

分三种情形证明：

（1）　圆心O在$\angle ABC$的一条边上（图2·4）。

设O在BC边上。

∵　$\triangle ABO$ 中，$OA=OB$

∴　$\angle ABO=\angle BAO$

∵　$\angle AOC$ 是$\triangle ABO$ 中 $\angle AOB$ 的外角

∴　$\angle AOC=\angle ABO+\angle BAO$

$=2\angle ABC$

即　　$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$

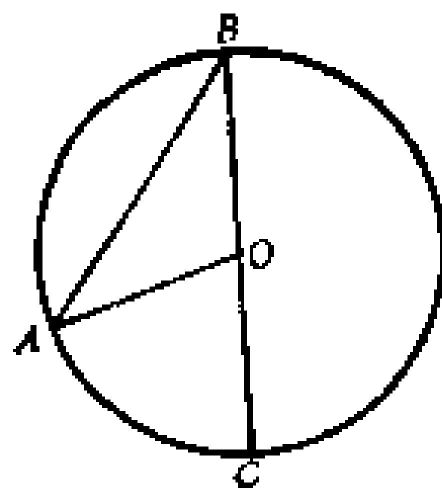


图　2·4

（2）　圆心O在$\angle ABC$的内部（图2·5）。

引直径 BD，则

$\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC$

∵　圆心O在BD上，

有　　$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle AOD$

$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle DOC$

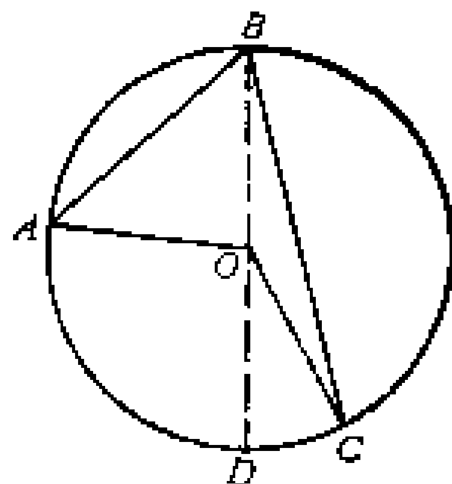


图　2·5

∴　$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOD+\frac{1}{2}\angle DOC=\frac{1}{2}(\angle AOD+\angle DOC)$

∵　$\angle AOD+\angle DOC=\angle AOC$

∴　$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$

（3）圆心在 $\angle ABC$ 的外部（图2·6）。

引直径 BD，则

$\angle ABC=\angle ABD-\angle CBD$

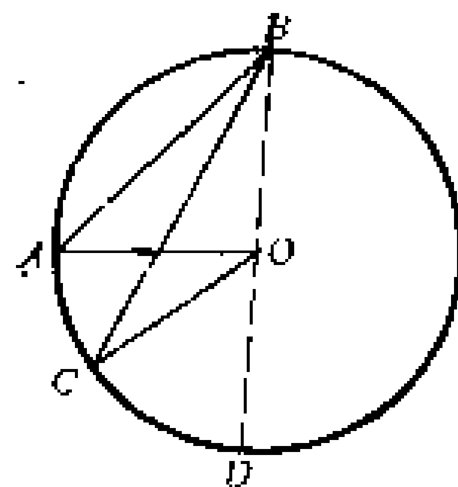


图　2·6

∵ 圆心O在BD上，有

$$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle AOD$$

$$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle DOC$$

∴ $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOD-\frac{1}{2}\angle DOC$

∵ $\angle AOD-\angle DOC=\angle AOC$

∴ $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$

2．数学归纳法

上面讲到的完全归纳法，待证的命题只有少数的几种情形，我们可以对各种情形一一证明，然后归纳出一般结论的正确性。如果待证的命题有非常多的情形，要一一证明是不可能的，这就需要一种特殊的归纳方法，即数学归纳法。

数学归纳法原理（第一数学归纳法）：

（1）验证命题当$n=1$时真实（或验证对命题有意义的最小正整数）

（2）在命题当$n=k$时成立的假定下，推出$n=k+1$时也是真实的。

那么就可以断定这个命题对任何自然数n都成立。

这个原理的真实性可以用反证法证明。这个原理利用了普遍"过渡"的规律，即要求满足条件（2）。这时只要前一个成立，下一个也成立，因此可以"过渡"到任一正整数n都成立。验证满足条件(1)是十分必要的，这样可以防止"过渡"的性质原来就是不真实的。例如"$m=m+1$"是一个错误的结论，但它满足普遍"过渡"的条件（2），这时如果不验证条件（1），就可能得出一个错误的结果。

例4　在有向直线上任意排列的n个点$A_1,A_2,A_3,\cdots\cdots,A_{n-1}$，$A_n$永远有关系式

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_{n-2}A_{n-1}}+\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{A_1A_n}$$

证明

当$n=3$时，$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}=\overline{A_1A_3}$（前面已有证明）成立。

设　$n=k-1$ 时

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{k-2}A_{k-1}}=\overline{A_1A_{k-1}}\text{成立。}$$

等式两端同时加上$\overline{A_{k-1}A_k}$，得

$$\overline{A_1A_2}+\cdots+\overline{A_{k-2}A_{k-1}}+\overline{A_{k-1}A_k}=\overline{A_1A_{k-1}}+\overline{A_{k-1}A_k}$$

∵　A_1、A_{k-1}、A_k 三点必有

$$\overline{A_1A_{k-1}}+\overline{A_{k-1}A_k}=\overline{A_1A_k}$$

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_{k-1}A_k}=\overline{A_1A_k}$$

例 5　平面上每两条都相交，每三条都不共点的n条直线，将平面分成$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$个部分（区域）。

证明　设n条直线将平面分成λ_n个部分。

当 $n=1$ 时，

$\lambda_1=\frac{1}{2}(1^2+1+2)=2$成立。

设当$n=k$时，$\lambda_k=\frac{1}{2}(k^2+k+2)$成立。

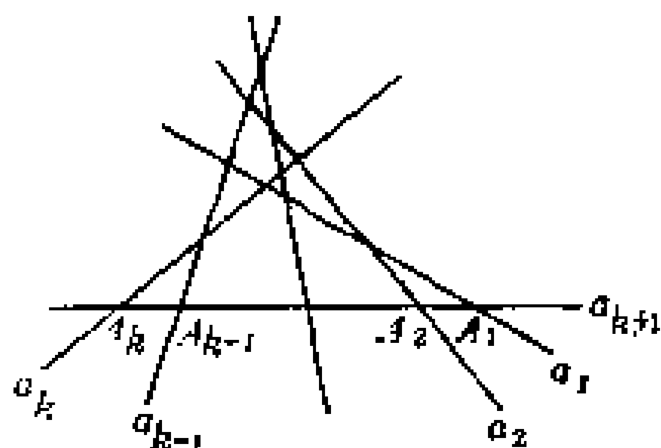


图2・7

当　$n=k+1$ 时，根据已知条件，直线a_{k+1}与所有的其他k条直线相交，而且不通过这k条直线中每两条的交点。现在按a_{k+1}与其他k条直线的交点顺序A_1、A_2、…、A_k 将k条直线编成对应的顺序 a_1、a_2、…、a_k（图2・7）。当 a_{k+1} 从以直线a_1为界的区域穿过a_1到达另一侧的区域，再从这一区域穿过a_2到达第三个区域，再从第三个区域穿过直线a_3到达第四个区域，这时a_{k+1}穿过三条直线共通过四个区域。以此类推，当直线a_{k+1}穿过第k条直线时，必然通过$k+1$个区域。因为直线a_{k+1}每通过一个区域，都将原区域分成两个区域，所以a_{k+1}通过$k+1$个区域时，使原来的区域增加了$k+1$个区域。因此可知：

$$\lambda_{k+1}=\lambda_k+(k+1)=\frac{1}{2}(k^2+k+2)+(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}[(k+1)^2+(k+1)+2]$$

这就是说 $n=k+1$ 时也成立。所以证得：

$$\lambda_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

§5 分析证法与综合证法

5.1 分析证法与综合证法

将分析与综合的思维方法分别运用到逻辑证明上，分别称为分析证法与综合证法。

分析证法是从未知到已知的证明方法。证明的过程是由题断开始，逐步探索这个题断成立的条件，直到最后找到已知的题设是保证题断成立的条件为止。

综合证法是从已知到未知的证明方法。证明的过程是由题设开始，逐步推导这个题设可能得出的结论，直到最后推出未知的题断为止。

例如证明命题"若A，则B"。用分析法证明时，先假设B成立，然后分析B在什么条件下成立，结果得知B成立的条件是C_1或C_2；接着又得知C_1成立的条件是D_1，C_2成立的条件是D_2或D_3；最后得知D_2或立的条件正好是已知A。于是得出分析证法的格式为：设题断B成立，为此只须有C_2，而C_2成立只须有D_2，而D_2成立只须有A，但A是已知的，所以结论B成立。

用综合法证明时，其思路恰好和分析证法相反，可以表示成：

$$A\Rightarrow D_2\Rightarrow C_2\Rightarrow B$$

要特别注意不要把分析证法误认为是

$B \Rightarrow C_2 \Rightarrow D_2 \Rightarrow A$

即以 B 为题设推出结论 A，这样就把原来的题设和题断颠倒，而去证明原命题的逆命题了．前文已讲过，逆命题成立原命题不一定成立．

下面举出两个例子，同时用分析证法和综合证法来证明，通过对比来看看两种证法的联系和区别．

例 1　若圆内接凸四边形的对角线互相垂直，则圆心到任意一边的距离必等于这个边的对边的一半．

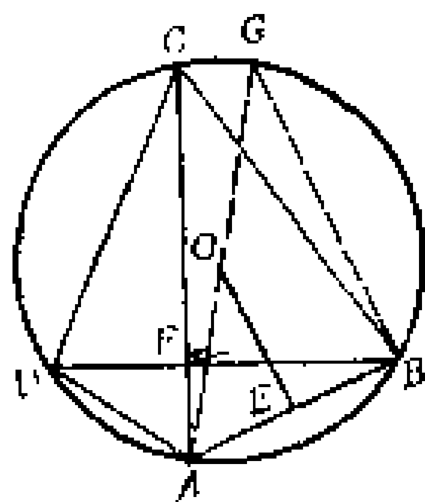


图2・8

证明　圆 O 的内接凸四边形 $ABCD$，对角线 $AC \perp BD$，交点为 F，且 $OE \perp AB$，E 为垂足．我们来证明 $OE=\frac{1}{2}CD$（不失一般性）．

（1）用分析证法

作直径 AG，连结 BG（图2・8）．

∵　在 $\triangle ABG$ 中，OE 是两边的中位线，$OE=\frac{1}{2}BG$，

∴　要证 $OE=\frac{1}{2}CD$，只须证 $CD=BG$．

∵　CD、BG 分别对着圆周角 $\angle CBD$、$\angle GAB$．

∴　只须证 $\angle CBD=\angle GAB$．

∵　在 $\triangle ABG$ 与 $\triangle CFB$ 中，$\angle AGB=\angle FCB$

∴　只须证 $\angle ABG=\angle BFC$．

但　$\angle ABG=d$，只须证 $\angle BFC=d$，而这由已知 $AC \perp BD$ 保证了．

∴　$OE=\frac{1}{2}CD$ 成立．

同理可证其他情形．

（2）用综合证法．这只要把分析证法的证明过程倒过来叙述就可以了．其证明是：

作直径 AG，连结 BG．

∵ $AC \perp BD$，交点为 F，

∴ $\angle BFC = d$

∵ 在$\triangle ABG$与$\triangle CFB$中，

$\angle ABG = \angle BFC = d$

$\angle AGB = \angle ACB$

∴ $\angle GAB = \angle CBD$

∵ 等圆周角对等弦，

∴ $CD = BG$

又在$\triangle ABG$中，OE是两边的中位线，有 $OE = \frac{1}{2}BG$，

∴ $OE = \frac{1}{2}CD$

同理可证其他情形。

从上例看出，分析证法的证明过程，思路逆行，叙述冗长而不自然，实际上不常使用。但这种分析过程可以用来作为寻求证明思路的重要手段，帮助我们迅速地得出证明的线索，然后再用综合法论述，因为综合证法理路顺畅，简单明确。举例如下：

例 2 （Ptolemy定理）圆内接四边形对边乘积之和等于对角线的乘积。

证明 已知如图2·9，证明

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

分析 假设上式成立。在 BD 上存在点 E，使

$$AC \cdot BD = AC \cdot (BE + ED) = AC \cdot BE + AC \cdot ED$$

从而 $$AC \cdot BE + AC \cdot ED = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

因此，要使所求等式成立，只须有

$$AC \cdot BE = AB \cdot CD \text{ 或 } \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \qquad (1)$$

$$AC \cdot ED = AD \cdot BC \text{ 或 } \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} \qquad (2)$$

∵ 在$\triangle ABE$与$\triangle ACD$中，$\angle ABE = \angle ACD$，而（1）式

成比例的线段分别是夹这两角的两边。

∴ 要使（1）式成立，只须有

$\triangle ACD \backsim \triangle ABE$

这只要$\angle BAE = \angle CAD$（或另一对角相等）。

在BD上取点E，使$\angle BAE = \angle CAD$，就保证了$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$，从而（1）式成立。在此基础上再验证（2）式也成立就可以了。

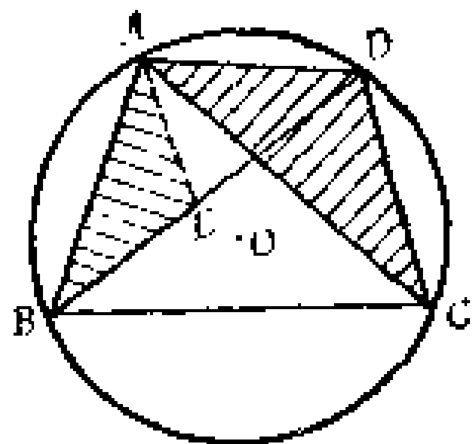


图2·9

∵ $\triangle ADE$与$\triangle ACB$中，

$\angle ADE = \angle ACB$

而（2）式成比例的线段分别是夹这两角的两边，

∴ 要使（2）式成立，只须有

$\triangle ADE \backsim \triangle ACB$

即只须有$\angle AED = \angle ABC$（或另一对对应角相等）。

实际上，$\angle AED = \angle BAE + \angle ABE$（外角定理）

$\angle ABC = \angle ABE + \angle DBC = \angle ABE + \angle DAC$

$= \angle ABE + \angle BAE$

∴ $\angle AED = \angle ABC$ 成立。

将这个分析过程倒过来叙述就是用综合法证明的过程：

在$\angle BAD$内作$\angle BAE = \angle CAD$，边AE与BD交于点E，E在BD内。

∵ $\angle ABC = \angle ABE + \angle DBC$

$\angle DBC = \angle DAC = \angle BAE$

∴ $\angle ABC = \angle ABE + \angle BAE = \angle AED$

∵ 在$\triangle ADE$与$\triangle ACB$中，

$\angle AED = \angle ABC$

$\angle ADE = \angle ACB$

∴ $\triangle ADE \backsim \triangle ACB$ （1）

∵ 在$\triangle ABE$与$\triangle ACD$中

$\angle ABE = \angle ACD$

$\angle BAE = \angle CAD$

∴ $\triangle ADE \backsim \triangle ACB$ （2）

根据（1）、（2）关系式可得

$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$，或 $AB \cdot CD = AC \cdot BE$ （3）

$\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$，或 $AD \cdot BC = AC \cdot ED$ （4）

将（3）、（4）等号两端相加，得

$AC \cdot BE + AC \cdot ED = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

即 $AC(BE + ED) = AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

5·2 解作图题中的分析

解作图题时，分析的过程是不可缺少的，因此有的教材把分析列为解作图题的一个步骤。作图题的分析和分析证法的思路基本相同，因此在这里顺便地讲一讲。

解作图题的分析，主要目的是确定存在于已知条件和未知条件之间的几何联系，从中得出作图的方法。一般作法是先画一个草图，假定它就是所作的图形（从未知出发），然后区分出其中的已知条件和未知条件，进而仔细分析它们之间的相互关系，分析那一部分可以作图及如何作图。分析必须保证所得出的作图方法能把问题所存在的解全部作出，往往因为分析时不全面，忽略了某些可能存在的情形，因此丢失了某些解。

下面的例3是一个基本作图，我们看一看解此题的分析步骤和解法的全过程。

例3 通过已知点作已知圆的切线。

已知 圆O和一点A。

求作 过点A与圆O相切的直线。

分析 已知A可能在圆外、圆上和圆内。

（1）设A在圆O外．假设图2．10是所求作的图形（草图），AT是所求的切线，T是切点．

本题作图的关键是确定切点T．连OT、OA，则$\angle OTA$是直角，因此以OA为直径的圆O'一定通过T点，即T是圆O和圆O'的交点．因为圆O是已知的，以定线段AO为直径的圆O'是可作的，所以T点是可作的，于是切线AT可以作图．

（2）设A在圆O上．连结OA，过A作OA的垂线为所求的切线．

（3）设A在圆内．过A的切线不存在．

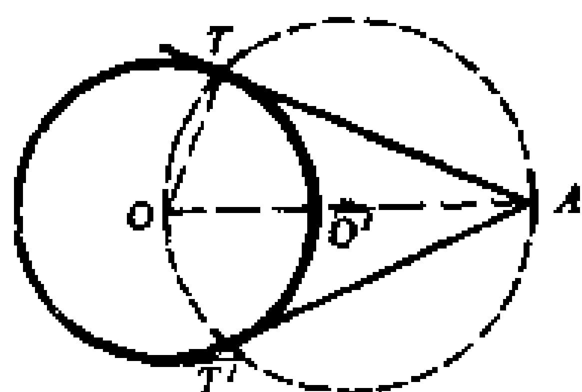


图2・10

作图　A在圆O外．

（i）连OA，作OA的中点O'；

（ii）以O'为圆心，$O'A$为半径作圆O'；

（iii）作圆O'与圆O的交点T和T'；

（iv）作直线AT和AT'即为所求的切线．

A在圆上时作法与分析相同．

证明　连结OT，则$\angle OTA$是直角，所以直线AT是圆O的切线．

同理可证AT'也是圆O的切线．

讨论　A在圆外有两解，A在圆上有一解，A在圆内无解．

例4　已知线段AB，把AB分成两部分，使较长线段为全线段和较短线段的比例中项．

本作图题一般叫做分线段成中外比，或叫做黄金分割．

分析　设$AB=a$，P为所求的分点，其中较长线段$AP=x$，则较短线段$PB=a-x$．根据题意可列出方程

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}，\quad 即\quad x^2+ax-a^2=0．$$

解方程得

$$x=\pm\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}$$

其中负根不合题意，所以

$$x=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}$$

设 $y=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$，可知 y 是以 a 和 $\frac{a}{2}$ 为两直角边的直角三角形的斜边，是可以作图的。而 $x=y-\frac{a}{2}$ 也是可以作图的。

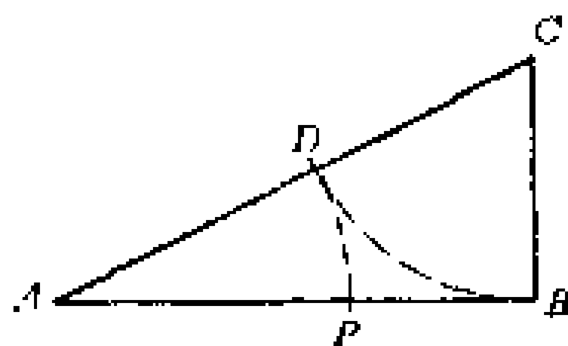


图2·11

作图 （i）作 $BC\perp AB$，且使 $AB=a$，$BC=\frac{a}{2}$，连结 AC（图2·11）。

（ii）以 C 为圆心，CB 为半径画弧，在 CA 上截出点 D。

（iii）以 A 为圆心，AD 为半径画弧，在 AB 上截出点 P，则 P 为所求作的点。

证明 ∵ $Rt\triangle ABC$ 的直角边分别为 a 和 $\frac{a}{2}$，

∴ $AC=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

∵ $CD=BC=\frac{a}{2}$

∴ $AP=AD=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}$

∵ $\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}$ 是方程

$$x^2+ax-a^2=0$$

的根，也就是

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$$

的根，$x=AP$，$PB=a-x$

$\therefore\quad \frac{AB}{AP}=\frac{AP}{PB}$，即点$P$符合题意。

本题总有一解。

§6 直接证法与间接证法

通过各种证法直接证明了待证命题成立，这种证法称为直接证法。从待证命题的等价命题出发，证明等价命题成立，从而间接地证明了待证命题，这种方法称为间接证法。由于采取等价命题的形式不同，间接证法又有“反证法”与“同一法”等。

6·1 反证法

反证法是从论题的题断反面出发，经过正确的推理，最后得出与论题的已知条件或公理或前此定理等相矛盾的结果。由于引用的论据和推理是正确的，这个矛盾的结果显然是由引用了题断的反面为出发点而造成的，因此题断反面是不正确的。根据排中律，两个互相否定的命题必有一真一假，因为题断反面不成立，所以题断必成立，于是论题间接地被证明了。这种证法实质上归结为证明逆否命题成立。

例如证明命题“若A，则B”，反证法的格式可以表示为：

非 $B\Rightarrow C\Rightarrow D\Rightarrow E$

而

$$E\text{与}\begin{cases}\text{前此公理}\\\text{前此定理}\\\text{题设 }A\\\text{结论反面}\end{cases}$$

之一相矛盾，因此非B不成立，结论B成立。

由于题断反面可能有一种情形和多种情形，反证法又有“归谬法”与“穷举法”之分。

例1 已知直线a平行于平面M，平面N经过a与平面M

相交于直线 b，则直线 a 平行于直线 b。

证明 假设 a 不平行于 b。

∵ a、b 共面，

∴ a、b 相交于 A 点（图2·12）。

∵ b 在平面 M 内，A 必在平面 M 内，

∴ a 与平面 M 相交于 A。

图2·12

这个结果与已知 a 平行于平面 M 相矛盾，因此 a、b 不相交，即 a 平行于 b。

从这个例子的证明中可以看出，实质上是证明了"若非 B，则非 A"，就是说证明了原命题的逆否命题。

当已知论题的题断反面不止一种情形时，那么就需要把它们逐一驳倒，才能肯定题断是正确的，这种反证法称为穷举法。下面就是这样的例子。

例2 若三角形有两个内角平分线相等，则两角的对边相等。

证明 已知 $\triangle ABC$，$\angle B$、$\angle C$ 的平分线分别为 BD，CE，且 $BD=CE$（图2·13）。

假设 $AB\neq AC$，则有 $AB>AC$ 或 $AB<AC$ 之一成立。

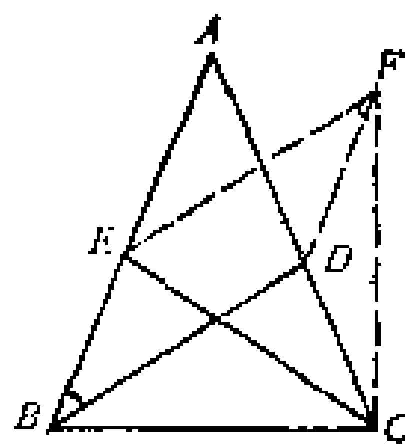


图2·13

（1）假设 $AB>AC$。

∵ $AB>AC$

∴ $\angle C>\angle B$

∵ $\angle EBD=\angle DBC$

$\angle ECD=\angle ECB$

∴ $\angle ECB>\angle DBC$　　　　（1）

∵ 在 $\triangle DBC$ 与 $\triangle EBC$ 中，

$BC=BC$，$CE=BD$，且（1）式成立，

$\therefore\quad EB>DC \qquad (2)$

作平行四边形 $BDFE$。

$\because\quad EF=BD=CE$，$\triangle ECF$ 是等腰的，

$\therefore\quad \angle ECF=\angle EFC \qquad (3)$

$\because\quad \angle EBD=\angle EFD$，$\angle EBD<\angle ECD$

$\therefore\quad \angle EFD<\angle ECD \qquad (4)$

由（3）、（4）式得

$$\angle ECF-\angle ECD<\angle EFC-\angle EFD$$

$\therefore\quad \angle DCF<\angle DFC \qquad (5)$

$\therefore$ 在$\triangle DCF$中，$DF<DC$。

$\because\quad EB=FD$，$FD<DC$

$\therefore\quad EB<DC \qquad (6)$

而（6）和（2）是相互矛盾的，因此$AB>AC$ 不可能。

（2）假设 $AB<AC$。

同理可证这也是不可能的。

$\because$ 1 和 2 两种情形都不可能，

$\therefore\quad AB=AC$

6·2 同一法

上面已经讲过命题的同一法则。根据这一法则，当待证命题满足同一法则时，原命题与它的逆命题等价，因此可以证明与它等价的逆命题，间接地达到证明的目的。这种证明方法称为同一法。

使用同一法时，先要考查一下待证命题是否满足同一法则，就是验证已知和求证中给出的图形，在特定的条件下都是唯一存在的，如果都是唯一存在的，就符合了同一法则，然后才可以使用同一法。

用同一法证明定理时已经形成了自己的特定格式，其步骤可以归纳如下：

第一步：另作出一个具有求证性质的图形；

第二步：证明新作的图形具有题设图形的条件；

第三步：根据唯一性，新作出的图形与原设图形重合；

第四步：重合图形具有共同的性质，于是判断出已知图形也具有求证的性质。

下面举例说明同一法的用法。

例 3　（勾股定理的逆定理）如果三角形三边长 a、b、c 满足条件 $a^2+b^2=c^2$，那么 c 边所对的角一定是直角。

分析　这个命题满足同一法则。因为三个边长满足$a^2+b^2=c^2$的三角形，当 a、b 确定后 c 被唯一确定，因而三角形被唯一确定（不考虑位置关系），而求证中两直角边为 a、b 的直角三角形也是唯一确定的。所以本题可用同一法证明。

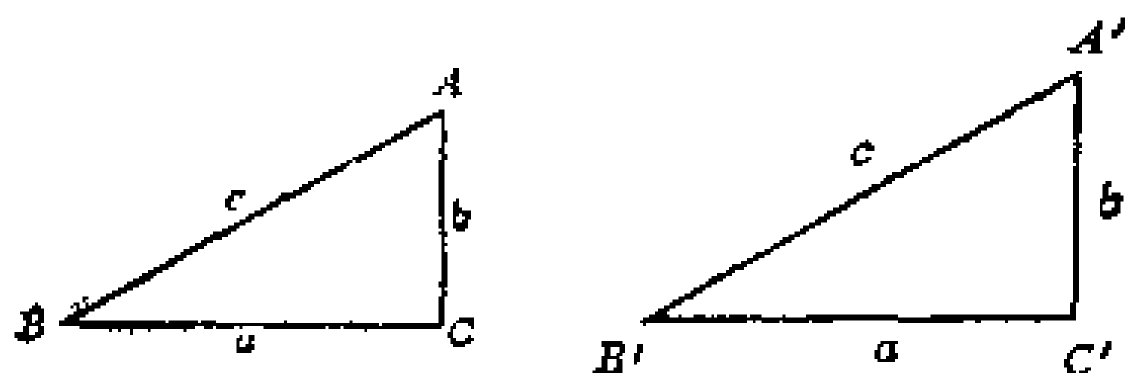


图 2・14

证明　设$\triangle ABC$的三边满足 $a^2+b^2=c^2$（图2・14），那么 $c=\sqrt{a^2+b^2}$。

作一直角$\triangle A'B'C'$，$\angle C'=\dfrac{\pi}{2}$，且$B'C'=a$，$A'C'=b$。根据勾股定理有

$$A'B'^2=a^2+b^2,\quad A'B'=\sqrt{a^2+b^2}=c$$

因为$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$ 三边对应相等，所以

$$\triangle A'B'C'\cong\triangle ABC,\quad \angle C=\angle C'=\frac{\pi}{2}$$

例 4　以正方形一边为底且在形内作一等腰三角形，底角等于 15°，求证将它的顶点与正方形另两个顶点连接，构成一个正三角形。

分析　这个命题满足同一法则，因为题设中以底角为15°

的等腰三角形的顶点与另两个顶点所构成的三角形是唯一的，而题断中给出的正三角形也是唯一存在的。因此可用同一法证明。

证明　已知正方形$ABCD$，E为内部一点，$\angle ECD=\angle BDC=15^{\circ}$（图2·15）。

在正方形内作正三角形 $E'AB$，连结$E'C$、$E'D$。

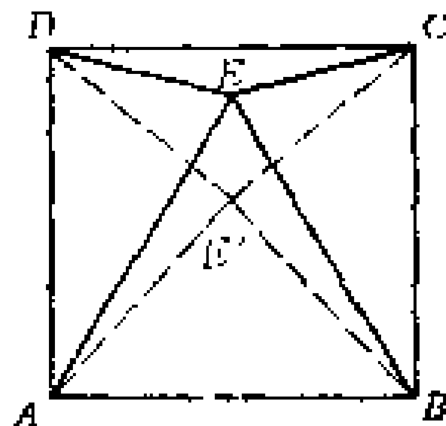


图2·15

$\because$　$BE'=BC$

$\therefore$　$\angle BCE'=\angle BE'C$

$\because$　$\angle CBE'=30^{\circ}$

$\therefore$　$\angle BE'C=\frac{1}{2}(180^{\circ}-\angle CBE')=75^{\circ}$

$\angle E'CD=90^{\circ}-\angle BCE'=15^{\circ}$

$\because$　$E'C$与EC在CD边的同侧，且

$\angle E'CD=\angle ECD=15^{\circ}$

$\therefore$　$E'C$与EC重合。

同理可证 $E'D$与ED重合。

因此，E与E'重合，$\triangle EAB$ 是正三角形。

§7　使用符号式进行逻辑论证的问题

符号是数学中必不可少和最精炼的语言，它可以使数学中冗长的语言陈述句变为简洁、清晰、一目了然的符号句，也可以使繁杂的数学问题化为几个符号式，从而以简炼的方式表达概念、运算以及逻辑推理等等。

用综合法建立的初等几何学，很早就引用了一些符号来代表点、直线、平面、角、平行、垂直等等，但仅仅引用了最低限度的符号，许多问题主要还是靠语言来表达，特别在逻辑论证方面有时要通过很长的叙述才能完成一个定理的证明。这种

情况对学习几何的人来说，可以训练语言的表达能力和逻辑思维能力，但也给初学者在阅读、理解和作习题等方面造成一定的困难。近年来有人试图对初等几何加以革新，改革的方面之一是扩大符号的使用范围，试图使用符号式进行逻辑论证等，取得了一定的成效。在初等几何中全面使用符号式进行逻辑推理等问题，目前仍在摸索中，看法和作法还不统一，应当不断改进使它完善和统一起来。

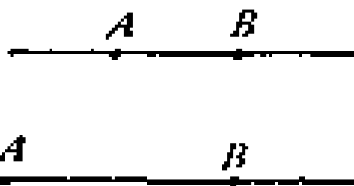
下面以中学教材提出的符号和用法为基础并适当地作些补充，谈谈在初等几何中扩大使用符号的有关问题，供读者参考。

7·1 初等几何中常用的符号和意义

引进符号的原则应和过去惯用的符号以及数学其他分支使用的符号一致，这样才能使符号统一，又为今后进一步学习其他数学学科奠定基础。

下面列出的第一表是过去惯用的符号，也是现行中学几何教材中使用的符号。第二表是新扩大进来的属于集合论和逻辑的符号，可以补充原来的不足。这些符号的引入是否适合，有待于进一步研究。

表一

符号	意义	举例
A、B、C……	点	点 A
a、b、c……	直线	直线 a
AB	线段	线段 AB
(AB)	直线	直线 AB 
$[AB)$	射线	射线 AB
α、β、γ……	平面	平面 α

续表

符　　号	意　　义	举　　例
∠	角	∠ABC，∠A，∠(a，b)
α—a—β α—AB—β M—a—N	二面角	
△	三角形	△ABC
▱	平行四边形	▱ABCD
⊙	圆	⊙O（以O为中心）
⌒	弧	$\overset{\frown}{AB}$ 弧AB
O(R)	以O为中心，以R为半径的圆	
Rt	直角	Rt∠，直角 Rt△ABC，直角三角形ABC
=	相等	AB＝CD
≡	重合	A≡B，a≡b
≌	全等	△ABC≌△A′B′C′
∽	相似	△ABC∽△A′B′C′
π	圆周率	
d	90°角	

续表

符　　号	意　　义	举　　例
//	平行	$a//b$，$a//\alpha$，$a//\beta$
⊥	垂直	$a\perp b$，$a\perp\alpha$，$a\perp\beta$
⇒	推出（蕴涵）	$A\Rightarrow B$，由A推出B（A、B为判断）
⇔	互相推出，等价于	$A\Leftrightarrow B$　A、B互推（A、B为判断）
λ	异面	$a\lambda b$，a与b异面
×	相交	$a\times b=A$，a、b相交于A点
S	面积	S_{ABC}，三角形面积
V	体积	$V_{四面体}$，四面体体积
C	周长	C_{ABC}，三角形ABC周长
$A\overline{B}C$	B在A、C之间	A　B　C

下面这些集合论中的符号和逻辑符号可以引进初等几何中来：

表二

符　　号	意　　义	举　　例
∈	指点和直线、平面的"属于"或"结合"关系	$p\in a$，点p在直线a上 $p\overline{\in}a$，点p不在直线a上 A、$B\in\alpha$，点A、B在平面α上
∋		$a\ni p$，直线a通过点p $a\overline{\ni}p$，直线a不通过点p

续表

符号	意义	举例
$\subset$	一般图形间的包含关系或结合关系	$a\subset\alpha$，直线a在平面α内 $a\not\subset\alpha$ 直线a不在平面α内 $AB\subset a$，线段AB在直线a内 $\odot o\subset\alpha$，圆o在平面α内
$\supset$		$\alpha\supset a$ 平面α通过直线a $\alpha\not\supset a$，平面α不通过直线a
$\cup$	若干图形的并（同时属于这些图形的点集）	$\odot o_1\cup\odot o_2$
$\cap$	若干图形的交（这些图形的公共点集合）	$\odot o_1\cap\odot o_2$ $\alpha\cap\beta=a$ 平面α与平面β交于直线a
$\{A、B、\cdots、C\}$	以点$A,B,\cdots,C$组成的集合	$\odot o_1\cap\odot o_2=\{A、B\}$，两圆相交于$A$、$B$点 $\odot o_1\cap\odot o_2=\{A\}$，两圆相切于$A$点
ϕ	空集	$\odot o_1\cap\odot o_2=\phi$，两圆相离
$\|AB\|$	A、B的距离	
$\overline{AB}$	有向线段AB	
$\exists$	存在	$\exists A$，存在一点A
$\exists!$	存在唯一的	$\exists! a$，存在唯一直线a
$\forall$	所有（任意）	$\forall X\in a$，直线a上所有点X，或直线a上任意点X

续表

符号	意义	举例
$\vee$	或者	$A\vee B$，A或者B
$\wedge$	与（和）	$A\wedge B$，A与B或A和B
$F=\{X\mid X\in A.\ P(x)\}$	表示使条件$p(X)$成立的所有属于集合A的点X的轨迹（集合）	$\{X\mid X\in\alpha, \mid XO\mid=r\}$表示平面$\alpha$上到定点$o$有定距离$r$的X点的轨迹 $F=\{X\mid X\in\alpha,\ \mid XA\mid=\mid XB\mid\}$表示平面$\alpha$上到定点$A$、$B$有等距离的点$X$的轨迹$F$

此外还有运算中的÷、－、·、$\frac{AB}{CD}$、>、<，一般的数学符号在几何中也是经常应用的。

7·2　普通语句与符号句（符号式）

引进符号以后，进一步的问题是如何使用符号句表示普通语句的问题，或者说双方互译的问题。这是全面利用符号进行逻辑证明等过程中的必要步骤，这方面应有一些模式，需要在实践中不断归纳总结出来。下面提出一些例子和看法。

常用的语句译成符号句：

1. 取线段AB的中点C。可用符号表示为：

$C\mid \overline{ACB},\ AC=CB$。或$C\mid C\in AB\wedge(AC=CB)$。

符号“$C\mid$”表示取点C，且满足“$\mid$”后面的条件。

2. 延长AB到点C，使$AB=BC$。

$C\mid \overline{ABC},\ AB=BC$。或$C\mid \overline{ABC}\wedge(AB=BC)$。

3. 连结直线AB与已知直线CD交于点M。

$(AB)\ni A\quad B,\ (AB)\cap(CD)\equiv M$

或　$AB\supset A\wedge B,\ AB\times CD\equiv M$

4．过点A引直线a的平行直线b．

$b|b\ni A$，$b\parallel a$．或 $b|(b\ni A)\wedge(b\parallel a)$

5．作$\angle AOB$的平分线OC．

$(OC)|OC\subset\angle AOB$，$\angle AOC=\angle BOC$

6．直线l与直线m为异面直线的充要条件是l与m不相交且不平行．

$l\lambda m\Longleftrightarrow(l\cap m=\phi)\wedge(l\nparallel m)$

7．$\angle AOB$与$\overset{\frown}{AB}$的度数相等．

$\angle AOB\overset{m}{=}\overset{\frown}{AB}$

7·3　用符号式进行逻辑证明

证明是通过一个或几个推理来完成，这些推理之间有逻辑连贯性，前一个推理的结论，一般地是后一推理的前提，直到推出待证命题的正确性．用符号式证明定理时，主要应简单明确地体现出上述的关系，使用一次“⇒”表示一次推理，而且前提、结论一目了然，前后推理紧密相接，尽量减少不必要的重复，使符号尽可能简单化又能清楚地表示出证明的过程．

下面举例说明证明的表达方式：

例 1　角平分线上的点到这个角两边的距离相等．

证明　OC是$\angle AOB$的平分线，点P在OC上，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，D、E是垂足（图2·16）．

∵　$PD\perp OA$，$PE\perp OB$

∴　$\angle PDO=\angle PEO=Rt\angle$．

∵　在$\triangle PDO$和$\triangle PEO$中，

$\angle PDO=\angle PEO$，

$\angle AOC=\angle BOC$，$OP=OP$

∴　$\triangle PDO\cong\triangle PEO$，

∴　$PD=PE$．

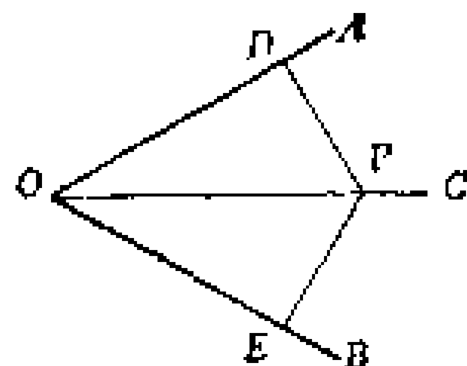


图2·16

用符号式来证，可写成：

$$\left.\begin{array}{l}\angle PDO=\angle PEO=Rt\angle\\ \quad OP=OP\\ \angle AOC=\angle BOC\end{array}\right\}\Rightarrow \underset{(A.A.S)}{\triangle PDO\cong\triangle PEO}\Rightarrow PD=PE.$$

“}”左端是已知条件，经过两个推理，得出求证的结论，其中前一个推理的结论是后一个推理的前提。得出结论的根据可以写在相应符号式下面，并且用圆括号括起来，如$(A.A.S)$，也可以不写出。

例 2　若圆内接凸四边形的对角线互相垂直，则圆心到任意一边的距离等于该边的对边的一半。

证明　本例是§5例1，那里已有普通的证明。现在用符号式证明如下：

$$\left.\begin{array}{l}AO\cap\odot O=G\left\{\begin{array}{l}\angle ABG=Rt\angle\\ \angle AGB=\angle ADB\end{array}\right.\\ \qquad\qquad\quad \angle AFD=Rt\angle\end{array}\right\}\Rightarrow\angle CAD=\angle GAB\Rightarrow ①$$

$$\left.\begin{array}{l}\qquad\qquad ①\Rightarrow \underset{(\text{等圆周角对等弦})}{CD=BG}\\ \left.\begin{array}{l}\triangle ABG\\ AO=OG\\ AE=EB\end{array}\right\}\Rightarrow \underset{(\text{中位线定理})}{OE=\frac{1}{2}BG}\end{array}\right\}\Rightarrow OE=\frac{1}{2}CD$$

例 3　如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在任何一条与平行线相交的直线上截得的线段也相等。

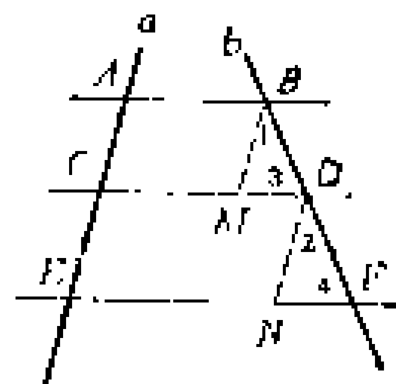


图2·17

证明　已知如图2·17. $AB\parallel CD\parallel EF$，$AC=CE$。求证 $BD=DF$。

$$\left.\begin{array}{l}(BM\parallel a)\wedge(M\in CD)\\ (DN\parallel a)\wedge(N\in EF)\end{array}\right\}\Rightarrow BM\parallel DN\Rightarrow\angle 1=\angle 2$$

$$CD\parallel EF\Rightarrow\angle 3=\angle 4,$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AB \parallel CM\\ AC \parallel BM\end{array}\right\}\Rightarrow AC = BM\\ \left.\begin{array}{l}CD \parallel EN\\ CE \parallel DN\end{array}\right\}\Rightarrow CE = DN\\ \qquad\qquad\qquad AC = CE\end{array}\right\}\Rightarrow BM = DN$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle 1 = \angle 2\\ \angle 3 = \angle 4\\ BM = DN\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle BMD \cong \triangle DNF \Rightarrow BD = DF.$$

这个证明过程由八个推理组成，不像前几个例子那样，前一个推理的结论是后一个推理的前提，可以一个推理连着下一个推理一直推到最后。而这个证明分成几个并列的符号式，前三个分别独立的推出各自的结论，为最后一个符号式准备了前提。另最后一个符号式也可以不单独列出，只要把前三个符号式的最后，直接用“}”联系起来就可推出 $\triangle BMD \cong \triangle DNF$，从而得出求证的结果。

习　　题

§ 1—§ 2

1．指出下列各组概念的种属关系：

（1）正方形和正多边形；

（2）等式和方程；

（3）整数和有理数；

（4）弦和直径。

2．菱形有哪些种概念？其中哪一个是最邻近的种？

3．在下列各概念中指出最邻近的种以及属差：

（1）直径；

（2）弦；

（3）线段；

（4）直角梯形．

4．用多种方法给椭圆下定义．

5．下面的定义是否正确，为什么？

（1）对角线互相垂直的四边形叫做菱形．

（2）对角线互相垂直且平分的四边形叫做菱形．

（3）对角线互相垂直且相等的平行四边形叫做菱形．

（4）对角线互相垂直且相等的四边形叫做菱形．

6．试论几何命题的变化和等价性．

7．将“对顶角相等”写出四种命题形式，并判断其真实性．

8．写出“三角形两边之和大于第三边”的逆命题．

9．写出定理“在一圆中，弦的中垂线必通过圆心”的所有逆命题，并指出这些逆命题中哪些是已知定理的逆定理．

10．试证H是$\triangle ABC$的垂心的充分条件是：

$$HA^2+BC^2=HB^2+CA^2=HC^2+AB^2$$

§3—§6

11．把下列各推理恢复为完全的三段论式：

（1）因为这等式在其所含的文字取任何数值时均成立，所以它是一个恒等式．

（2）因为这两个数的最大公约数是1，所以它们互质．

（3）因为这两个角是圆内接四边形的一组对角，所以它们的和等于π．

12．枚举法与穷举法相同吗？为什么？

13．用完全归纳证法证明下列各题：

（1）设$\odot O$与$\odot O'$交于P、Q两点，过Q任作一直线交两圆于A与B，则$\angle APB=\angle OPO'$．

（2）在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$于D，M是BC边的中点，设$\angle ABC=2\angle ACB$，则 $DM=\frac{1}{2}AB$．

（3）若两圆相外切，过切点的两条直线分别与两圆相

交，则连结交点的弦必互相平行.

14. 用数学归纳法证明下列各题：

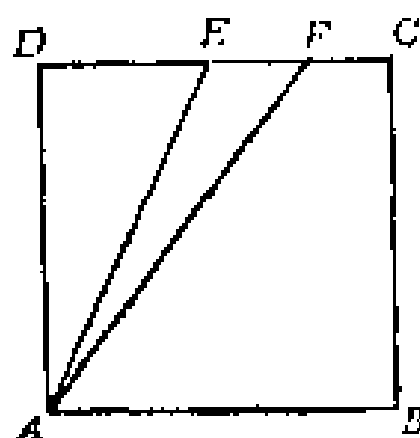
（1）凸n边形共有$\frac{1}{2}n(n-3)$条对角线($n\geqslant4$).

（2）共底的两个凸多边形，如果有一形在另一形内部，则内形周长必小于外形周长.

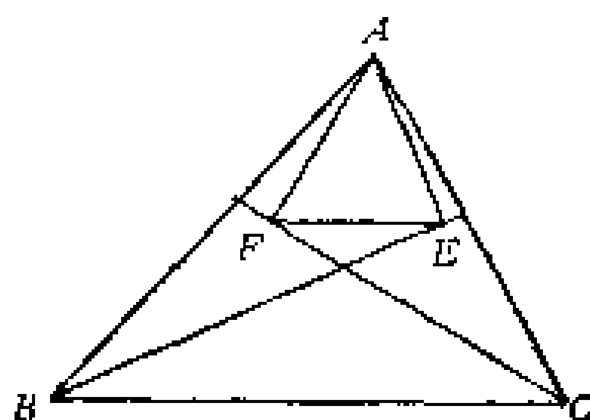
15. 同时用分析法和综合法证明下列各题：

（1）设E是正方形$ABCD$中CD边的中点，F是线段CE的中点，则$\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAF$.

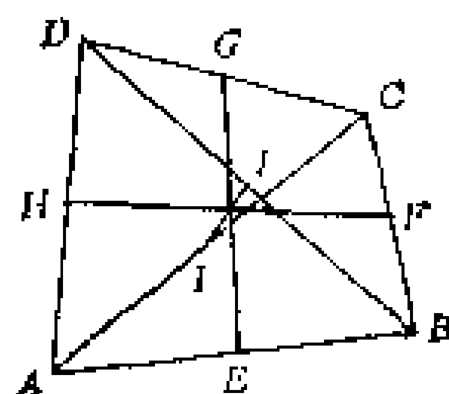
（2）自$\triangle ABC$的顶点A向$\angle B$、$\angle C$的平分线BE、CF引垂线，垂足分别为E、F，则E、F的连线必平行于BC边.



（1）



（2）



（3）

（15题）

（3）在四边形$ABCD$中，E、F、G、H分别是边AB、BC、CD、DA的中点，I、J分别是对角线AC、BD的中点，求证EG、FH、IJ三线共点.

16. 用间接证法证明下列各题：

（1）若四边形中有一组对边中点的连线等于另一组对边的和的一半，则另一组对边必互相平行.

（2）如果三个圆两两相交，则所得的三条公共弦（所在直线）或共点，或互相平行.

（3）若四边形对角之和为二直角，则此四边形必可以外接于一圆.

第三章　用公理法建立几何学结构的范例

本章将在前两章的基础上，具体用公理法来建立欧几里得和罗巴切夫斯基几何学结构，进一步了解公理法的原理、方法；了解两种几何的基本内容、特点和逻辑相关性．最后讲一讲公理系统的基本问题．

§1　绝对平面几何学的结构

绝对平面几何学的原始对象是同一平面上的“点”和“直线”．我们用大写拉丁字母 A、B、C、… 表示点；用小写字母a、b、c、…，或直线 AB、直线CD、……表示直线．

点与直线之间存在着结合关系、顺序关系、运动关系等．点与直线的这些关系满足下列四组共计16条公理：

结合公理 I_{1-3}；

顺序公理 II_{1-5}；

运动公理 III_{1-6}；

连续公理 IV_{1-2}．

1·1　结合公理及其推论

点与直线的结合关系也叫属于关系，通常叙述为“点在直线上”，“直线通过点”等等．点与直线的结合关系满足：

公理 I_1　对于任意两个点，存在且只存在一条直线通过这两个点．

公理 I_2　在每条直线上，至少存在两个点．

公理 I_3　至少存在三个点，不在同一直线上。

注意，对空间几何学还需要增加下述公理：

公理 I_4　对于任意三个不在同一直线上的点，存在通过这三点的平面，而且只存在一个。

公理 I_5　任意一个平面上至少有一个点。

公理 I_6　如果一直线的两个点在一个平面上，则直线上的任何一点都在这平面上。

公理 I_7　如果两个平面有一个公共点，则它们至少还有第二个公共点。

公理 I_8　至少存在四个点不在一个平面上。

定义　如果直线通过两个点，则说两点连结直线。两条直线通过同一个点，叫做两条直线相交于这个点。

定理1·1　两条直线最多交于一个点。

证明　假设两条直线除一个交点A外还有第二个交点B，则有两条直线通过两点A、B，这与公理I_1矛盾。所以两条直线最多交于一个点。

只利用公理I_{1-3}所能推出的几何定理是很少的，例如推不出平面上的点和直线是无限多等等，必须引进新的公理。

1·2　顺序公理及其推论

点和直线的顺序关系也叫做介于关系。通常叙述为"在…之间"或"介于…之间"。

介于关系满足下列五条公理：

公理 II_1　如果点B介于A和C之间，则A、B、C是同一直线上的不同点，并且点B也介于点C和A之间。

公理 II_2　在一条直线上的任意三点中，有且只有一点在另两点之间。

公理 II_3　如果A和B是直线上两点，则在这条直线上存在无限多个点介于点A和B之间，也存在无限多个点使B介于其中任一点和点A之间。

公理I_4 一条直线上的任意点O，把它上面其余点分为两类，使点O介于不同类的任意两点之间，而不介于同类的任何两点之间.

定义 两点A、B与介于这两点之间的所有点的集合，叫做**线段**AB. 点A和B叫做线段的**端点**. 端点之间的点都叫做线段的**内点**，或线段上的点；而平面上其余的点都叫做线段的**外点**.

公理I_5 平面上任意直线a，把平面上其余的点分为两类，使不同类的任意两点确定的线段都与直线a相交，而同类的任何两点确定的线段都与直线a不相交.

公理I_5也叫**直线划分平面公理**.

在结合公理的基础上，顺序公理主要是解决：直线上点的位置关系，平面上点的位置关系，以及平面上通过一点的射线的位置关系.

1．直线上点的位置关系

直线上点的位置问题，主要是解决点将直线划分为线段、射线，从而引进内点、外点、同侧、异侧、延线等概念；以及建立点的顺序关系等.

定义 直线被某一点O分为两类（公理I_4），每一类和点O构成的集合都叫做**射线**或**半线**. 点O叫做**射线的端点**. 点O为端点的两条射线，每一条叫做另一条的**延线**. 如果点A和B属于同一射线，则说点A和B在点O的**同侧**. 如果点A和B属于不同的射线，则说点A和B在点O的**异侧**.

为了证明定理 1.3，首先证明下面关于四点位置关系的定理.

定理1·2 如果点C在线段AD上，点B在线段AC上，则点C在线段BD上，点B在线段AD上.

证明 因为点C介于点A和D之间，（图 3·1）根据公理I_4，点C分直线AD为两条射线，A、D在两条不同的射线

上，所以A、D在点C的异侧。

因为点 B 介于点 A 和 C 之间，根据公理 Ⅱ$_2$，则点 C 不在 A、B 之间，所以A、B在C的同侧。



图 3.1

因此，点B和D在点C的异侧，即点C介于B、D之间，于是点C在线段BD上。

因为点C介于点B和D之间，即点B不在点C和D之间，根据公理Ⅱ$_4$，C、D在点B的同侧。又已知点B介于A和C之间，则点A和C在点B的异侧，所以点A和D在点B的异侧。因此，点B介于A、D之间，即点B在线段AD上。

定义 如果一个点集合中的任意两点都规定了前后顺序，并且满足传递条件：当集合中任意三点A、B、C，点A在点B的前面，点B在点C的前面，则点A在点C的前面。就说这个点集合是**有序的集合**。

定理1.3 直线上的点是有序的。

我们先规定直线上点的前后关系。设一条直线被定点O分为两条射线，把其中之一叫做第一条，另一条叫做第二条。我们规定，如果直线上任意两点A、B，满足下面条件之一，则说点A在B的前面，或说点B在A的后面（图3.2）。

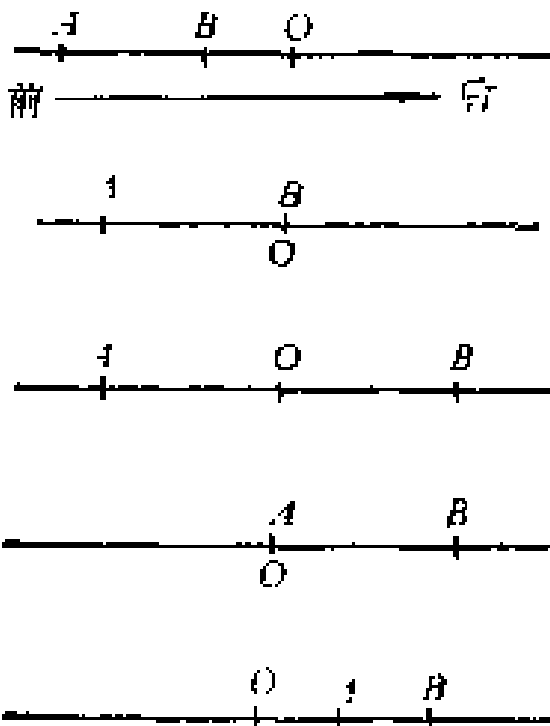
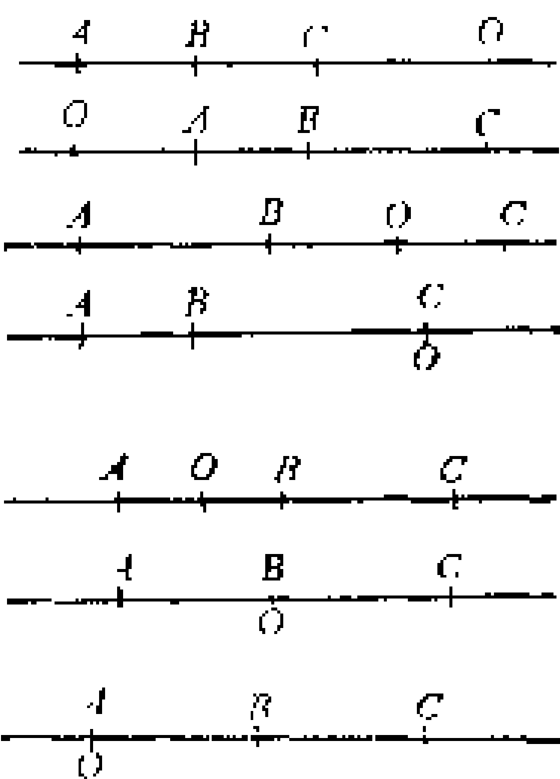


图3.2


图3.3

（1）点A属于第一条，而点B在A、O之间；

（2）点A属于第一条，而点B与点O相同；

（3）点A属于第一条，而点B属于第二条；

（4）点A与点O相同，而点B属于第二条；

（5）点A属于第二条，又在点O、B之间。

其次证明规定的前后关系满足传递性．已知点A在B的前面，B在C的前面，求证A在C的前面。

根据已知条件，点A、B、C只能有下面四种情况（图3.3）．我们用枚举归纳法证明如下：

（i）点A、B、C都在同一射线上。

假设都在第一条射线上，因为点A在B的前面，点B在C的前面，即点B介于A、O之间，点C介于点B、O之间。根据定理1.2，则点C介于A、O之间，所以点A在点C的前面。

同理可证点A、B、C都在第二条射线上的情形。

（ii）点A、B在第一条射线上，点C在第二条射线上，或与点O相同。按顺序规定，显然点A在C的前面。

（iii）点A在第一条射线上，点B在第二条射线上或与点O相同，而点C在第二条射线上。证法与（ii）相同。

（iv）点A与点O相同，点B和C在第二条射线上。显然点A在C的前面。

关于点A、B、C的位置，除上面四种情况外，其它假设都与顺序规定（1）—（5）矛盾．传递性得证。

如果把上述的第一条射线叫做第二条，第二条叫做第一条，这时规定的顺序和原来的相反。

根据公理I_2，直线上任意两点之间至少存在一个点，所以直线上的点是稠密的．又由定理1.3知道它们又是有序的。

定义 规定了点的顺序的直线叫做有向直线．方向是由前点指向后点（由前向后）．

2　平面上点的位置关系

平面上点的位置关系，主要是解决直线或图形将平面划分成凸、凹区域，以及与区域有关的同侧与异侧、内部与外部等位置关系.

定义 任意有限个点，或者是无限个点的集合叫做面形. 平面几何的研究对象是平面图形.

定义 依次连结有限个点 A、B、C…、L、M、N 的线段 AB、BC、CD、…、LM、MN的全体叫做折线，用符号 $ABCD\cdots LMN$ 表示. 点A和N叫做折线的端点，点 B、C、…、M 叫做折线的顶点，各线段叫做折线的边.

一条线段可以看作是最简单的折线.

定义 如果某图形F将平面上不属于F的所有点分成两类，使同类的任意两点能够用与图形F没有公共点的折线相连结，不同类的任意两点不能用这样的折线相连结，就说图形F把平面分成两个区域(图3.4).如果某个区域的任何两点都能用与图形F没有公共点的一个线段连结，则这个区域叫做凸区域，否则就叫做凹区域.

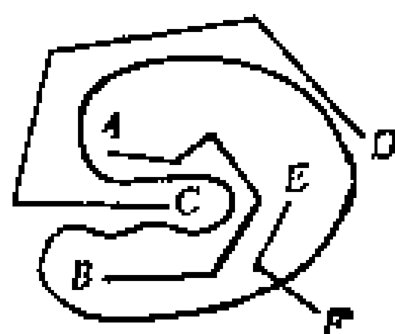


图 3·4

根据公理Ⅱ5与区域的定义，我们立刻推出下面的定理.

定理1.4 平面上的每条直线都把平面分成两个凸区域.

定义 直线将平面分成两个区域，每一个都叫做以直线为界的半平面. 如果两点在同一个半平面上，就说它们在直线的同侧，如果两点在不同的半平面上，就说它们在直线的异侧.

定理1.5 两条相交的直线把平面分成四个凸区域.

定义 有公共端点O，但不属于同一直线的两条射线OA、OB（或射线h、k）叫做角，用$\angle AOB$或$\angle(h、k)$表示. 射线OA、OB（或 h、k）叫做角的边；点O叫做角的顶点.

定理1.6 角把平面分成两个区域，其中一个是凸区域，

另一个是凹区域。

证明 设角的两边为h、k，顶点为O（图3．5）。我们来证明$\angle(h,k)$把平面分成一个凸区域和一个凹区域。

令射线h、k的延线分别为h_1、k_1，hh_1所在直线分平面为η、η_1两个半平面，kk_1所在直线分平面为λ、λ_1两个半平面。

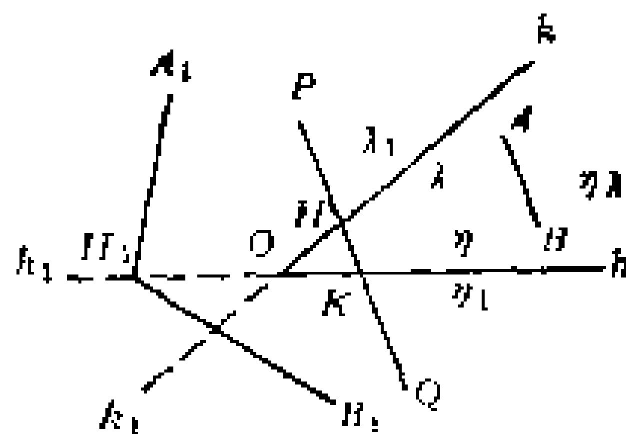


图3·5

hh_1、kk_1二直线把平面上不属于角的所有点分成两类。即

Ⅰ：同时属于η和λ的点为第一类，即η和λ的公共部分，用$\eta\lambda$表示；

Ⅱ：所有其余的点为第二类，即η_1与λ_1所有的点，用$\eta_1 U\lambda_1$表示。

（1）证明这两类点是不同的区域。

同一类的任意两点可用与角不相交的折线连结：

若A、B是属于Ⅰ类$\eta\lambda$的任意两点。

因为A、B同时属于η又同时属于λ，面半平面η和λ是凸区域，所以连结A、B的线段AB必不与两条界线hh_1和kk_1相交，所以AB不与角相交。

若A_1、B_1是属于Ⅱ类$\eta_1 U\lambda_1$的任意两点。

在射线h_1上任取点H_1，则H_1属于半平面λ_1。因为A_1H_1与h_1相交，所以不能再与半线h相交。又A_1可能属于η_1或λ_1，若A_1属于λ_1，则A_1、H_1同属于λ_1，A_1H_1不能与k相交；若A_1属于η_1，线段A_1H_1除H_1外的所有点都属于η_1，面射线k除O外所有点都属于η，所以A_1H_1不能与k相交。同理，线段B_1H_1不能与h相交。因此，A_1、B_1可以用与角不相交的折线$A_1H_1B_1$连结。

不同类的任意两点不能用与角不相交的折线连结：

取A和A_1分别是Ⅰ类和Ⅱ类中的任意点。如果存在与角不相交的折线连结A、A_1，则A和A_1必在同一类中，这与取法矛盾。

（2）证明区域$\eta\lambda$是凸的，$\eta_1U\lambda_1$是凹的。

区域$\eta\lambda$是凸的，开头已证明。

设H、K分别是射线h、k上的一点，P、Q是线段HK两端延线上的点，显然P、Q是区域$\eta_1U\lambda_1$的点，即P、Q不能用与角不相交的一条线段连结，所以$\eta_1U\lambda_1$是凹区域。

定义 角把平面分成的两个区域中，凸区域叫做**角的内部**，凹区域叫做**角的外部**。

定义 不共线的三个点与其中每两点为端点的三条线段所构成的图形叫做**三角形**。三个点叫做**顶点**，三条线段叫做**边**。以三角形顶点为端点，两边所在射线所构成的角，叫做**三角形的内角**；边与邻边延线构成的角，叫做**三角形的外角**。不通过顶点的边叫做该顶点的**对边**。顶点为A、B、C的三角形用$\triangle ABC$表示。

仿照前定理的证法可推出：

定理1．7 三角形把平面分成凸的和凹的两个区域。

定义 三角形把平面分成的凸区域叫做**三角形的内部**；把平面分成的凹区域叫做**三角形的外部**。

定理1．7可以推广到凸多边形的情形。

定义 两端点相同的折线$ABC\cdots LA$（封闭折线）所构成的图形叫做**多边形**。点A、B、$C\cdots$叫做**多边形的顶点**，线段AB、BC、$\cdots$、LA叫做**多边形的边**。连结不相邻顶点的线段叫做**对角线**。

定义 如果一个多边形的顶点各个不同，它的任一边内不含有顶点，而且它的任意两边没有公共的内点，则这样的多边形叫做**简单多边形**。

对于简单多边形希尔伯特曾证明如下的有名定理：

定理1.8 简单多边形把平面分成两个区域，其中一个区域存在整个直线，而另一个区域不存在整个直线。

定义 简单多边形分平面所成的两个区域中，不包含整个直线的区域，叫做该多边形的**内部**，而另一个区域叫做该多边形的**外部**。如果内部区域是凸的，这个多边形叫做**凸多边形**；否则叫做**凹多边形**。

根据以上的事实，可以推出下面的三角形与直线相交的重要定理。

定理1.9 （帕士命题）如果不通过三角形顶点的直线和三角形一边相交，那么它必与且仅与另两边之一相交。

证明 已知△ABC，直线a不通过顶点A、B、C，且与一边AC相交。

因为直线a与AC边相交，根据定理1.4，点A、C在直线a的异侧。因为点B不在直线a上，点B的位置有两种可能，点B和A在直线a的同侧，或点B和A在直线a的异侧。若点B和A在直线a的同侧，则点B和C必在直线a的异侧，所以直线a与BC边相交但不与BA边相交。若点B和A在直线a的异侧，则点B和C在直线a的同侧，所以直线a与AB边相交，但不与BC边相交。

这个定理在希尔伯特所著的《几何基础》里，被列为顺序公理之一来代替平面划分公理 II_5，而公理 II_5 只是它的一个推论被列为定理。

定理1.10 如果一条直线通过三角形一个顶点和三角形内部一点，那么这条直线必与对边相交。

3 平面上过一点射线的位置关系

利用直线上点的顺序关系，可以建立以一个角的顶点为端点且在角内部的所有射线的顺序关系。

已知∠AOB，根据定理1.10，以O点为端点且在角内部的所有射线都与端点在边上的线段AB相交；反过来，线段AB

上每一个内点都唯一的决定一条以O为端点且在角内部的射线。这样，以O点为端点且在角内部的射线与线段AB上的点建立了一一对应关系。

根据定理1.3，线段AB上的点C、D、E、…，可以建立前后顺序。我们规定：若点C在D的前面，点D在E的前面，就说射线OC在射线OD的前面，射线OD在射线OE的前面。这样，所有射线都可以规定前后顺序，并且满足传递性(图3.6)。

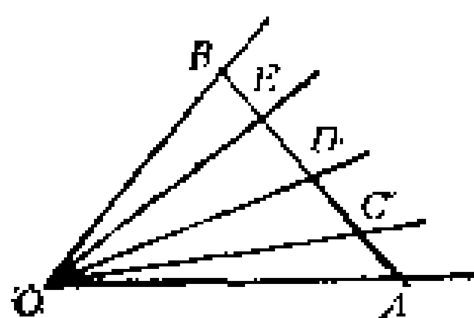


图3·6

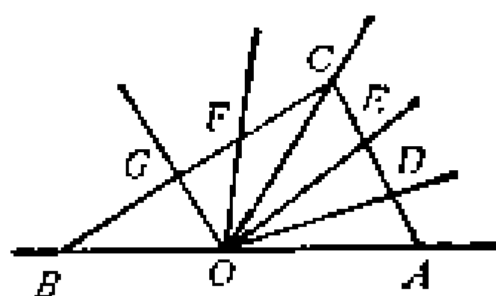


图3·7

利用角内射线的顺序，可以将半平面上且以界线AB上一点O为端点的所有射线建立前后顺序（图3.7）。

1·3　运动公理及其推论

几何图形之间存在着运动关系，也叫做叠合关系。

运动关系通常叙述为“…变为…”或“…与…叠合”

平面上的运动关系满足下列六条公理：

公理II_1　运动把点变为点，把直线变为直线，并且保持结合关系和顺序关系。

这就是说，对于点A和运动Γ必有对应点A'，使点A变为A'；对于直线a和运动Γ必有对应直线a'，使a变为a'。若点A在直线a上，运动后A'必在直线a'上，即保持结合关系。若点A、B、C在直线a上，且点B在A、C之间，运动后A'、B'、C'必在直线a'上，且保持点B'在A'、C'之间，即保持介于关系。因此，我们可以推出：

定理1.11　运动把线段、射线、半平面仍然变为线段、射

线、半平面。

公理Ⅱ$_2$ 存在这样的运动，把每一个点，每一条直线变为本身。

定义 把每个点和每一直线变为本身的特殊运动叫做**恒等运动**。

定义 如果运动Γ_1把任一点M变为点M'，运动Γ_2又把点M'变为点M''，这两个运动依次进行的结果就把每个点M变为点M''，这两个运动依次进行的结果叫做**两个运动的积**，记作$\Gamma_2\Gamma_1$。

公理Ⅱ$_3$ 任意两个运动的乘积是运动。对于每个运动必存在另一个运动，使这两个运动的积是恒等运动。

公理后半部分是说，运动Γ把点M变为点M'，而运动Γ^{-1}又把点M'变回到点M，运动Γ与Γ^{-1}的积$\Gamma^{-1}\Gamma$是恒等运动，称Γ^{-1}为Γ的逆运动。

公理Ⅱ$_2$和Ⅱ$_3$ 说明平面上全部运动构成群（变换群的概念在第四章讲）。

公理Ⅱ$_4$ 如果运动把某条射线和它的端点变为本身，则射线上的每一点都变为本身。

公理Ⅱ$_5$ 如果A、B、C是某一图形中不在同一直线上的三点，则存在唯一一个运动，使图形按下面的方式变为另一图形：

（1）点A变为已知点A'；

（2）点B变为以A'为端点的已知射线h'上的某一点B'，即射线AB变为射线$A'B'$；

（3）点C变为射线h'已知一侧的某一点C'。

公理Ⅱ$_6$ 存在运动把线段AB变为BA；也存在运动把$\angle AOB$变为$\angle BOA$。

就是说，存在把线段和角翻转而叠合的运动。

有的书不用运动公理，而采用与其等价的合同公理组。

运动公理的主要作用是进行图形间的比较，解决图形相等和不等的问题。

根据运动公理所建立的一系列定义和定理都是大家很熟悉的，它们在中学教材或其他初等几何教材中都有论述，但为了了解运动公理的作用，了解各个定理之间的逻辑相关性，以及后两节建立欧氏几何和罗氏几何的需要，必须把其中一些主要的定义和定理列举出来。为了节省篇幅，只对其中较典型的或与其他教材在证明上有原则区别的加以示范性的证明，其他就不再证明。其他各节有类似情况的也照此处理。

1　关于图形相等

定义　如果图形存在运动使图形 F 与 F' 叠合，则说图形 F 相等于 F'，或图形 F 全等于 F'。图形相等用 $F=F'$ 或 $F\cong F'$ 表示。

根据公理 Ⅲ$_{2-3}$ 可以推出图形相等的三个性质：

1°　反身性：每个图形 F 与本身相等。

事实上，恒等运动把图形 F 变为本身。公理 Ⅲ$_6$ 使线段 $AB=BA$，$\angle AOB=\angle BOA$。

2°　对称性：如果图形 F_1 相等于 F_2，则图形 F_2 相等于 F_1。

事实上，如果运动 Γ 把图形 F_1 变为 F_2，则 Γ 的逆运动 Γ^{-1} 把图形 F_2 变为 F_1。

3°　传递性：如果图形 F_1 相等于图形 F_2，图形 F_2 相等于图形 F_3，则图形 F_1 相等于图形 F_3。

事实上，运动 Γ_1 把图形 F_1 变为 F_2，运动 Γ_2 把图形 F_2 变为 F_3，则两个运动的积 $\Gamma_2\ \Gamma_1$ 把图形 F_1 变为图形 F_3。

相等是一个等价关系，根据它可以把图形分成等价类。

（1）线段相等与角相等的基本定理：

定理1·12　在一条射线上有且只有一点，使它与端点构成的线段等于已知线段。

证明　存在性。已知线段 AB 和端点为 A_1 的射线 h。根据

公理Ⅲ$_5$，存在运动Γ把点A变为A_1，把点B变为射线h上一点B_1，于是$A_1B_1=AB$。

唯一性：假定在h上存在不同两点B_1、B_2，使$A_1B_1=AB$，$A_1B_2=AB$。根据相等的对称性和传递性得出$A_1B_1=A_1B_2$。因此，根据公理Ⅲ$_5$存在运动把点A_1变为本身，把点B_1变为B_2，但这个运动把射线h变为本身，这与公理Ⅲ$_4$应保持射线上的点不变的事实相矛盾，所以点B_1与B_2不可能不同。

定理1·13 已知点B介于点A、C之间，点B'介于点A'、C'之间。如果三对线段AB与$A'B'$，BC与$B'C'$，AC与$A'C'$中有两对相等，则另一对也相等。

这个定理可根据公理Ⅲ$_5$和定理1.12来证明。

定理1.14 在射线的已知一侧有且只有一条射线使与已知射线构成的角等于已知角。

这个定理可根据公理Ⅲ$_5$来证明。

定理1·15 设射线OC在$\angle AOB$的内部，射线$O'C'$在$\angle A'O'B'$的内部。如果三对角$\angle AOB$与$\angle A'O'B'$，$\angle BOC$与$\angle B'O'C'$，$\angle AOC$与$\angle A'O'C'$中有两对相等，则另一对角也相等。

这个定理可仿照定理1.13证明。

定义 两个角有一个公共端点和一条公共边，且另两边互为延线，这两个角叫做互为邻补角。

定义 两个角中，一个角两边的延线分别是另一个角的两条边，这两个角叫做对顶角。

定理1·16 等角的邻补角相等。

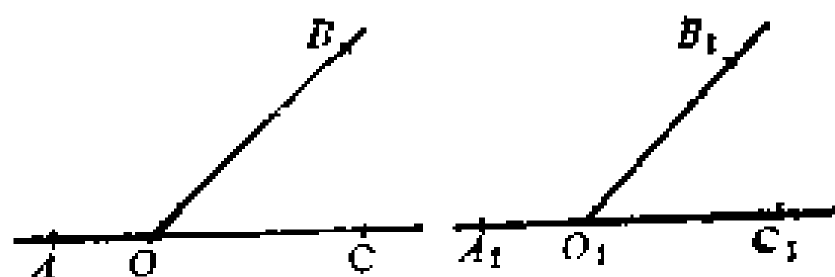


图3·8

证明 已知$\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$，$\angle BOC$是$\angle AOB$的邻补角，$\angle B_1O_1C_1$是$\angle A_1O_1B_1$的邻补角（图3.8）。

因为$\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$，必存在运动把射线$OA$变为射线$O_1A_1$，把射线$OB$变为射线$O_1B_1$。根据公理Ⅱ$_1$，这个运动把射线$OC$变为射线$O_1C_1$，因此运动把$\angle BOC$变为$\angle B_1O_1C_1$，所以$\angle BOC=\angle B_1O_1C_1$。

定理1.17 对顶角相等。

定义 一个角与它的邻补角相等，这个角叫做直角。

定理1.18 直角存在，并且所有直角都相等。

证明 存在性：取直线AB及其一侧的一点C（图3.9）。

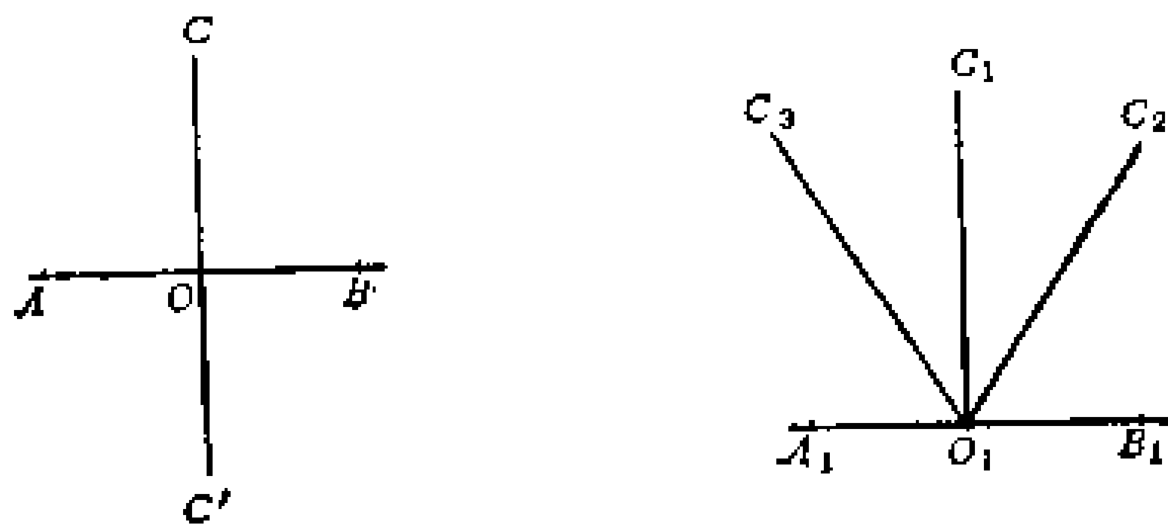


图3·9

根据公理Ⅱ$_5$，存在运动把点A及射线AB变为本身，把点C变为直线AB另一侧的一点C'。连结线段CC'，它必与直线AB交于一点O。根据公理Ⅱ$_4$，这个运动将点O和射线OB变为本身，因此将$\angle BOC$变为$\angle BOC'$，所以$\angle BOC=\angle BOC'$。因为$\angle BOC$等于它的邻补角，所以是直角。

证明相等：已知$\angle BOC$与$\angle B_1O_1C_1$是任意两个直角。假设$\angle BOC\neq\angle B_1O_1C_1$。根据定理1.14，在射线$O_1B_1$及$C_1$点所在的一侧，必存在射线$O_1C_2$，使$\angle B_1O_1C_2=\angle BOC$，且射线$O_1C_1$与$O_1C_2$不同，不妨设射线$O_1C_2$在$\angle B_1O_1C_1$的内部。由$\angle AOC=\angle BOC$及定理1.16得$\angle AOC=\angle B_1O_1C_2=\angle A_1O_1C_2$。因为$\angle B_1O_1C_1=\angle A_1O_1C_1$，存在运动将射线$O_1B_1$变为射线$O_1A_1$，射线$O_1C_1$变为本身，同时将射线$O_1C_2$变为$\angle A_1O_1C_1$内部的一条射线$O_1C_3$，所以$\angle B_1O_1C_2=\angle A_1O_1C_3$，

于是 $\angle AOC = \angle A_1O_1C_3$. 这样就有 $\angle AOC = \angle A_1O_1C_2$, $\angle AOC = \angle A_1O_1C_3$, 这与定理 1.14 矛盾，所以 $\angle BOC = \angle B_1O_1C_1$.

（2）垂线、轴对称

定义 两条相交直线，它们交点分成的射线所构成的角有一个是直角，这两条直线叫做**互相垂直的直线**，简称**垂线**，用记号"⊥"表示，例如 $a \perp b$, $AB \perp CD$ 等.

定理1.19 过已知点有且只有一条直线垂直于已知直线.

证明 存在性：如果已知点A在直线 $P'P$ 上. 根据定理 1.14，在 $P'P$ 分成的一个半平面上，存在射线 AQ，使$\angle PAQ$等于直角. AQ所在的直线$Q'Q$既过点A又垂直于直线 $P'P$（图3.10）.

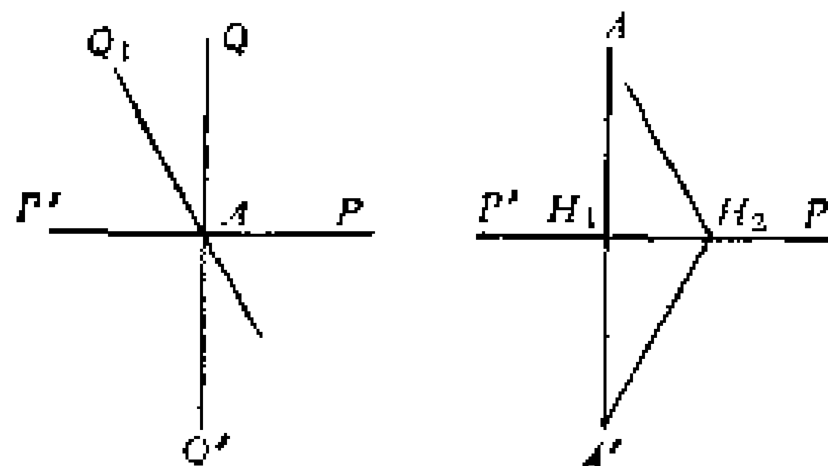


图3·10

如果点A不在直线 $P'P$ 上，存在运动使直线 $P'P$变成自身，将点A变成另一半平面上一点A'. 连结直线 AA'，它与直线 $P'P$ 交于点 H_1，直线 $AA' \perp$ 直线 $P'P$. 实际上，该运动将$\angle AH_1P$变为$\angle A'H_1P$，所以$\angle AH_1P = \angle A'H_1P$.

唯一性：一般用反证法. 如果点A在直线 $P'P$ 上（图3.10（1）). 假设存在两条直线AQ 和 AQ_1 同时垂直于直线 $P'P$，则对于射线AP'来说，在同一半平面上同时存在射线AQ 和 AQ_1使$\angle P'AQ = \angle P'AQ_1 = d$，这与定理1.14矛盾，所以过点$A$的垂线是唯一的.

如果点A不在直线$P'P$上，假设存在两条直线 AH_1 和 AH_2 同时垂直于$P'P$（图3.10（2））. 存在运动将直线 $P'P$ 变成本身，将点A变成另一半平面上一点A'. 于是射线 H_1A 变为 H_1A'，射线H_2A 变成射线 H_2A'. 因为$\angle AH_2P = \angle A'H_2P = d$，所以 A、H_2、A'共线，这时过点A和 A' 连结了两条不同的直

线，这与公理 I_1矛盾，所以过点 A 的垂线是唯一的。

定义 把直线 a 上的每一点变为本身，把不在直线 a 上的任意点 A 变成与它在直线 a 另一侧的点 A' 的运动，叫做**轴对称**或**直线反射**。直线 a 叫做**对称轴**，点 A 和 A' 叫做关于直线 a 的**对称点**。图形 F 上所有点的对称点构成的图形 F'，叫做关于直线 a 的**对称图形**。

显然两个对称图形全等。如果 AA' 与直线 a 交于点 H，则 $HA=HA'$，$AA'\perp a$。

（3）三角形的全等

定义 全等三角形中，可以互相叠合的边叫做**对应边**，可以互相叠合的角叫做**对应角**。

定理1.20 （三角形全等的第一判定定理）如果两个三角形的两边和它们的夹角对应相等，则两个三角形全等。

定理1.21 （三角形全等的第二判定定理）如果两个三角形的两角和它们夹边对应相等，则这两个三角形全等。

推论 如果两直角三角形中，斜边和一非直角的内角对应相等，则这两个三角形全等。

本定理可根据运动和垂线唯一性来证明。

（4）线段的中点与角的平分线

定义 如果点 O 在线段 AB 内部，且 $AO=OB$，则点 O 叫做**线段的中点**。

定义 如果射线 OC 在 $\angle AOB$ 内部，且 $\angle AOC=\angle BOC$，则射线 OC 叫做 $\angle AOB$ 的**平分线**。

定理1.22 每个线段有且只有一个中点。

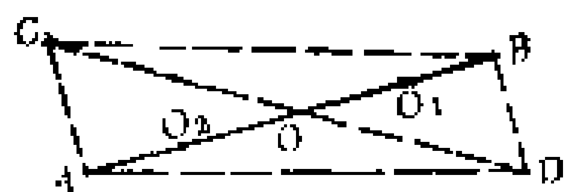


图3·11

证明 存在性：已知线段 AB，过点 A、B 分别作 $AC\perp AB$，$BD\perp AB$，且 $AC=BD$，C、D 在直线 AB 的异侧（图3.11）。

连结 CD，由于 C、D 在直线 AB 的异侧，CD 与直线 AB 交

于点O．根据定理1.20，$\triangle CAB \cong \triangle DBA$，由此得 $BC=AD$．根据定理1.15，可知$\angle CBD=\angle CAD$，再根据定理1.21，$\triangle BCD \cong \triangle ADC$，由此得$\angle ACD=\angle BDC$．根据定理 1.21 $\triangle ACO \cong \triangle BDO$，所以$AO=OB$．

点A、B不能在点O的同侧．假设A、B在点O的同侧，根据定理1.12和$OA=OB$，则A、B必相同，这与已知矛盾．因此，点O在A、B之间．到此可以断言，点O是线段AB的中点．

唯一性：用反证法．假设线段AB有两个中点O及O_1．设点O_1在线段OB（或OA）之间．因为$AO=OB$，则存在运动把点O变为本身，把线段OB变成OA，点O_1变为点O_2，且点O_2在AO之间．因为点O_1、O_2在线段AB之间，所以O_1、O_2在点A的同侧．又$AO_1=O_1B$，$O_1B=O_2A$，所以$AO_1=AO_2$，这与定理1.12矛盾，因此，中点是唯一的．

定理1.23 每个角有且只有一条平分线．

这个定理可归结为线段中点的存在和唯一性来证明．如图3.12，取$OA=OB$，C为AB的中点，则OC为平分线．

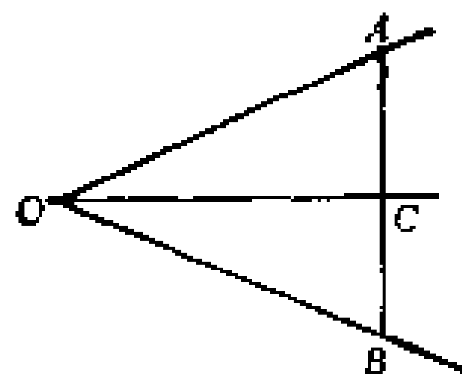


图3·12

（5）等腰三角形的性质

定义 有两条边相等的三角形叫做**等腰三角形**．两相等的边叫做**腰**，另一边叫做**底边**，底边与腰构成的角叫做**底角**，底边的对角叫做**顶角**．

定义 从三角形的一个顶点向对边引垂线，从顶点到垂足的线段，叫做三角形的**高**；三角形一个角的平分线与对边相交，从顶点到对边的线段，叫做三角形的**角平分线**；连结三角形一个角的顶点和它对边的中点的线段，叫做三角形的**中线**．

等腰三角形有如下的性质：

定理1.24 等腰三角形的底角相等．反过来有两个内角相

等的三角形是等腰三角形。

定理1.25 等腰三角形底边上的高、中线和顶角平分线是同一条线段。

四

这个定理可用同一法证明。

根据等腰三角形性质可以证明下一定理：

定理1.26（三角形全等的第三判定定理）如果三角形三条边对应相等，则两三角形全等。

2 关于图形不等的定理

定义 已知两条线段 AB 与 CD，存在运动把点 C 变为点 A，射线 CD 变为射线 AB，点 D 变为点 D'。如果点 D' 在 A、B 之间，则说线段 CD 小于线段 AB，记作 $CD<AB$；如果点 B 在 A、D' 之间，则说线段 CD 大于线段 AB，记作 $CD>AB$。

线段大小关系有下面性质：

（i）如果 $AB<CD$，则 $CD>AB$；

（ii）如果 $AB=A'B'$，$CD=C'D'$，$AB<CD$，则 $A'B'<C'D'$；

（iii）如果 $AB<CD$，$CD<EF$，则 $AB<EF$。

类似地可以定义角的大小。

有限个线段可以进行加减。已知线段 AB、CD，在射线 AB 的延线上取点 D'，使 $BD'=CD$，则说线段 AD' 是 AB 与 CD 的和，记作 $AB+CD=AD'$。如果 $AB>CD$，在 AB 上取点 D''，使 $D''B=CD$，则说线段 AD'' 是 AB 与 CD 的差，记作 $AB-CD=AD''$（图3.13）。

㉓

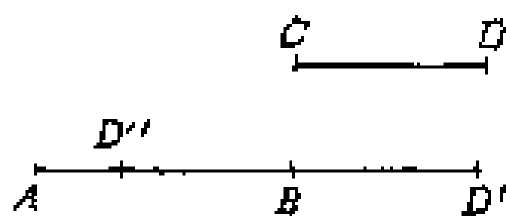


图3·13

线段的和、差的定义，可以推广到任意有限个。但进行减法运算时，被减线段应大于减线段。

类似地可以定义角的和、差概念。但须注意，按照定义，角的大小指角内部的大小，不包括普通几何教材里的平角，也不包括那里的优角，因此不是任意两个角都能相加，只有相加

后其和小于二直角的才有意义，为了使角的加减运算总能进行，以后还需扩充角的概念。

关于图形不等的定理是比较多的，以下我们仅列出一些重要而且常用的定理，说明运动公理的作用。

（1）与三角形有关的边、角不等定理

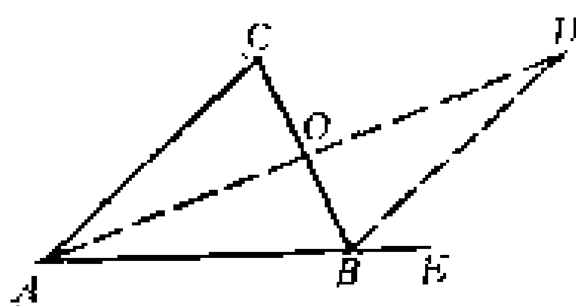


图3·14

定理1.27 （外角定理）三角形的外角大于与它不相邻的任一内角。

证明 已知$\triangle ABC$，外角$\angle CBE$（图3.14）。

取BC边的中点O，从点A过O引射线AO，取$OD=OA$，点O在A、D之间。

因为点D与射线BE在直线BC的同侧，点D与射线BC在直线AB的同侧，所以射线BD在$\angle CBE$的内部，因此$\angle CBE>\angle CBD$。

又$AO=OD$，$BO=OC$，$\angle AOC=\angle DOB$，根据定理1.20，$\triangle AOC\cong\triangle DOB$，因此$\angle CBD=\angle ACB$。因为$\angle CBE>\angle CBD$，$\angle CBD=\angle ACB$。所以得到$\angle CBE>\angle ACB$。取$\angle CBB$的对顶角和$AB$的中点$O'$，按同样的步骤可证得$\angle CBE>\angle CAB$。

同理可证三角形其他外角也有同样的结论。

定理1.28 在三角形中，较大的边所对的角较大；反之较大的角所对的边也较大。

这个定理可根据等腰三角形和定理1.27证明。

定理1.29 在三角形中，每一边都小于另两边的和，而大于另两边的差。

定理1.30 在两个三角形中，有两对对应边相等，但其夹角不等，较大夹角所对的边较大。反之，较大边所对的夹角也较大。

（2）垂直线段、斜线及其射影的比较

定义 从直线a外一点A向直线a引垂线，垂足为B，又引若干射线与直线相交于点C_1、C_2、……。称线段AB为点A到直线a的**垂直线段**。称AC_1、AC_2、……为点A到直线a的**斜线段**（简称斜线）。分别称线段BC_1、BC_2、……为斜线AC_1、AC_2、……在直线a上的**正射影**（简称射影），如图3.15所示。

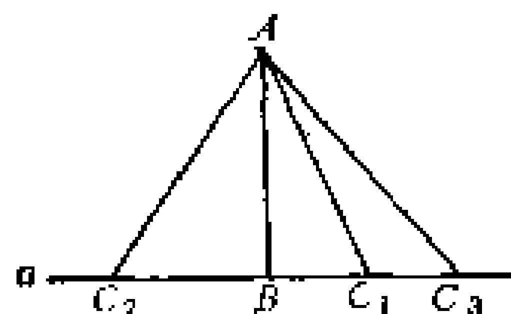


图3·15

定理1.31 从一点向直线所引的垂线和斜线中：

（i）垂直线段小于任何斜线。

（ii）斜线在直线上的射影较大的该斜线也大；反之斜线较大的其射影也大。

这个定理可用外角定理和定理1.28来证明。

（3）不相交直线的存在

平面上两条直线与第三条直线相交时，交出八个角，如图3.16所示。∠1和∠3，∠2和∠4，∠5和∠7，∠6和∠8，都叫做同位角。∠2和∠3，∠5和∠8都叫做内错角。∠3和∠5，∠2和∠8都叫做同旁内角。

定理1.32 如果两条直线与第三条直线相交，构成的同位角相等，则两条直线不相交。

证明 已知如图3.17，若直线m与直线n相交于一点C，则∠1是△ABC的外角，根据外角定理有∠1>∠2，这与已知∠1＝∠2矛盾，所以直线m与直线n不相交。

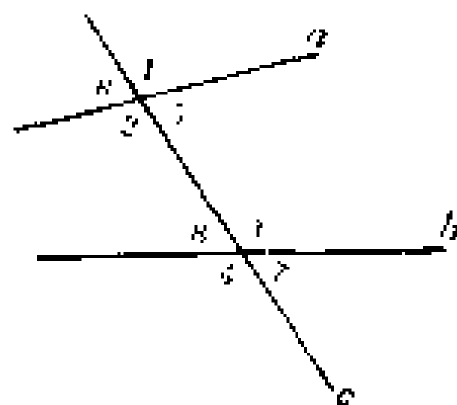


图3·16

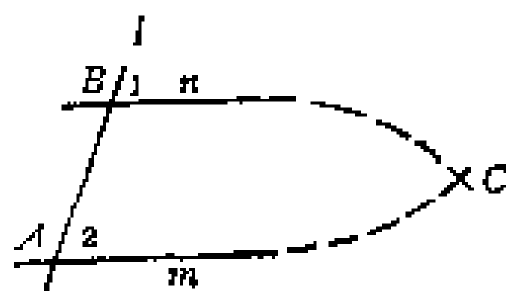


图3·17

定理1.33 如果两条直线与第三条直线相交，构成的内错角相等，则两条直线不相交。

1·4 连续公理及其推论

连续公理主要是确定直线的连续性，以及建立线段和角的度量理论等。

本书的连续公理采用阿基米德公理和康托尔（Cantor）公理。

公理Ⅳ$_1$ （阿基米德公理）设 AB 和 PQ 是任意两条线段，如果 A_1、A_2、A_3、…、A_n 是直线 AB 上的点，点 A_1 在 A 与 A_2 之间，点 A_2 在 A_1 与 A_3 之间等等，并且线段 AA_1、A_1A_2、…、$A_{n-1}A_n$ 都与 PQ 相等，则存在点 A_n 使点 B 在 A 与 A_n 之间。

就是说，在直线 AB 上，从点 A 到 B 的方向依次截取线段 AA_1、A_1A_2、……都等于线段 PQ，最后总有 A_n 越过点 B，使 $AA_n>AB$。

公理Ⅳ$_2$（康托尔公理）设在直线 a 上存在线段的无穷序列 A_1B_1、A_2B_2、……，并且后一线段在前一线段内部（可以有一端点重合）；再有，不存在这样的线段，它在所有这些线段的内部。那么在直线 a 上必存在而且只存在一个点 C 属于所有线段 A_nB_n（n 为正整数）。

上面讲过的相等、大于、小于等关系，都不能解释为数量关系的比较，只有在连续公理的作用下，才能解决度量问题。首先根据阿基米德公理建立线段长度的存在和唯一的问题，然后再根据康托尔公理解决其逆的问题。

1 线段的度量问题

定义 如果每一条线段对应一个正数，并且满足下面三个条件，那么这个正数叫做线段的长度：

（1）相等的线段对应相同的正数；

（2）如果一条线段等于另两条线段的和，则这条线段所对应的正数等于另两条线段所对应正数的和；

（3）某条线段对应数1.

条件（1）叫做线段长度的**不变性**；条件（2）叫做线段长度的**可加性**；条件（3）所指的线段叫做**单位线段**.

定理1.34 如果选定某条线段作为单位线段，则每条线段必存在长度，而且是唯一的.

证明 线段长度的存在性．即选定单位线段后，任意线段对应一个正数，并且满足长度定义中的条件（1）、（2）.

首先，选定单位线段 PQ 后，按下述的度量程序，使每一条线段 AB 对应一个正数 $\rho(AB)$，单位线段 PQ 对应正数 $\rho(PQ)=1$.

单位线段的2^n等分对应如下的正数：

取线段PQ的中点O，根据条件（1）、（2）的要求，令

$$\rho(PO)=\rho(OQ)$$

$$\rho(PQ)=\rho(PO)+\rho(OQ)=2\rho(PO)=1$$

因此，线段 PO 与 OQ 对应的正数都等于$\frac{1}{2}$.

类似地可以得出线段 PQ 四等分时，每一等分线段所对应的正数等于$\frac{1}{2^2}$；线段 PQ的n等分时，每一等分线段所对应的正数等于$\frac{1}{2^n}$.

取任意线段AB，在AB所在的直线上，从点A到B的方向依次截取线段 AA_1、A_1A_2、……，使每一条都与PQ相等.

如果A_n与B重合，根据条件（1）、（2）的要求，令

$$\rho(AB)=\rho(AA_1)+\rho(A_1A_2)+\cdots+\rho(A_{n-1}A_n)=n$$

这时，线段 AB 对应的正数等于 n.

如果点 A_1、A_2、……中任何一个不与点B重合，根据阿基米德公理，存在两点 A_n、A_{n+1}，使点B介于它们之间，这时$AA_n<AB<AA_{n+1}$．因为$\rho(AA_n)=n$，$\rho(AA_{n+1})=n+1$，根据条件（1）、（2）的要求，应有

$$n<\rho(AB)<n+1$$

用点P_1再将线段 A_nA_{n+1} 平分，可能出现下列三种情况之一：

（i）点 P_1 与 B 叠合，则

$$\rho(AB)=n+\frac{1}{2}$$

显然，线段 AB 所对应的是确定的正数。

（ii）点 B 在 AP_1 之间，则

$$n<\rho(AB)<n+\frac{1}{2}$$

（iii）点 B 在 P_1 与 A_{n+1} 之间，则

$$n+\frac{1}{2}<\rho(AB)<n+1$$

我们把(ii)、(iii)的不等式统一写成

$$n+\frac{\varepsilon_1}{2}<\rho(AB)<n+1-\frac{\varepsilon'_1}{2}$$

在(ii)的情况下 $\varepsilon_1=0$，$\varepsilon'_1=1$；在(iii)的情况下 $\varepsilon_1=1$，$\varepsilon'_1=0$。

现在把A_nP_1与P_1A_{n+1}中含有B点的线段两端引进新的字母表示：将靠近A的一端用M_1表示，将靠近A_{n+1}的一端用 M'_1 表示。如图3.18中 A_n 用 M_1 表示，P_1 用 M'_1 表示。

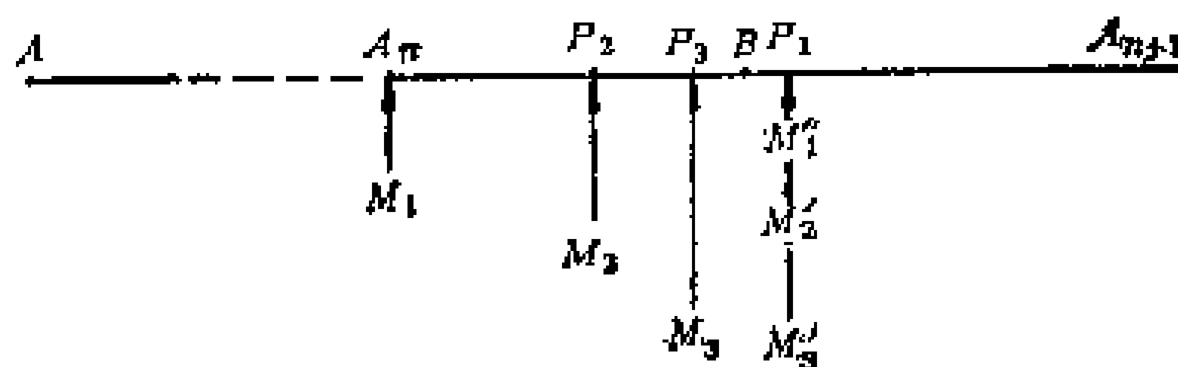


图 3·18

用P_2点继续将线段 $M_1M'_1$ 等分，又会出现三种情况：如果点 P_2 与 B 重合，则线段对应一个确定的正数，否则 B 落在分成的两个线段之一$M_2M'_2$ 内，则有

$$\rho(AM_2)<\rho(AB)<\rho(AM'_2)$$

$$n+\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}<\rho(AB)<n+1-\frac{\varepsilon'_1}{2}-\frac{\varepsilon'_2}{2^2}$$

其中点 B 在 M_1P_2 上时，$\varepsilon_2=0$，$\varepsilon'_2=1$；点 B 在 $P_2M'_1$ 上时，$\varepsilon_2=1$，$\varepsilon'_2=0$。

继续同一作法，用 P_k 等分 $M_{k-1}M'_{k-1}$，则可得出：

$P_n\equiv B, \rho(AB)=n+\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon_i}{2^i}$（$n$是整数，$\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon_i}{2^i}$ 是二进小数）

$$P_n\neq B,\ \rho(AM_k)<\rho(AB)<\rho(AM'_k)$$

$$\rho(AM_k)=n+\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon_i}{2^i}\qquad \rho(AM'_k)=n+1-\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon'_i}{2^i}$$

式中 $\varepsilon_k=0$，$\varepsilon'_k=1$，或者 $\varepsilon_k=1$，$\varepsilon'_k=0$。即

$$n+\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon_i}{2^i}<\rho(AB)<n+1-\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon'_i}{2^i}$$

因为

$\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon_i}{2^i}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1$（公比为$\frac{1}{2}$的无穷等比数列之和）

从而$\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon_i}{2^i}$与$\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon'_i}{2^i}$都是单调有界的，所以它们都有极限。

又因为 $\varepsilon_i+\varepsilon'_i=1$ 对于任何 i 都成立，所以

$$\rho(AM'_k)-\rho(AM_k)=1-\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon_i+\varepsilon'_i}{2^i}=1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}$$

当 $i\to\infty$时，必有

$$\lim_{k\to\infty}[\rho(AM'_k)-\rho(AM_k)]=\lim_{k\to\infty}\left[1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}\right]=0$$

我们得出 $\rho(AM_k)$ 与 $\rho(AM'_k)$ 有相等的极限值。从而

$$\rho(AB)=\lim_{k\to\infty}\rho(AM_k)=\lim_{k\to\infty}\rho(AM'_k)$$

在线段 AB 的度量程序中，如果点 B 与某个平分点 P_k 重合，则上面 $\rho(AB)$的表示式的项数是有限的，这时我们说线段 AB 与 PQ 有公度 $\frac{1}{2^k}$，显然线段对应的数是有理数。如果点 B 不与任何一个平分点 P_k 重合，则 $\rho(AB)$ 表示式的项数是无限

的，这时就说线段 AB 与 PQ 无公度，这时 $\rho(AB)$是一个无限小数。

其次我们证明，每一条线段按上面度量程序所对应的正数，满足不变性和可加性。

由于我们的度量程序是根据点和线段的"结合"、"介于"以及"线段相等"概念出发建立了$\rho(AB)$，而这些关系都是运动下的不变量。因此，如果$AB=EF$，则 $\rho(AB)=\rho(EF)$，即满足条件（1）。

下面证明按上述度量程序所对应的正数也满足条件（2）。

设线段$AB+BC=AC$，如果 AB 与 BC 都是与 PQ 有公度的线段，这时必存在公共的公度$\frac{1}{2^k}$（即 PQ 的$\frac{1}{2^k}$等分所对应的数）使

$$\rho(AB)=m\cdot\frac{1}{2^k}$$

$$\rho(BC)=n\cdot\frac{1}{2^k}$$

$$\rho(AC)=(m+n)\frac{1}{2^k}$$

因此，　$\rho(AB)+\rho(BC)=\rho(AC)$

如果AB与BC无公度，按度量程序有

$$\rho(AB)=\lim_{k\to\infty}\rho(AM_k)=\lim_{k\to\infty}\rho(AM'_k)$$

按同样的度量程序度量BC，设N_k与N'_k是类似于M_k与M'_k的同样叙列（图3.19），则



图 3·19

$$\rho(BC)=\lim_{k\to\infty}\rho(BN_k)=\lim_{k\to\infty}\rho(BN'_k)$$

从M_k到点C的方向上，取点R_k，使$M_kR_k=BN_k$，这时，

M_k在点A与R_k之间，因此

$$AR_k = AM_k + M_kR_k \qquad (1)$$

同样从M'_k到点C的方向上截取点R'_k，使$M'_kR'_k = BN'_k$，M'_k在点A与R'_k之间，且

$$AR'_k = AM'_k + M'_kR'_k \qquad (2)$$

因为$AM_k < AB$，$BN_k < BC$，且$AM'_k > AB$，$BN'_k > BC$。所以，由式（1）和（2）得出

$$AR_k < AB + BC = AC$$

$$AR'_k > AB + BC = AC$$

即 $$AR_k < AC < AR'_k \qquad (3)$$

因为AM_k，AM'_k，BN_k，BN'_k都与PQ有公度，所以

$$\rho(AR_k) = \rho(AM_k) + \rho(BN_k)$$

$$\rho(AR'_k) = \rho(AM'_k) + \rho(BN'_k)$$

又因为

$$\lim_{k\to\infty}\rho(AM_k) = \lim_{k\to\infty}\rho(AM'_k)$$

$$\lim_{k\to\infty}\rho(BN_k) = \lim_{k\to\infty}\rho(BN'_k)$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}\rho(AR_k) = \lim_{k\to\infty}\rho(AR'_k) = \lim_{k\to\infty}\rho(AM_k) + \lim_{k\to\infty}\rho(BN_k)$$

而由不等式（3）有

$$\lim_{k\to\infty}\rho(AR_k) = \rho(AC) = \lim_{k\to\infty}\rho(AR'_k)$$

所以

$$\rho(AC) = \rho(AB) + \rho(BC)$$

线段长度的唯一性．在选定单位线段PQ后，每一线段AB的长度，除$\rho(AB)$外，不可能再有另外一个与$\rho(AB)$不同的长度。

我们分两部分讨论：

如果线段AB与PQ是可公度的．在AB直线上从点A到B截取线段AA_1、A_1A_2、……分别相等于PQ。若A_1与B重合，

即$AB=PQ$，这时$\rho(AB)=1$，显然不可能再有其它的长度。否则，根据不变性，单位线段也具有不为1的长度，这与单位线段的定义不符合。若A_n与B重合，长度$\rho(AB)=n$，也不能有其它与n不同的长度。否则，根据长度的可加性也会使PQ具有1以外的长度。类似地可以推出AB与PQ有公度$\frac{1}{2^k}$（k为正整数）的情形。

如果AB与PQ是不可公度的。假设线段AB除了长度$\rho(AB)$外，还有另一个不同的长度$\rho'(AB)$。按上面讲到的度量程序定出M_k与M'_k，使M_k在A、B之间，B在M_k与M'_k之间。根据可公度的情形，应有

$$\rho'(AM_k)=\rho(AM_k)$$

为肯定起见，设$\rho'(AB)<\rho(AB)$。因为

$$\rho(AB)=\lim_{k\to\infty}\rho(AM_k)>\rho'(AB)$$

必能找出这样的正整数k，使得

$$\rho'(AB)<\rho(AM_k)=\rho'(AM_k) \qquad (1)$$

因为M_k介于A和B之间，有

$$AB=AM_k+M_kB$$

所以 $$\rho'(AB)=\rho'(AM_k)+\rho'(M_kB)$$

$$\rho'(AB)>\rho'(AM_k) \qquad (2)$$

我们得出的（2）式与（1）式相矛盾，因而$\rho'(AB)$不能小于$\rho(AB)$。

同理可证，$\rho'(AB)$不能大于$\rho(AB)$。

这样就证明了$\rho'(AB)=\rho(AB)$，就是说在单位线段选定后，每一条线段的长度是唯一的。

定理1.35 对于任意正实数a，并且给了单位长度，那么一定存在一条线段，它的长度等于a。

证明 把实数a表示为二进小数形式

$$a=n\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots\cdots$$

其中n是a的整数部分，ε_i或者是零或者是1，它是a的第i位

小数的数字．下面我们分两种情形进行讨论：

a 是无限小数．在 A 为端点的射线上，截取线段 AA_1，A_1A_2，……，A_nA_{n+1} 都等于单位线段 PQ，用点 P_1 把线段 A_nA_{n+1} 平分．如果 $\varepsilon_1=0$，则取线段 A_nP_1，如果 $\varepsilon_1=1$，则取线段 P_1A_{n+1}，令这个线段为 L_1．再把所取的线段 L_1 用点 P_2 平分，如果 $\varepsilon_2=0$，则取靠近点 A 的一半，如果 $\varepsilon_2=1$，则取另一半，令这个线段为 L_2．按照同样的程序继续把每次所取的线段用 P_k 平分下去，我们得出一个线段的无限序列：

$$L_1、L_2、L_3、\cdots、L_k、\cdots\cdots$$

这样的序列中每一条线段的内点都落在它前面一个线段内部，并且每条线段的一个端点和它前面一条线段的端点重合．同时，因为线段 L_k 的长度是 $\frac{1}{2^k}$，它随着 k 的增大无限地小下去，所以可以断定，不能够存在一条线段 L_h 小于所有序列中的线段．实际上只要 $k>h$，就有 $L_k<L_h$．根据康托尔公理，必存在一点 B 属于所有线段 L_k，显然，线段AB 的长度等于预先给定的正数 a．

如果 a 可以表示成有限的二进小数，用上面的方法，只用有限次的平分线段L_k，就能确定一点 B，它是平分点 P_1、P_2、…、P_k 中的某一个，这时线段AB 的长度等于 a．这种情形不需要康托尔公理就解决了．

这样，关于线段长度的逆定理得到了证明．

由定理1.34可知，每条线段都对应一个正数，是线段的长度；反过来，根据定理1.35可知每一个正数都对应一条线段，这个正数就是线段的长度．这个事实非常重要，我们可以根据这两个定理在有向直线上建立直线上所有点的集合与所有实数集合之间的一一对应关系，进一步得出直线上的点是连续的有序集合，这是解析几何中建立坐标系的理论基础．

2　角的度量问题

根据连续公理可以用解决线段度量的类似方法建立角的度

量理论。

类似线段长度的定义，可以定义角的角度。

定义　角的角度是满足下面条件的正数：

（1）相等的角对应相同的正数（不变性）；

（2）如果一个角等于另两个角的和，则这个角所对应的正数等于另两个角所对应正数的和（可加性）；

（3）某个角对应数1，这个角叫做角度单位。

角度的定义虽然与线段长度定义类似，但两者关于单位的选择上又有不同之处。在线段度量中任意一条线段都可以作为单位线段，而在度量角时，因为一切直角都相等，所以一定要把直角对应一个确定的数值。

为了解决角的度量问题，我们同样可以建立角内射线的阿基米德命题和康托尔命题，以及建立与定理1.34类似的关于角度的存在性和唯一性定理。类似于定理1.35的角度定理是："在取定角度单位以后，设直角的角度是ω，则对于任意实数a，$0<a<2\omega$，总存在一个角，其角度等于a。"弧度制规定直角为$\frac{\pi}{2}$，也就是将长度等于半径的弧所对的圆心角规定为1个弧度单位。

在有向直线上可以区分线段的端点为始点和终点（前点和后点）成为有向线段。类似地，区分角的两边为始边和终边便可规定有向角。习惯上规定：以角的顶点为旋转中心，从始边到终边的旋转是逆时针的为正向，角度为正；顺时针的为负向，角度为负。又规定两直角之和为平角，四直角之和为周角，以推广角的概念。

3　戴德金分割原理

本书的连续公理采用了阿基米德命题和康托尔命题。连续公理也可以用另一种表达方式，即采用与前两命题等价的戴德金（Richard Dedekind 1831—1916）原理，现在它是前两命题的推论，即把它作为定理。叙述如下：

定理1.36 （戴德金命题）如果有向直线(或射线或线段)上的所有点被分成如下的两类（称戴德金分类）：

（i）每一点属于且只属于一个类，每个类都含有点；

（ii）第一类里的任意点都在第二类任意点的前面。

则或者是第一类里有最后点，或者是第二类里有最前点，两者必有一个成立。

根据上述定理容易推出关于角内射线的戴德金定理．即

定理1.37 如果角内的所有有序半线被分成如下的两类：

（i）每一半线属于且只属于一个类，每个类都含有半线；

（ii）第一类里的任意半线都在第二类里的任意半线之前．

则或者是第一类里有最后半线，或者是第二类里有最前半线，两者必有一个成立。

戴德金分割原理是一个非常重要的命题，特别是在实数理论里起着特殊的作用，下面在罗氏几何中也将用到．

4 圆规命题

连续公理的又一个重要的作用是建立圆规命题，它们是直尺圆规作图中作直线与圆以及圆与圆交点的根据。

有了线段的长度就可以定义两点间以及点到直线的距离．

定义 两个点间线段的长度叫做两个点的距离．

定义 点到直线所作垂直线段的长度叫做点到直线的距离．

定义 已知定点O，定长线段AB．平面上和点O距离等于定长线段AB的点集合叫做圆．定点O叫做圆心，定长线段AB叫做圆的半径．如果一点M_1,满足$OM_1<AB$,称点M_1为圆内部的点；如果一点M_2，满足$OM_2>AB$，称点M_2为圆外部的点．所有内点的集合叫圆的内部，所有外点的集合叫圆的外部．圆是内、外部的共同边界．端点在圆上的线段叫做弦，经

过圆心的弦叫做直径．圆上两点间的部分叫做弧．

定理1.38（直线交圆命题）通过圆内部一点的直线一定和圆交于两点．

定理1.39（圆交圆命题）如果圆O通过圆O'的一个内点和一个外点，则两圆一定相交于两点．

这两个定理称为圆规命题，可用戴德金定理证明．

1．5 几个重要定理

下面介绍几个重要的定理，其中包括萨开里和勒让德命题．这些定理以后要用到．

定理1.40 任意一个三角形的内角和不能大于两个直角．

证明 用反证法．假设存在一个$\triangle ABC$，它的三个内角α、β、γ的和大于两个直角，即$\alpha+\beta+\gamma>\pi$（图3.20）．

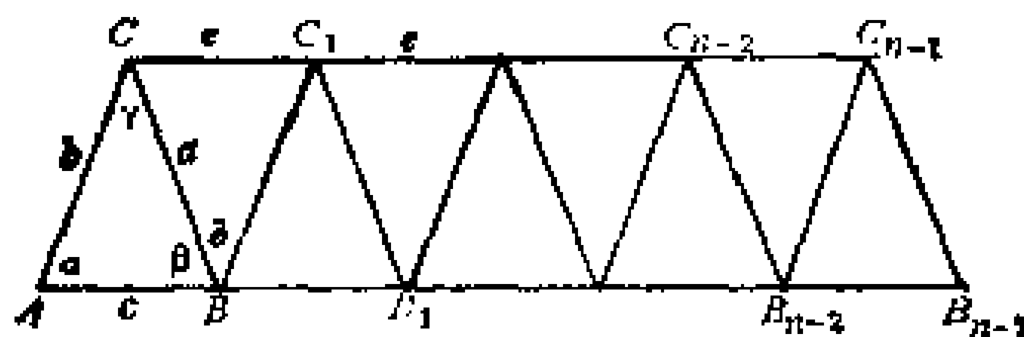


图3·20

沿AB方向延长边AB，并在这个边上作出如图3.20的$(n-1)$个分别与$\triangle ABC$全等的$\triangle BB_1C_1$、$\triangle B_1B_2C_2$、…、$\triangle B_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}$．令$\angle CBC_1=\delta$，显而易见

$$\angle CBC_1=\angle C_1B_1C_2=\cdots=\angle C_{n-2}B_{n-2}C_{n-1}=\delta$$

$$CC_1=C_1C_2=\cdots\cdots=C_{n-2}C_{n-1}=e$$

因为$\alpha+\beta+\gamma>\pi$，$\delta=\pi-\alpha-\beta$，所以$\gamma>\delta$．因为$\triangle ABC$和$\triangle C_1BC$有公共边BC，$AC=BC_1$，而$\gamma>\delta$，根据定理1.30，可以得到$c>e$,$c-e$是个正数h．另一方面，折线$ACC_1C_2\cdots C_{n-2}C_{n-1}B_{n-1}>AB_{n-1}$，所以有

$$b+(n-1)e+a>nc$$

或 $$n(c-e)=nh<a+b-e$$

最后等式中 $a+b-e$ 是一个正数，说明对于任意正数 n，n 乘正数 h 总是小于一个正数，这与阿基米德公理矛盾，因此，$\alpha+\beta+\gamma>\pi$ 不成立。

定理1.41 三角形的每个外角都大于或等于与它不相邻的两内角之和。

这是定理1.40的直接推论。

定理1.42 在四边形 $PQBA$中，如果边 PQ 上的两内角都是直角，并且边 $AP\geqslant BQ$，则 $\angle A\leqslant\angle B$。反过来，若 $\angle A\leqslant\angle B$，则 $AP\geqslant BQ$。

证明 设R是四边形 $PQBA$ 的边 PQ 的中点，CR 垂直于 PQ(图3.21)。CR 不能与边AP、BQ 相交，因而点A、B 在 CR 异侧，所以AB 必与直线 CR 交于一点 C 。取点 B 关于直线 CR 的对称点 B_1，显然，点 B_1 在边 AP 上，或与 A 点重合。连结 B_1C，则 B_1C关于 CR 与 BC 对称。所以，$\angle B=\angle PB_1C\geqslant\angle A$。

逆定理可用反证法证明。

定义 如果四边形 $PQBA$，在边 PQ 上的两个内角都是直角，而且边AP与BQ 相等，则这个四边形叫做**萨开里四边形**。边AB与PQ分别叫做**上底**与**下底**。边AP与BQ叫做**腰**(图3.22)。

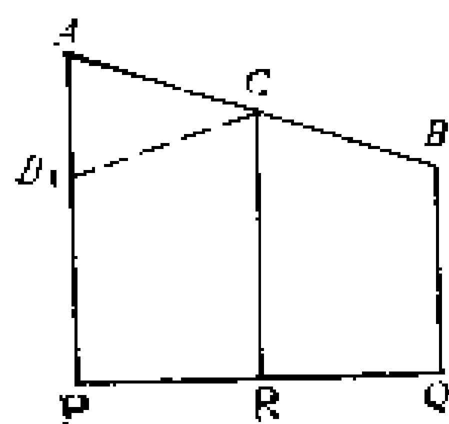


图 3 · 21

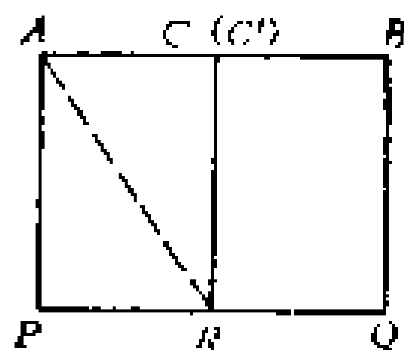


图 3 · 22

定理1.43 萨开里四边形上下底中点连线与两底边垂直，即为上下底的公垂线；上底边的两侧的角相等，并且不能大于直角。

证明 设点C、R为萨开里四边形$PQBA$上、下底的中点。

以下底 PQ 的中垂线 RC' 为对称轴作直线反射，将 QB 翻转到另一侧，则 QB 与 PA 重合．若 RC' 与 AB 交于点 C'，则 $C'B$ 与 $C'A$ 重合，于是 C' 与 C 重合，即 C' 是 AB 的中点．因为 B、A 关于轴 RC 对称，所以又有 $RC\perp AB$，就是说 RC 是 PQ、AB 的公垂线。

显然上底的两侧角 $\angle A=\angle B$．下面证明 $\angle A$ 和 $\angle B$ 不能大于直角。

假设 $\angle A=\angle B$ 大于直角．因为 $\angle P=\angle R=\angle RCA=d$，则四边形 $PRCA$ 的内角和大于四直角，这时 $\triangle PRA$ 或 $\triangle CRA$ 必有一个其内角和大于二直角，这与定理1.40相矛盾．所以 $\angle A=\angle B\leqslant d$。

定义 小于直角的角叫做锐角．大于直角而小二直角的角叫做钝角。

定理1.44 通过直线外一点常可引直线，使和已知直线作成的角等于已知锐角。

定理1.45 如果一点沿角的一边运动远离顶点，则这个点到另一边的距离可无限增大。

证明 已知角 $\angle AOB$ 和任意大的线段 PQ（图3.23）．

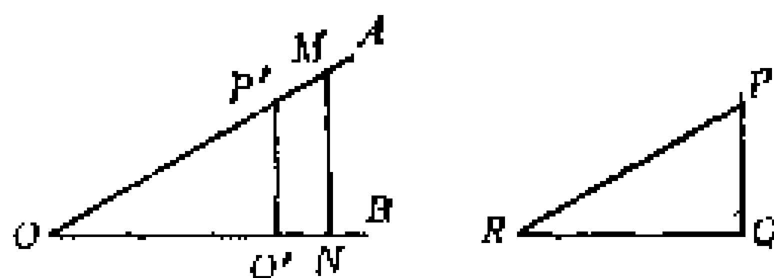


图 3・23

我们证明当动点 M 沿边 OA 远离顶点 O 时，点 M 到另一边 OB 的距离 MN 可以大于事先给定的任意大的线段 PQ。

过已知任意大的线段 PQ 一个端点 Q 引 RQ 垂直于 PQ．根据定理1.44可在 RQ 直线作出一点 R，使 $\angle PRQ=\angle AOB$．现在把 $\triangle PRQ$ 移到 $\angle AOB$ 上，使 R 与 O 重合，P、Q 分别落到两边 OA 和 OB 的 P' 和 Q' 处．如果点 M 运动到 OP' 的延长线上，从点 M 作 OB 的垂线 MN，因为 $\angle OP'Q'<d$，所以 $\angle MP'Q'>d$．又 $\angle OMN<d$，所以 $\angle MP'Q'>\angle P'MN$．根据定理1.42可知 $MN>P'Q'$．这就是说点 M 到 OB 的距离大于事先给定的

任意大的线段 PQ，从而当 M 远离顶点 O 时，点 M 到边 OB 的距离可以任意大.

§2 欧几里得平面几何学的结构·欧氏平行公理的等价命题

本节首先给出欧几里得平面几何学的公理系统，然后在此基础上建立欧几里得平面几何学的结构。因为绝对几何的内容已在上一节里给出，其定义、定理都可以移过来作为已知事实，所以在这个基础上着重研究欧氏平行公理所能推导出来的一系列定理，这部分定理可以称为真正的欧几里得几何定理。就是说：

欧氏几何 = 绝对几何 + 真正的欧氏几何定理.

为了能看清欧氏平行公理 V 的作用，主要从六个方面来讨论这个问题。从这些定理可以看出欧几里得几何的特点，这是很重要的问题。

其次，介绍一些与欧氏平行公理 V 等价的命题，了解等价命题的意义和证明方法，由此可以明白为什么历史上试证第五公设都失败了，为什么现在采用的平行公理与欧几里得第五公设不同而作用相同。

最后，主要是为第四章讲正交变换时的需要，概括地介绍一些特殊运动及其相互关系，可以更具体地认识运动的具体形式和意义。

2.1 欧几里得平面几何的公理系统

欧几里得公理系统由绝对几何公理组 I ～ IV 再加上欧几里得平行公理 V 构成。用它们建立的几何体系称为欧几里得几何学。我们熟知的初等几何属于欧氏几何的范畴.

欧氏平行公理通常是指欧氏第五公设，但为了应用方便，现在一般采用：

公理Ⅴ（平行公理）通过直线外一点，至多存在一条直线与已知直线不相交。

绝对平面几何学是欧氏平面几何学的一部分，它的所有概念和定理在欧氏几何学中都成立。

公理Ⅴ在欧几里得几何学中占有特殊重要的地位，由它所推出的非绝对几何命题，才是真正的欧几里得命题，显示出欧氏几何的重要特性以及与非欧几何的真正区别。在前四组公理的基础上，平行公理Ⅴ所能推出的命题是非常多的，下面我们举出一些重要事实，说明平行公理Ⅴ的作用，从中看一看欧氏几何学的主要特点。

2．2　欧几里得平行公理的推论

1　关于平行线定理

定义　平面上两条不相交的直线叫做**平行线**，或说两直线平行。

定理2．1　通过直线外一点，有唯一直线与已知直线平行。

关于平行线的存在性已由定理1.32肯定了，它是个绝对几何命题，而唯一性必须有欧氏平行公理才能成立。

定理2．2（平行的传递性）如果两条直线与同一直线平行，则这两条直线平行。

证明　已知直线a、b、c，$a\parallel c$，$b\parallel c$，求证$a\parallel b$。

假设a与b相交于点A，则过A有两条直线a、b与c不相交，这与公理Ⅴ矛盾，所以$a\parallel c$。

定理2．3　两条平行线与一直线相交，则它们构成的同位角相等，内错角相等。

定理2．4　欧几里得第五公设成立。

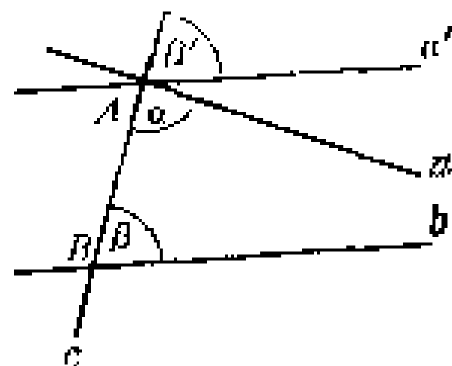


图3·24

证明　已知直线a、b与第三条直线c相交于点A和B，同侧内角α和β的和小于二直角（图3.24）。

假设直线 a 与 b 不相交．过 A 引直线 a'，使同位角 $\beta' = \beta$，则 a' 与 b 不相交。因为 $\alpha+\beta=\alpha+\beta'<2d$，所以 a' 与 a 不相同，因此过 A 有两条直线 a'、a 与 b 不相交，这与平行公理Ⅴ矛盾，所以 a 与 b 相交。

因为 a 在 β 的同傍内角 $\angle BAa'$ 内部，a 与 b 在 α、β 角这一侧相交。否则，如 a 与 b 在另一侧相交于点 C，则 a' 通过 $\triangle ABC$ 内部，根据定理1.10，a' 与 b 相交，这与 a' 与 b 不相交矛盾。

推论 一直线的垂线和斜线一定相交。

2 三角形与多边形内角和定理

在绝对几何里，三角形内角和不大于二直角，有了平行公理Ⅴ就可证明下面定理：

定理2．5 三角形内角和等于二直角。

证明 过 $\triangle ABC$ 的一个顶点 B 引直线 BD 与 AC 平行（图3.25）。根据定理2.3，$\angle A=\angle DBE$，$\angle C=\angle DBC$。

因为 $\angle B+\angle CBD+\angle DBE=2d$

所以 $\angle A+\angle B+\angle C=2d$

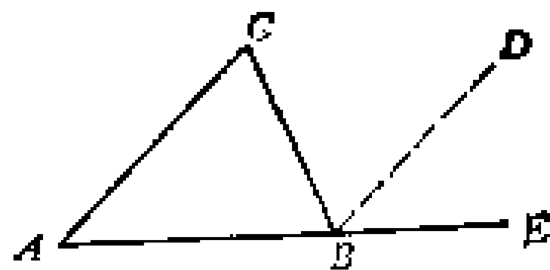


图3·25

推论 三角形的任意外角等于不相邻的两个内角和。

定理2．6 凸 n 边形内角和等于 $2(n-2)d$。

定理2．7 凸 n 边形外角和等于 $4d$。

3 平行四边形的性质

定义 两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形。

定理2．8 平行四边形具有以下性质：

（i）对边相等；

（ii）对角相等；

（iii）对角线互相平分。

定义 有一个内角为直角的平行四边形叫做矩形。

定理2.9 矩形存在，且它的内角都是直角，它的对角线相等。

推论 萨开里四边形是矩形。

定义 两平行线间的公垂线段长叫做两条平行线间的距离。

定理2.10 两条平行线间的距离处处相等。

4 相似形理论

定义 两条线段的比是它们长度的比，用符号$AB:A'B'$，或$\frac{AB}{A'B'}$表示。如果两条线段的比等于另两条线段的比，则四条线段成比例。

定理2.11 两条直线被互相平行的直线所截得的对应线段成比例。

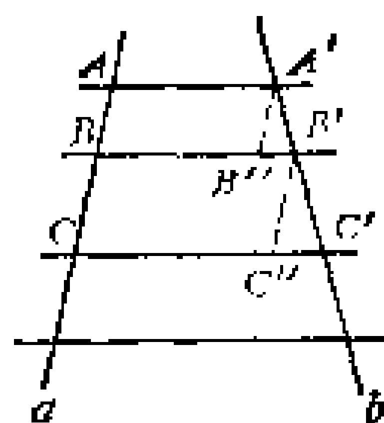


图3·26

证明 已知如图 3.26，其中 $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel \cdots\cdots$. 证明

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\cdots\cdots.$$

如果$AB=BC$，引 $A'B'' \parallel AB, B'C'' \parallel BC$，则$\triangle A'B''B' \cong \triangle B'C''C'$，所以$A'B'=B'C'$。因为两条线段的比等于它们长度的比，显然有

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}=1, \quad 即\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

现在研究一般情形。给出函数

$$y=f(x)$$

其中x是直线a上任一线段的长度，例如AB的长度等等。而y是直线a上的线段经平行截割时在直线b上对应线段的长度，例如$A'B'$等等。这个函数具有下面性质：

（i） x、y都是正数；

（ii）对于直线a上任意两条线段AB、BC的长度为x_1、x_2，它们在直线b上的对应线段$A'B'$、$B'C'$的长度为$f(x_1)$、$f(x_2)$．设 $AC=AB+BC$，由于平行截割的对应点是一一的，它们在直线b上的对应线段必有$A'C'=A'B'+B'C'$．若 AC 的长度为x，$A'C'$的长度为$f(x)$，则$x=x_1+x_2$，$f(x)=f(x_1)+f(x_2)$，所以

$$f(x)=f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2) \qquad (1)$$

现在证明具有（i）、(ii)性质的函数必有$y=ax$（a为正的常数）的形式．

设直线a上的单位线段PQ，它在直线b上的对应线段$P'Q'$，其长度为$f(1)=a$．

现在使原来长度为x的线段AC，对应一个新的正数$u=\dfrac{f(x)}{a}$．我们得出一个新的函数关系：

$$\rho(AC)=\frac{f(x)}{a}$$

可以证明，线段与正数之间的这种新的对应关系也满足长度定义．事实上：

（i）设$AC=EF$，则它们原来有相同的长度x，所以在新对应下必有

$$\rho(AC)=\rho(EF)=\frac{f(x)}{a} \qquad (2)$$

（ii）设$AC=AB+BC$，AB、BC的长度分别为x_1、x_2，且$x=x_1+x_2$．根据关系式（1），有

$$\rho(AC)=\frac{f(x)}{a}=\frac{f(x_1+x_2)}{a}=\frac{f(x_1)}{a}+\frac{f(x_2)}{a}$$
$$=\rho(AB)+\rho(BC)$$

最后，单位线段对应的数为

$$\rho(PQ)=\frac{f(1)}{a}=1$$

可见，数$\frac{f(x)}{a}$也是线段 AC 的长度．因为在同一单位下线段的长度是唯一的，必有

$$x=\frac{f(x)}{a} \quad 或 \quad y=ax$$

函数 $y=ax$ 说明直线 a 上的任意线段的长度与直线 b 上对应线段的长度的比是一个常数（$=a$），即对应线段成比例．

定义 两个多边形的对应角相等，且对应边成比例，则它们叫做相似多边形．相似形用符号"∽"表示．例如相似三角形表示成

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

在相似形中，相等的角是对应角，对应角的对边是对应边．

定理2.12（相似三角形判定定理） 如果两个三角形满足下列条件之一，则它们是相似的：

1° 两对角对应相等；

2° 两对对应边成比例且夹角相等；

3° 三对对应边成比例；

4° 两对对应边成比例且其中大边的对角相等．

这个定理表明相似三角形是存在的．由这个定理可以建立有关相似多边形的定理，这里不列举了．

定理2.13 直角三角形两边的比，只依赖于它的锐角大小．

已知任意两个 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$，$\angle C=\angle C'=d$（图3.27），其中一对对应锐角相等，例如$\angle B=\angle B'$．根据定理2.12，必有$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，由此得出：

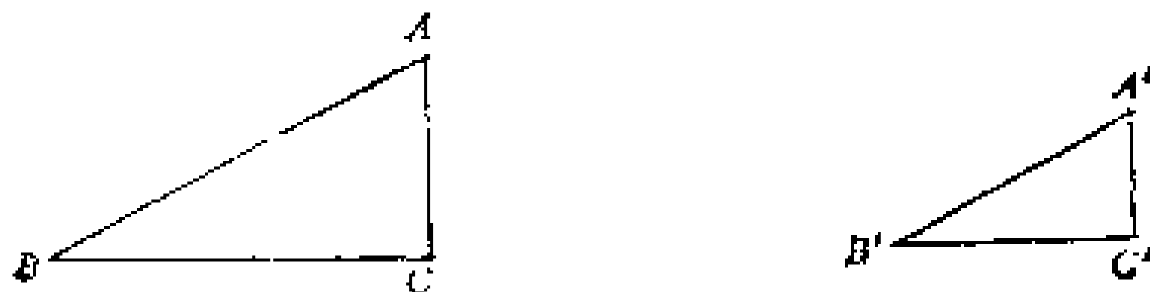


图3・27

$$\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$$

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{A'B'},\quad \frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}$$

因此推出，直角三角形中，如果有一个锐角相等，则两对应边的比总是相等的，就是说比值被锐角决定了。

根据定理2.13，直角三角形两边的比值取决于它的锐角的大小，用这一性质可以给出三角函数的定义，例如

$$\sin B=\frac{AC}{AB},\quad \cos B=\frac{BC}{AB},\quad \mathrm{tg} B=\frac{AC}{BC}$$

这说明，我们在中学所学过的平面三角函数，是属于欧几里得几何学范畴的。

定理2.14（勾股定理）直角三角形斜边的平方，等于直角边的平方和。

证明 如图 3.28，$\angle C=d$. 自点C引斜边AB的垂线CD，垂足为D，则$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，$\triangle BCD\backsim\triangle BAC$，所以得到

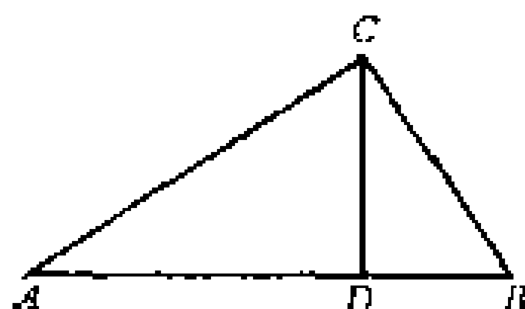


图3・28

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB},\quad \frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}$$

因此有

$$AC^2=AB\cdot AD,\quad BC^2=AB\cdot BD$$

二等式两边相加，得出

$$AC^2+BC^2=AB(AD+DB)=AB^2$$

勾股定理和三角形内角和定理，也是欧氏平面三角学的重要基础。

5 与平行公理有关的圆的性质

定义 顶点在圆心的角叫做**圆心角**。顶点在圆上并且两边都与圆相交的角，叫做**圆周角**。

与圆有关的基本定理比较多，有些是绝对几何命题（限于

篇幅我们没有把它们在前节中列出来）．有些则是非绝对几何的命题，它们只有用平行公理V才能证明，下面举出的就是这些基本定理中的一部分。

定理2.15 通过不共线的三点有且只有一个圆。

定理2.16 圆弧所对的圆周角等于该弧所对圆心角的一半。

这个定理的证明在第二章中已经讲过，而它是从欧氏平行线理论推出的。由定理2.16可以推出一些关于圆的弦、割线和切线所构成角的命题，如“同弧所对的圆周角相等。”“直径所对圆周角为直角”以及弦切角定理等等，这里不一一列举。

定义 顶点在圆上的n边形，叫做**圆内接n边形**

定义 与圆只交于一点的直线叫做圆的**切线**，公共交点叫做**切点**。与圆相交于两点的直线叫做圆的**割线**。

定理2.17 圆内接四边形对角互补。

定理2.18 （相交弦定理） 圆的弦相交于圆内一点，各弦被这点内分成的两个线段长的乘积相等。

定理2.19 （切割线定理）圆的弦延长相交于圆外的一点，各弦被这点外分（分点在延长线上）成的两线段的乘积相等，并且等于这点到圆的切线长的平方。

定理2.18和2.19的证明，主要应用了相似形三角形的性质。

定理2.20 圆的周长与其直径的比是一个常数。

定义 圆的周长与其直径的比叫做**圆周率**。它的值是无理数，即

$$\pi = 3.1415926535897\cdots\cdots$$

6 多边形面积理论

多边形面积理论是与平行公理V有关的，而且是一个较复杂的理论问题。下面简要地介绍欧氏几何面积理论的一些问

题。

定义 多边形的面积是满足下面条件的正数：

（ⅰ）如果两个多边形相等，则它们的面积相等（面积不变性）；

（ⅱ）如果将一个多边形分为两个多边形，则这个多边形的面积等于分成两个多边形的面积和（面积可加性）；

（ⅲ）存在一个多边形面积为1（单位面积）。

多边形面积的定义，类似于线段长度的定义。多边形面积的计算问题，主要是转化为线段长度的运算。

选出边长为1的正方形作为面积单位，对于一些特殊多边形，如果面积存在，则可以得到如下的一些定理：

（1）矩形的面积等于底和高的乘积。

（2）平行四边形的面积等于底和高的乘积。

（3）三角形的面积等于底和高乘积的一半。

（4）梯形的面积等于上下底之和与高乘积的一半。

一般多边形的面积是用三角剖分来定义的，即将任意多边形剖分成有限个三角形，然后将这些三角形面积之和定义为多边形的面积。我们可以证明这样定义的多边形面积，与多边形三角剖分的方法无关，并且这样定义的面积符合面积定义的"不变性"和"可加性"的条件。也就是证明如下的定理：

定理2.21 如果取定面积单位，则每个多边形都对应一个正数作为它的面积，而且这个数是唯一的。

这个定理的证明需要许多予备知识，证法比较复杂，这里就不证明了，读者可参考钱端壮编《几何基础》（高等教育出版社）134页。

定理2.18解决了多边形面积的存在性。当然也肯定了矩形、平行四边形、三角形及梯形面积的存在性和唯一性。这样面积理论才得以严整的建立起来，这种面积理论是建立在欧氏平行公理的基础上。

到现在为止，欧氏平面几何的公理系统Ⅰ—Ⅴ组公理全部讲完了，并分别在各组公理后介绍一些能够体现各组公理作用的重要推论.在其它几何教程里,各组公理的提出不一定都按照我们这里的顺序,常把平行公理尽早的提出来,这样可以较早的解决直线的相互位置关系，使有些问题的处理变得简单些.我们所以采用这样的顺序，主要为了严格区分绝对几何命题与非绝对几何命题的界限，为第三节罗氏几何的建立创造条件，因为绝对几何也是罗氏几何的一部分；同时也便于比较两种几何结构的逻辑相关性.

2.3 平行公理Ⅴ的等价的命题

定义 对于公理系统Σ，如果命题A和B具有这样的关系：$\Sigma+A$可以推出B，而$\Sigma+B$又可以推出A，则称命题A和B对于公理系统Σ是等价的.

我们在第二章2.2中提出的命题等价性，也符合这个定义，但是那是一种特殊的等价关系.

与平行公理Ⅴ等价的命题A，指的是公理Ⅴ和命题A对于绝对几何公理系统下的等价.按等价的定义就是要证明下面两个事实：

1° 绝对几何公理系统Ⅰ－Ⅳ＋Ⅴ$\Rightarrow A$；

2° 绝对几何公理系统Ⅰ－Ⅳ＋$A\Rightarrow$Ⅴ.

我们在第一章里曾提到过一些与平行公理Ⅴ等价的命题，但在那里没有证明，下面把其中一些作为定理加以证明.与平行公理Ⅴ等价的命题都可以代替平行公理Ⅴ建立欧氏几何学.

定理2.22 欧几里得第五公设与平行公理Ⅴ等价.

证明 1° 绝对几何公理系统＋平行公理Ⅴ$\Rightarrow$第五公设.

这就是前面已证明过的定理2.4.

2° 绝对几何公理系统＋第五公设$\Rightarrow$平行公里Ⅴ.其证法是：

已知直线a和其外一点A，过点A作直线a的任意斜线

b，与直线 a 相交于点 B。过点 A 作一直线 c 使同位角 $\alpha'=\alpha$（图3.29），则直线 c 与 a 不相交。过点 A 引任意一条与直线 c 不相同的直线 m，则在直线 b 的某一侧必出现同侧内角和小于二直角的情形，例如图3.29中的 $\alpha+\beta<2d$。因为第五公设成立，必有直线 m 与 a 相交的结果，因此过点 A 仅有直线 c 与直线 a 不相交，即公理Ⅴ的结论成立。

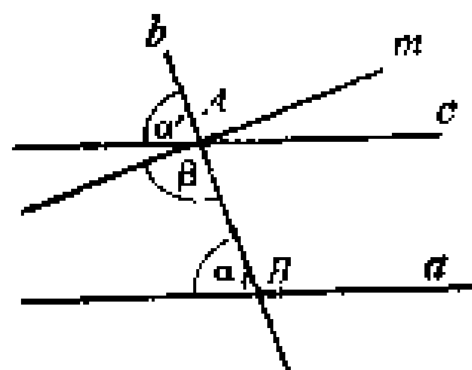


图 3·29

定理2.23 勒让德第一命题"一条直线的垂线与斜线必定相交"与公理Ⅴ等价。

本定理的证明与定理2.22的证法基本相同。

定理2.24 命题"任意三角形内角和等于二直角"与公理Ⅴ等价。

证明 1° 由公理Ⅴ推出"三角形内角和等于二直角"，就是前面已证明过的定理2.5。

2° 由"任意三角形内角和等于二直角"推出平行公理Ⅴ成立。

因为我们在第一章1.4段中讲过了勒让德的证明，即承认"三角形内角和等于二直角"证明第五公设成立，再根据定理2.22，则平行公理Ⅴ也成立。

定理2.24还可以减少条件，变成如下定理：

定理2.25 萨开里——勒让德第二命题"平面上只要存在一个内角和等于二直角的三角形"与平行公理Ⅴ等价。

定理2.26 伏.鲍耶（W.Bolyai 1775～1856）命题"过平面上任意三个不共线的点一定可以作圆"与平行公理Ⅴ等价。

证明 1° 公理Ⅴ成立则伏·鲍耶命题成立，就是前面的定理2.15。

2° 如果伏.鲍耶命题成立，证明平行公理Ⅴ成立。

设 PQ 是直线 AB 的垂线，RS 是直线 AB 的斜线（图3.30）。

在线段 PR 上任取一点 B，并分别作点 B 关于 RS 的对称点 C，关于 PQ 的对称点 A。因为直线 RS 是 AB 的斜线，点 C 不在直线 AB 上，于是过点 A、B、C 三点可以作一圆。因为 PQ 和 RS 分别是线段 AB 和 BC 的中垂线，所以 PQ 和 RS 必通过这个圆的圆心 O，即 PQ 与 RS 相交于一点 O。根据定理2.23公理V成立。

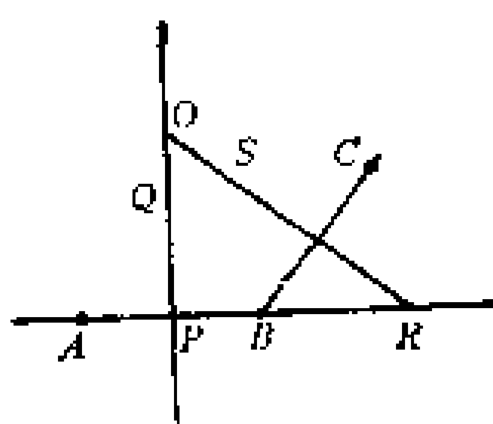


图3·30

定理2.27 命题"三角形的三条高必交于一点"与平行公理V等价。

1° 由公理V证明前一命题成立，证明从略。

2° 如果承认"三角形的三条高必交于一点"则公理V成立。

设 PQ、RS 为直线 PR 的垂线和斜线。在 RP 的延长线上任取一点 A_1，由 A_1 引 RS 的垂线 A_1B_1，B_1 为垂足（图3.31），根据点 B_1 的位置，有下面三种情形：

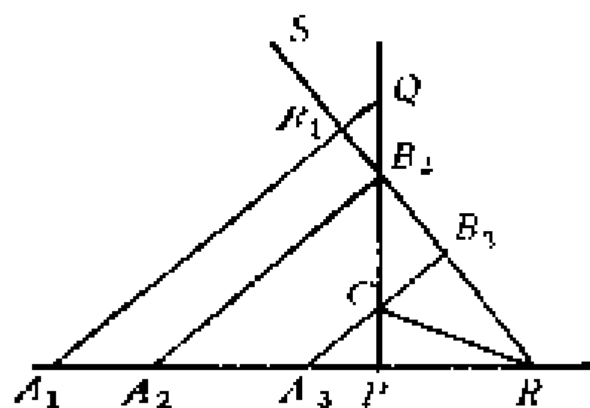


图3·31

若点 B_1 和 R 落在 PQ 的异侧，则 RS 与垂线 PQ 相交。

若点 B_2 落在 PQ 上，当然 RS 与 PQ 相交于 B_2 点。

若点 B_3 和 R 落在 PQ 的同侧，这时 A_3B_3 与 PQ 有交点 C。在 $\triangle A_3CR$ 中，CP 是 A_3R 边上的高，RB_3 是 A_3C 边上的高，因此它们必相交于一个点，即 PQ 与 RS 相交。这就证明了垂线 PQ 与斜线 RS 总相交，再根据定理2.23，平行公理V成立。

定理2.28 命题"共面且不相交的两条直线被第三条直线所截，构成的同位角总相等。"与平行公理V等价。

2.4 运动的具体形式

运动公理Ⅱ中的基本概念——运动，是比较抽象的，实际上它是以下所讲的具体运动（或特殊运动）或者是它们的合成。

1　直线反射（轴对称）

直线反射的定义我们在§1中已给出。它有以下性质：

（1）直线反射的逆运动是同一个直线反射。

（2）关于同一轴的两条直线反射的积是恒等运动。

（3）在直线反射下，对应直线或者交于轴上的同一点或者都与轴平行。

（4）直线反射由反射轴完全确定。

实际上，反射轴确定后，任一点A的对应点 A' 由公理 II_5 唯一确定。

2　平移

定义　如果运动的每一对对应点A和 A' 连结的有向线段AA'都平行、相等而且有同方向，则这种运动叫做平移

有向线段AA'叫做平移向量，记作$\overrightarrow{AA'}$，其方向叫做平移方向。平移有以下性质：

（1）平移的逆运动仍是平移。

（2）两个平移的积仍是平移。

（3）在平移下，对应直线平行。

（4）平移由一对对应点完全确定。

（5）每个平移可以表示为两次直线反射的积，反射轴垂直于平移方向，而且其中一个轴可以任意选取。

实际上，设平移T由一对对应点A、A'确定，以垂直于平移向量$\overrightarrow{AA'}$的任意直线s_1作为第一个反射轴。设A在 s_1 为轴的反射下对应点为A_1。再取线段A_1A'的垂直平分线s_2为第二个反射轴，则以s_2为轴的反射把点A_1变为A'，并且有向线段AA'长等于两个平行的反射轴s_1、s_2间距离的二倍，是一个定长，对任何对应点A、A'都有同一方向，所以两个反射的积是平移T。

3　旋转

定义　如果运动的任意一对对应点A、A'与平面上一个定

点O的距离都相等，而且$\angle AOA'$等于确定的有向角φ，则这种运动叫做关于点O的旋转。

点O叫做旋转中心，有向角φ叫做旋转角。

关于点O的旋转有以下性质：

（1）旋转的逆运动仍是一个旋转。（旋转中心为O，旋转角为$-\varphi$）

（2）旋转由中心与一对对应点完全确定。

（3）每个旋转可表示为两次直线反射的积，反射轴通过旋转中心，并且其中一个轴可以取过中心的任意直线。

（4）任意两个旋转的积是旋转或平移。

上面所讲的三种运动都是运动的特殊形式，一般的运动都可以表示成这三种特殊运动之积的形式。

如图3.32所示，两个三角形$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$顶点沿周界的转动方向相同，叫做同向三角形，而$\triangle ABC$与$\triangle A''B''C''$沿周界的转动方向相反，叫做反向三角形。

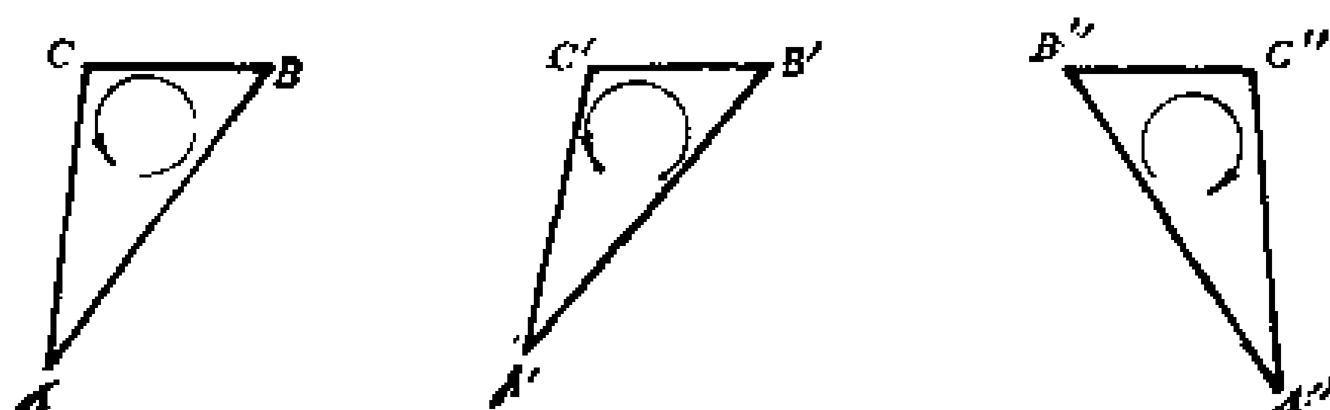


图3·32

定义 把一个三角形变为同向三角形的运动叫做第一种运动；把一个三角形变为反向三角形的运动叫做第二种运动。

定理2.29 每个运动都可以表示为不多于三次直线反射的积。

定理2.30 每个第一种运动或者是平移或者是旋转；第二种运动或者是平移与直线反射的积或者是旋转与直线反射的积。

§3 罗巴切夫斯基平面几何学的结构

本节首先给出罗巴切夫斯基平面几何学的公理系统：绝对平面几何学公理组Ⅰ—Ⅳ，加上罗巴切夫斯基平行公理$\overline{\text{Ⅴ}}$。然后在此基础上建立罗氏平面几何学的结构。因为绝对几何的内容已在§1里给出，其定义、定理都可以移过来作为已知事实，所以在这个基础上着重研究罗氏平行公理所能推导出来的一系列定理，这部分定理可以称为真正的罗巴切夫斯基几何定理。这里所讲的仅是最基本的知识。最后讲一讲欧氏、罗氏、黎氏三种几何的对立统一关系。

我们的目的，主要让读者开阔视野，解放思想，了解几何空间的多样性；进一步熟悉公理法的具体运用；同时只有站在欧氏几何之外，通过与非欧几何的对比，才能进一步掌握欧氏几何的特点。

3.1 罗巴切夫斯基平面几何的公理系统及简单推论

罗氏平面几何学的公理系统由下列五组公理（计17条）构成：

结合公理Ⅰ_{1-3}；

顺序公理Ⅱ_{1-5}；

运动公理Ⅲ_{1-6}；

连续公理Ⅳ_{1-2}；

罗巴切夫斯基平行公理$\overline{\text{Ⅴ}}$：通过直线外的每一点，至少存在两条直线与已知直线不相交。

罗氏几何的原始元素称为“点”和“直线”，但由于罗氏平行公理与欧氏平行公理截然不同，因此两种平面是不同的，两种直线也是不同的。

根据罗氏平行公理$\overline{\text{Ⅴ}}$和绝对几何定理，首先可以推出下面一些定理。

定理3．1 两条不相交的直线被第三条直线所截，同位角不一定相等，内错角不一定相等。

证明 已知直线 a 和直线 b 不相交，直线 c 与 a 、b 分别交于点 A、B，构成的同位角为 α 和 β（图3.33）。

用反证法。假设任何两条不相交直线被第三条直线截得的同位角总相等，即 $\alpha=\beta$，则欧氏平行公理必成立（参照定理2.28），这与罗氏平行公理 $\overline{\text{V}}$ 矛盾，所以同位角不能总相等。

仿照定理 3.1 的证法（即用反证法）同样可以证明以下各定理。

定理3．2 同一直线的垂线与斜线不一定相交。

定理3．3 三角形内角和小于二直角。

定理3．4 过不共线的三个点不一定存在外接圆。

定理3．5 不存在一般（不全等的）相似三角形。

证明 假设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是不全等但相似的三角形，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$（图3.34）。

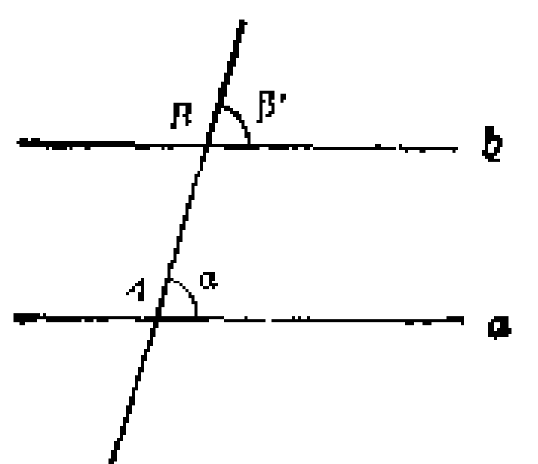


图3・33

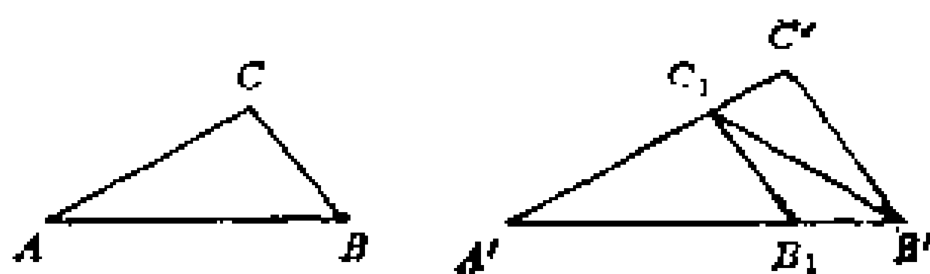


图3・34

将 $\triangle ABC$ 移到 $\triangle A'B'C'$ 上的 $\triangle A'B_1C_1$ 位置。因为 $\angle A'C_1B_1=\angle C'$，$\angle A'B_1C_1=\angle A'B'C'$ 所以四边形 $B_1B'C'C_1$ 的内角和等于$4d$。连 C_1B'，根据定理1.40 $\triangle B_1B'C_1$ 与 $\triangle B'C'C_1$ 的内角和都不能大于$2d$，两三角形的内角和只有各等于$2d$，才能使四边形内角和等于$4d$，这与定理3.3矛盾，于是定理得证。

定理 3.6 的证明也说明了两个三角形如果内角对应相等，则两个三角形必全等。

定理3.6 三角形三条高不一定交于一点。

定理3.7 萨开里四边形的上底角小于直角。

证明 根据定理1.43，萨开里四边形上底角不能大于直角。萨开里四边形的上底角也不能等于直角，否则就存在内角和等于二直角的三角形，这与定理3.3矛盾。

这个定理说明罗氏平面上不存在矩形。

3.2 罗氏平面上直线的相互位置

从罗氏平行公理$\overline{V}$容易推出：

定理3.8 通过已知直线外任意一点，有无数多条直线与已知直线不相交。

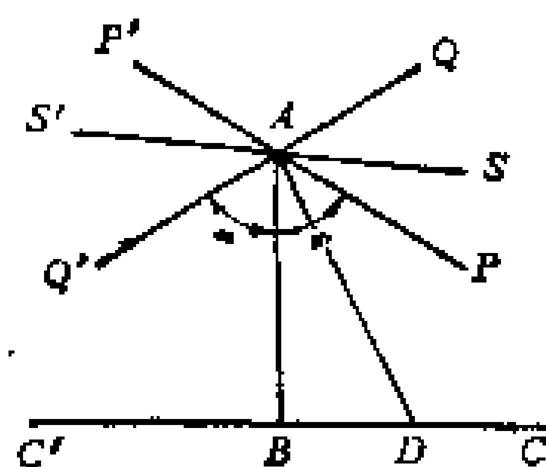


图3·35

证明 设直线$P'P$与直线$Q'Q$是两条通过已知点A且与已知直线CC'不相交的两条直线(图3.35)。如果直线SS'是通过点A且在$\angle PAQ$内部的任意直线，则直线SS'与直线CC'不相交。因为假设直线SS'与直线CC'相交，则根据本章定理1.10，直线$P'P$必与直线CC'相交，这与已知直线$P'P$与直线CC'不相交矛盾，所以过点A且在$\angle PAQ$内部的所有直线都与直线CC'不相交。

1 平行线的定义和性质

如果象欧氏几何那样把平面上两条不相交直线叫做平行线，那么通过直线外一点将存在与已知直线平行的无穷多条直线，这样的平行线显然不满足传递性，否则通过直线外一点的所有与已知直线不相交的直线，彼此都成为平行的了，但实际它们交于一点。因此需要重新建立平行线的概念。这种平行线要满足对称性和传递性，面且这个平行线定义最好能同时适用于罗氏几何和欧氏几何。为此本段把问题的讨论限制在绝对几何范围。

下面讨论罗巴切夫斯基平行线的定义。

已知直线 $C'C$ 和不在它上面的一点 A（图3.35），从 A 向 $C'C$ 引垂线，垂足为 B。直线 AB 将平面分成左、右两个半平面。过点 A 在右（或左）半平面可引无数条半线（射线），根据绝对几何的顺序关系，这些半线可以建立起以半线 AB 为第一条（即最前面一条）的逆时针（或顺时针）旋转的顺序。

现在考察右半平面的半线。根据绝对几何定理1.32，在这些半线中一定存在一条例如半线 AS 与直线 $C'C$ 不相交，面按逆时针顺序在 AS 后面的半线也都与直线 $C'C$ 不相交，例如半线 AQ 等。因为如果它们与直线 $C'C$ 相交，则半线 AS 也与直线 $C'C$ 相交，这与半线 AS 不与直线 $C'C$ 相交矛盾。显然在右半平面的这些半线中也有许多与直线 $C'C$ 相交，这只要在半线 BC 上任取一点 D，则半线 AD 就是这样的半线。下面给出平行半线和平行线的定义。

定义 在右半平面上将过点 A 的所有半线建立逆时针旋转顺序，如果在所有与直线 $C'C$ 不相交的半线中存在最前面（即第一条）的半线 AP，则称半线 AP 平行于直线 $C'C$，并称包含半线 AP 的直线 $P'P$ 沿着半线 AP 的方向平行于直线 $C'C$。

同理，将左半平面上以 A 为端点的半线，建立以半线 AB 为第一条的顺时针旋转顺序后，如果在所有与直线 CC' 不相交的半线中存在最前面的一条半线 AQ'，则称半线 AQ' 平行于直线 $C'C$，并称包含半线 AQ' 的直线 QQ' 沿着半线 AQ' 的方向平行于直线 $C'C$。垂直线段 AB 称为点 A 关于直线 $C'C$ 的平行距。$\angle BAP$ 或 $\angle BAQ'$ 称为点 A 关于直线 $C'C$ 的平行角，或称平行距 AB 对应的平行角。

我们虽然引进了平行半线的概念，但还不能就断定平行半线存在，为此还必须证明它的存在性。

定理3.9（平行半线存在定理）通过直线 $C'C$ 外一点 A，有且只有两条半线平行于直线 $C'C$，它们关于点 A 的平行距所在直线对称。

证明 已知如图3.35所设．首先在右半平面上，按上述办法将通过点A的半线规定前后顺序．然后将这些半线分为两类：将所有和直线 $C'C$ 相交的半线作为第一类；所有和直线 $C'C$ 不相交的半线作为第二类．显然这一分类满足戴德金分类条件，即每一条半线属于且只属于一个类，每一个类里都含有半线，而且第一类里的任意半线都在第二类里任意半线的前面．根据定理1.37存在一条半线 AP，它或者是第一类里最后一条或者是第二类里最前面一条．但是第一类里没有最后半线，因为如果半线 AP 与直线 $C'C$ 相交于 P 点，则在直线 $C'C$ 上点 P 的右侧，必存在一点 P_1，使得半线 AP_1 与直线 $C'C$ 相交又在半线AP之后，因此半线AP是第二类里最前面的一条半线，即与直线$C'C$不相交的第一条半线．

显然在右半平面上，与直线 $C'C$不交的半线中，最前面的一条有唯一一条．

将右半平面上通过点A的所有半线以直线 AB 为对称轴翻转到左半平面上，半线 BC 变成半线 BC'，每条以A为端点的半线都变成左半平面上以A为端点的半线，原来逆时针的旋转顺序，也将变成顺时针的旋转顺序．右半平面上与半线 BC 相交的半线变成左半平面上与半线 BC'相交的半线，右半平面上与半线 BC 不相交的半线也变成左半平面上与半线 BC'不相交的半线．设半线AP的对称半线为 AQ'，则 AQ'为左半平面上第一条与直线 $C'C$ 不相交的半线．否则设半线 AQ'' 为左半平面上按着规定的顺序第一条与直线 $C'C$ 不相交，它必在半线 AQ'的前面，半线 AQ''的对称半线必落在半线 AP 的前面，它将与直线 $C'C$ 相交，这是不可能的．所以半线 AQ' 平行于直线$C'C$．

上述两条成对称的平行半线是否不共线尚不可知．如果欧氏平行公理Ⅴ成立，则两半线必共线（否则过A将有两条直线与直线$C'C$不相交，这与公理Ⅴ矛盾）．如果承认罗氏平行公

理$\overline{\mathrm{V}}$，则两半线不共线（否则过A将有唯一直线与直线$C'C$不相交，这与公理$\overline{\mathrm{V}}$矛盾）．可见在欧氏平面上过A只有一条直线在两个方向上平行于已知直线，而在罗氏平面上过点A有两条不同的直线在不同的方向上平行于直线$C'C$，这两条直线关于平行距对称，对应的平行角相等．

定义 如果一条直线上的点沿此直线的一个方向运动，并且这个点到另一直线的距离无限增大，即大于事先给定的任意大的线段，就说这条直线在这个方向上与另一直线离散．否则就说这两直线在这方向上与另一直线不离散．

根据定义可知，相交直线在交点的两个不同方向上离散（定理1.45）．一条直线上的点如果沿此直线的一个方向运动，这个点到另一直线的距离总保持有限，即不大于某个确定的线段，则这条直线显然在这个方向上与另一条直线不离散．

下面给出一条直线在某一方向上平行于已知直线的重要判定定理．

定理3.10 一条直线在一定方向上平行于已知直线的充分且必要条件是在平行方向上与已知直线不离散．

证明 **必要性**．设已知直线上的半线AP与已知直线BC平行（图3.36）．过A作BC的垂线，垂足为B，过P作BC的垂线，垂足为C．再从点A向直线PC引垂线AF，垂足为F．BC与AF同时垂直于直线FC，它们必不相交．按照建立平行线时所规定的顺序，半线AF不能在半线AP的前面，因此点P在点C、F之间，或与F重合，必有$\angle APC \geqslant \angle AFC = d$（式中的等号是点$F$与$P$重合的情形）．又从$\angle BAP \leqslant d$，所以得出$\angle APC \geqslant \angle BAP$，根据定理1.42，则$PC \leqslant AB$，而且$P$点在半线$AP$上的任何位置都成立，即$P$在半线$AP$的任何位置，$P$到直线

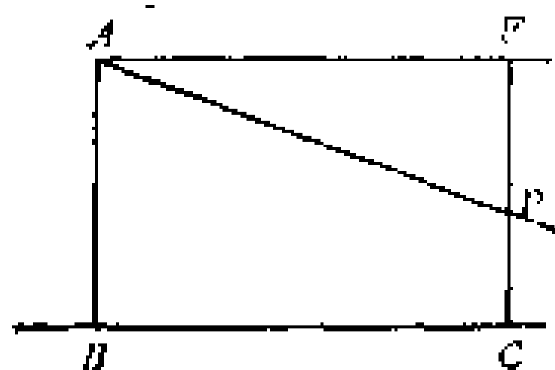


图3·36

BC的距离PC总是有限的，所以直线AP与直线BC在AP方向上不离散。

充分性．设直线AP在AP方向上与直线BC不离散．根据定理3.9，过点A存在一条半线AP_1平行于直线BC．我们来证明半线AP_1与半线AP重合．

半线AP与半线AP_1有三种可能的位置关系：（i）半线AP在半线AP_1之前；（ii）半线AP在半线AP_1之后；（iii）半线AP与半线AP_1重合．

如果有（i）的位置关系，根据平行线定义，半线AP与直线BC相交，根据定理1.45，半线AP与直线BC离散，这与已知矛盾．

如果有(ii)的位置关系（图3.37），从半线AP上任一点P分别向直线AP_1和直线BC引垂线，垂足分别为P_1、C．连结AC，因为半线AP_1通过$\triangle ACP$的内部，根据定理1.10，直线AP_1与PC交于一点Q，而有$PC=PQ+QC$．由于斜线段大于垂直线段，$PC>PP_1$，当点P沿AP方向运动时，PP_1可以任意大，因此半线AP与直线BC离散，这与已知矛盾．

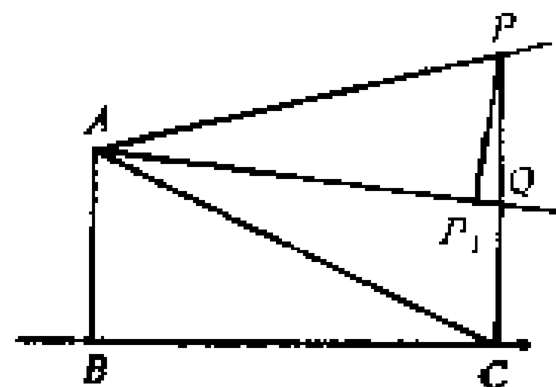


图3·37

既然（i）、(ii)两种情形都不成立，只有(iii)成立，所以直线AP沿半线AP的方向平行于直线BC．

从罗氏平行线定义来看，直线$P'P$与直线$C'C$在半线AP方向上平行，似乎与特定的点A有关．其实并不这样，我们可以证明，对于直线$P'P$上的任何一点A_1，直线$P'P$仍在这一方向上平行于直线CC'．

定理3.11　如果直线$P'P$对于其上一点A沿着半线AP方向平行于直线$C'C$，则对于它上面的任何一点A_1，仍然沿着同一方向平行于直线$C'C$．

证明　设直线$P'P$沿着AP方向平行于直线$C'C$，点A_1为

直线 $P'P$ 上任意一点。

若A_1落在半线AP上，半线 A_1P 与半线 AP 有无限的公共部分。因为半线 AP 平行于直线 $C'C$，其上的任何点到直线 $C'C$ 的距离始终是有限的，所以 A_1 沿半线 A_1P 方向运动时，A_1 到直线 $C'C$ 的距离始终是有限的，即半线 A_1P在与半线AP重合的方向上与直线 $C'C$ 不离散，从而直线 $P'P$ 在半线 A_1P 方向上与直线 $C'C$ 平行。

若 A_1 落在半线 AP' 上，半线 A_1P 与半线 AP 除了有公共半线 AP 外，还有一部分是有限的 A_1A 部分(图3.38)。当点M是有限线段A_1A上的任何一点，它到直线的距离始终是有限的，从而点 A_1 沿半线 A_1P 方向运动时，A_1 到直线 $C'C$ 的距离始终有限，即直线 $P'P$在半线 A_1P 的方向上与直线 $C'C$平行。

既然一条直线$P'P$在半线 AP 的方向上平行于直线 $C'C$ 与直线 $P'P$ 上方向半线 AP 的端点A的取法无关，而只注意方向性这一特征，今后可以省去"沿半线 AP 方向"的提法，只称"直线 $P'P$ 平行于直线 $C'C$"，这里直线 $P'P$ 与直线$C'C$ 字母的顺序指示该平行关系是从第一个字母到第二个字母的方向上平行。而直线PP' 平行于直线$C'C$ 表示在相反的方向上平行。

现在证明罗氏平行线满足对称性和传递性。

定理 3.12 （平行线的对称性）如果直线 $P'P$ 平行于直线$C'C$，则直线 $C'C$ 平行于直线 $P'P$。

证明 设直线 $P'P$ 平行于直线 $C'C$，在直线 $P'P$ 上任取一点 A，从 A 向直线 $C'C$ 作垂线 AB，垂足为 B（图3.39）。

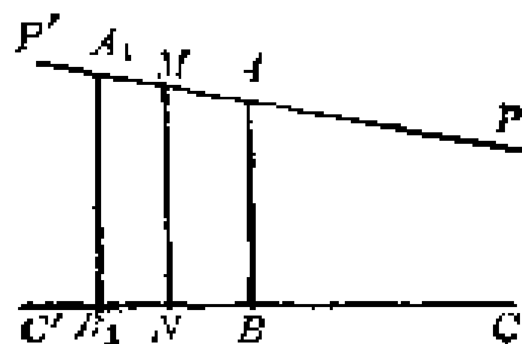


图3·38

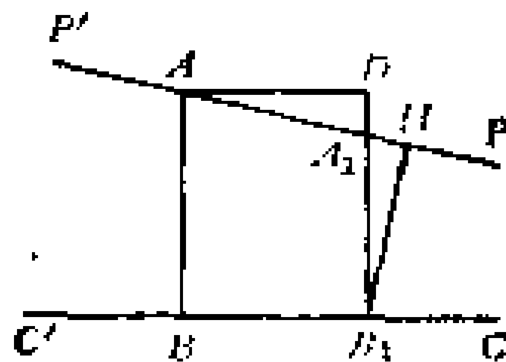


图3·39

我们来证明 B 沿半线 BC 方向运动时，半线 BC 与直线 $P'P$ 不离散。

当点 B 沿半线 BC 方向运动到点 B_1，从点 B_1 向直线 $P'P$ 作垂线，垂足为 H；从点 B_1 作直线 $C'C$ 的垂线 B_1D，再从点 A 作直线 B_1D 的垂线，垂足为 D。因为半线 AD 与直线 $C'C$ 不相交（同时垂直于直线 B_1D），半线 AP 落在半线 AD 的前面（半线 AP 是第一条与直线 $C'C$ 不相交的半线），B_1、D 落在半线 AP 的不同侧，所以半线 AP 与线段 B_1D 交于一点 A_1，而且不论 B_1 运动到任何位置都存在。因为 $B_1H \leqslant A_1B_1$，且 A_1B_1 始终是有限的，所以 B_1H 始终是有限的，即直线 $C'C$ 在半线 BC 的方向上与直线 $P'P$ 不离散，所以直线 $C'C$ 在 BC 方向上与直线 $P'P$ 平行。

根据对称性，今后两条平行线可以写成"直线 $P'P \parallel$ 直线 $C'C$"，表示直线 $P'P$ 平行于直线 $C'C$，面直线 $C'C$ 也平行于直线 $P'P$。

定理3.13 （平行线的传递性）如果直线 $Q'Q$ 与直线 $R'R$ 分别平行于直线 $P'P$，则直线 $Q'Q$ 和直线 $R'R$ 也沿着它们与直线 $P'P$ 平行的同一方向互相平行。

证明 根据平行线的对称性，直线 $P'P$ 平行于直线 $Q'Q$ 和 $R'R$。从直线 $Q'Q$ 上任一点 B 分别向直线 $P'P$ 和 $R'R$ 作垂线，垂足为 A 和 C（图3.40）；从 A 向直线 $R'R$ 作垂线，垂足为 D。则 $BD \leqslant AB + AD$，且和直线 $Q'Q$ 与 $R'R$ 在直线 $P'P$ 的同侧或异侧无关。因为 $BC \leqslant BD$，而且当点 B 沿 $Q'Q$ 方向运动时，线段 AB 与 AD 始终是有限的，所以点 B 到直线 $R'R$ 的距离 BC 也始终是有限的，即直线 $Q'Q$ 与直线 $R'R$ 在半线 BQ 的方向上不离散，所以直线 $Q'Q$ 平行于直线 $R'R$。

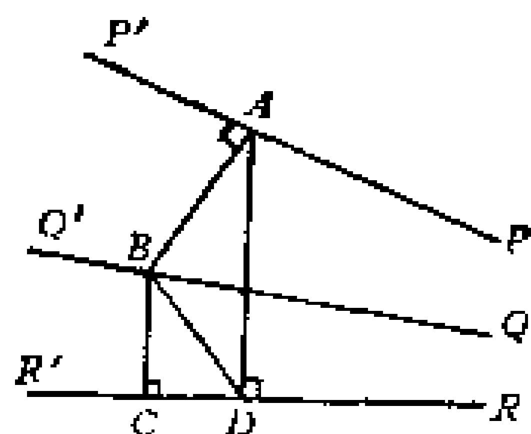


图3·40

以上所讲的内容并未用到罗氏平行公理$\overline{\text{V}}$，纯属绝对几何内容，因而也适用于欧氏几何学。由于欧氏平面上，过直线外一点存在唯一直线与已知直线不相交，根据本节所讲的平行线定义，它在两个方向上都平行于已知直线，其平行角是直角。

2　罗巴切夫斯基函数及性质

在以上讨论过的平行线理论基础上，如果引进罗氏平行公理$\overline{\text{V}}$，可以导出罗氏平行线的进一步性质，显示出罗氏平行线与欧氏平行线极大的不同之处，这主要体现在平行角与平行距的关系上面，以及其他一些性质。

定理3.14　罗氏平行线上任意点所对应的平行角都是锐角。

证明　设直线 $P'P \parallel$ 直线 $C'C$，A 为直线 $P'P$ 上的任意点，AB为平行距，$\angle BAP = \omega$为A所对应的平行角(图3.41)。

首先证明 $\omega \neq d$。假设 $\omega = d$，则半线 AP 关于直线 AB 的对称半线 AQ 也平行于 $C'C$，且半线 AP 与半线 AQ 构成同一条直线，这时过点A的任何与直线 QAP 不同的直线都与直线 $C'C$ 相交，这与罗氏平行公理$\overline{\text{V}}$矛盾。

其次证明$\omega \not> d$，即平行角不能是钝角。假设 $\omega > d$，则过A存在一条与AB垂直的半线，它在$\angle BAP$ 内部且与直线$C'C$不相交，这时半线AP不是第一条与直线 $C'C$ 不相交的半线，这与半线 AP 平行于直线 $C'C$ 矛盾。

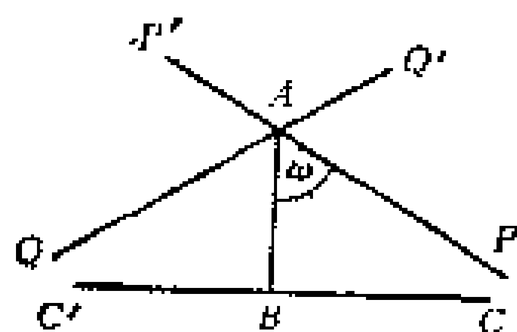


图3・41

综上所证，我们得出 $\omega < d$。

从这个定理的前半部分证明中看出，如果平行角等于直角，则欧几里得平行公理成立。实际上平行角为直角的假设与欧氏平行公理等价。

推论　过直线外任意一点，存在两条直线在不同方向上分别平行于已知直线，这两条直线关于已知直线的平行角相等。

定理3.15 在平行关系中，两平行距相等，则它们对应的平行角相等；两平行距不等，则对应的平行角不等，平行距越大对应的平行角越小.

证明 设在同一半平面上半线 A_1P_1 和半线 A_2P_2 分别平行于直线 BC，平行距 A_1B、A_2B 对应的平行角分别为 ω_1、ω_2，且 $A_2B > A_1B$（图3.42）.

（1）设 $\omega_2 > \omega_1$. 在 $\angle BA_2P_2 = \omega_2$ 内引半线 A_2P，使 $\angle BA_2P = \omega_1$，则半线 A_2P 与半线 A_1P_1 不相交. 另一方面，因为半线 A_2P_2 平行于直线 BC，在它前面的半线 A_2P 必与直线 BC 相交，设交点为 C，这时 A_2 与 C 在直线 A_1P_1 的不同侧，半线 A_2P 与半线 A_1P_1 相交，于是出现了半线 A_2P 既与半线 A_1P_1 不相交又与半线 A_1P_1 相交的矛盾. 所以 ω_2 不能大于 ω_1.

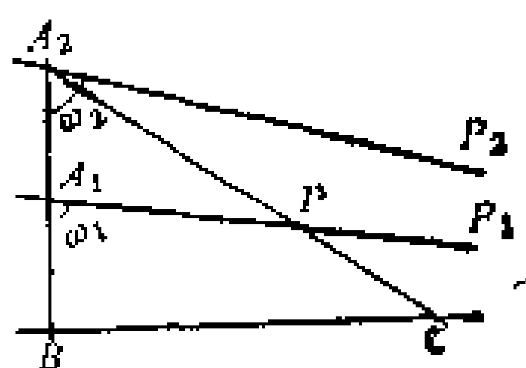


图3. 42

（2）设 $\omega_2 = \omega_1$. 取 A_1A_2 的中点 O，从点 O 分别向直线 A_2P_2 和直线 A_1P_1 作垂线，垂足为 M、N（图3.43）. 因为 $\angle OA_1N = \angle BA_1P_1 = \angle BA_2P_2$，$\angle ONA_1 = \angle OMA_2 = d$，$OA_1 = OA_2$，所以两直角 $\triangle OMA_2 \cong \triangle ONA_1$，$\angle MOA_2 = \angle NOA_1$，于是点 M、O、N 共线，MN 为直线 A_2P_2 与 A_1P_1 的公垂线. 根据平行传递性，直线 $A_2P_2 \parallel A_1P_1$，$\angle NMP_2$ 是对应于平行距 MN 的平行角，但 $\angle NMP_2 = d$，这与平行角为锐角矛盾. 综上所证必有 $\omega_2 < \omega_1$.

当 $A_1B = A_2B$ 时，请读者自证之.

当两对平行线处于任何的位置时，总可以经过运动移成图3.42的位置关系，再进行证明.

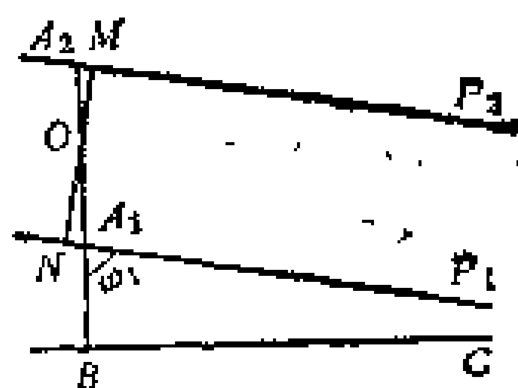


图3. 43

上述两个**定理**说明，每一个平行

距对应一个平行角，相等的平行距对应相等的平行角，不同的平行距对应不同的平行角，平行距越大对应的平行角越小。下面证明每一个锐角都可以作为平行角而对应一个确定的平行距。

定理3.16 对于每个锐角，总存在一个平行距，使这个锐角是它所对应的平行角。

证明 已知锐角$\angle AOB$(图3.44)

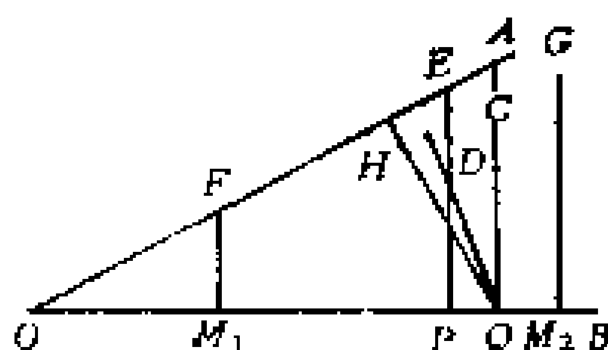


图3.44

首先证明：在边OB上一定存在点M_1，使过点M_1且与OB垂直的直线M_1F与边OA相交。这只要在边OA上任取一点F，过F作OB的垂线，垂足为M_1，则M_1就是这样的点。

其次证明：在边OB上一定存在点M_2，使过点M_2且与OB垂直的直线M_2G与边OA不相交。假设不存这样的点M_2，则半线OB上的任何垂线必与边OA相交。在边OA上任取一点A_1（图3.45），作$A_1B_1 \perp OB$、B_1为垂足。在OB上取点B_2，使$OB_1=B_1B_2$，作$B_2A_2 \perp OB$，与OA交于A_2。在OB上取点B_3，使$OB_2=B_2B_3$，作$B_3A_3 \perp OB$，与OA交于A_3。这样地继续下去，便得到一系列$\triangle OA_1B_1$，$\triangle OA_2B_2$，$\triangle OA_3B_3$，…，$\triangle OA_nB_n$，…。根据定理3.3，$\triangle OA_1B_1$的内角和$\sigma(OA_1B_1)$必为

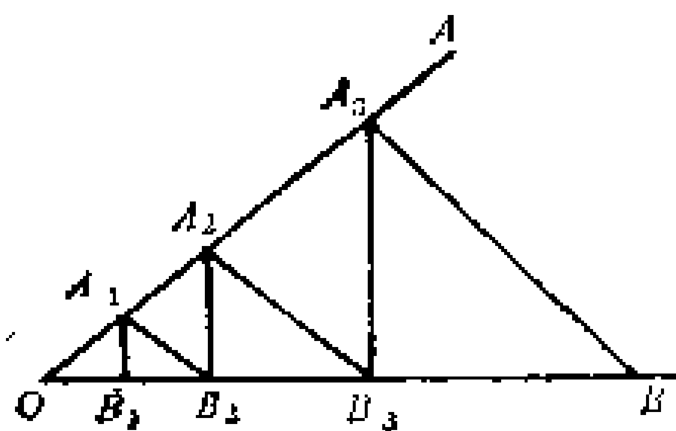


图3·45

$$\sigma(OA_1B_1)=\pi-\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<\pi$$

因为$\triangle OA_1B_1 \cong \triangle B_2A_1B_1$，得

$$\sigma(B_2A_1B_1)=\pi-\varepsilon$$

因此

$$\sigma(OA_1B_2)=\pi-2\varepsilon$$

又 $\triangle OA_2B_2$ 的内角和

$$\sigma(OA_2B_2)=\sigma(OA_1B_2)+\sigma(A_1B_2A_2)-\pi$$
$$=(\pi-2\varepsilon)+\sigma(A_1B_2A_2)-\pi$$

但 $\sigma(A_1B_2A_2)<\pi$，所以有

$$\sigma(OA_2B_2)<\pi-2\varepsilon$$

以此类推，就有

$$\sigma(OA_3B_3)<\pi-2^2\varepsilon$$
$$\sigma(OA_nB_n)<\pi-2^{n-1}\varepsilon$$

当 n 充分大时，$2^{n-1}\varepsilon$ 可任意大，必有

$$\sigma(OA_nB_n)<0$$

这与三角形内角和为正数矛盾，所以必存在所求证的点 M_2，而且在它后面的所有点也都是这样的点。

再次证明：按半线 OB 的先后顺序，这样的一些点——在半线 OB 上且过它作 OB 的垂线不与 OA 相交，必有最前面的的一个。为此我们将半线 OB 上的点分成如下的两类：属于第一类的是所有这样的点，通过这些点作边 OB的垂线都与边OA相交；属于第二类的是所有这样的点，通过这些点作边 OB 的垂线都与边 OA不相交。显然边OB的点属于而且只属于一类，每一类里都不空，而且第一类里的每一点都在第二类点的前面，因此这一分类是戴德金分类。根据戴德金定理，在边 OB 上存在一点Q，它或者是第一类里最后的点，或者是第二类里最前面的点。但第一类里没有最后的点，因为如果Q是第一类里最后的点，则过Q作垂直于边 OB 的垂线必与边 OA 相交一点K，在 OK 延长线上取点L，从点L向边 OB 作垂线，则垂足一定落在点Q的后面，这是矛盾的。既然第一类里没有最后的点，所以点Q是第二类里最前面的点。

最后证明：过Q作直线QC垂直于边OB，则半线OA平行于直线QC，过点Q作直线QH垂直于边OA，H为垂足。在$\angle CQH$内任取半线QD，并令点D在$\angle AOB$内部。过D作边

OB的垂线，垂足为P，则P在的Q前面，因此垂线PD一定与半线OA交于一点E。根据定理1.9（帕士定理），因为半线QD与$\triangle OPE$的边OP不相交，但与边PE相交，所以必与另一边OE相交．由此得出，$\angle CQH$内部的半线QD都与直线OA相交，面半线QC是第一条与边OA不相交的半线（建立了以半线QH为最前面一条，而所有半线QD都在其后面的顺序），所以半线QC平行于半线OA，这时OQ是平行距，锐角$\angle AOB$正是这一平行距所对应的平行角，因此定理得证。

将上述三个定理综合起来，可以得出平行距与平行角之间的函数关系：即每个平行距对应一个锐角作为平行角，反过来每个锐角作为平行角也对应一个平行距，不等的平行距对应不等的平行角，而且可以证明当平行距连续递增，其对应的平行角随着连续递减，即平行角是平行距的单调递减连续函数。这个函数叫做罗巴切夫斯基函数，常记作

$$\omega=\pi(x)\quad(0<x<+\infty)\quad(0<\omega<\frac{\pi}{2})$$

其中ω为平行角，x为平行距。

当罗氏函数的x值趋近于0时，ω趋近于$\frac{\pi}{2}$，在x接近于0的狭小的区间里，罗氏几何与欧氏几何的性质是非常近似的。

3　分界垂线和分界直线

定义　如果一条半线不和已知直线垂直，又不和它平行，则这条半线叫做已知直线的**斜半线**。

定理3.17　在每条直线上有且只有一条垂线与这直线的某条已知斜半线平行。

证明　设半线O_1B_1为直线OA的斜半线（图3.46）．根据定理3.9，存在半线OB平行于半线O_1B_1．若$OB\perp OA$，则半线OB满足定理要求。若OB不垂直于OA，设$\angle AOB$为锐角，则根据定理3.16，在锐角的一边OA上存在唯一一点Q，使过

Q且垂直于直线OA的垂线QC平行于半线OB。再根据平行传递性，直线QC也平行于半线O_1B_1。用反证法和定理3.14容易证明半线QC是唯一存在的（与半线OB的位置无关）。

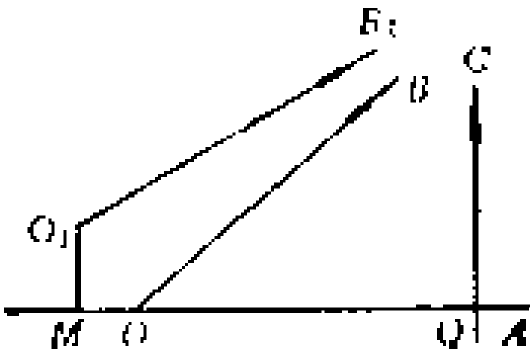


图 3.46

从半线O_1B_1的端点O_1向直线OA作垂线，垂足为M，我们看出垂线QC将半线MA上的所有垂线分成两类，垂足在Q前面的垂线都与半线O_1B_1相交，而垂足在Q后面的垂线都与半线O_1B_1不相交，QC正好起了分界作用。

定义 具有上述性质的垂线QC叫做半线MA关于斜半线O_1B_1的**分界垂线**。

如果O_1在直线OA上，显然QC就是$\angle B_1O_1A$的关于边O_1B_1的分界垂线，这时也可以说QC是角边上的分界垂线。

定义 如果一直线同时与一个角的两条边平行，则直线叫做已知角的**分界直线**。

定理3.18 每个角都有而且只有一条分界直线。

证明 已知$\angle AOB$。作$\angle AOB$的平分线OQ（图3.47）。根据上一定理，$\angle AOQ$存在唯一的分界垂线QC。直线QC就是$\angle AOB$的分界直线，而且是唯一的。

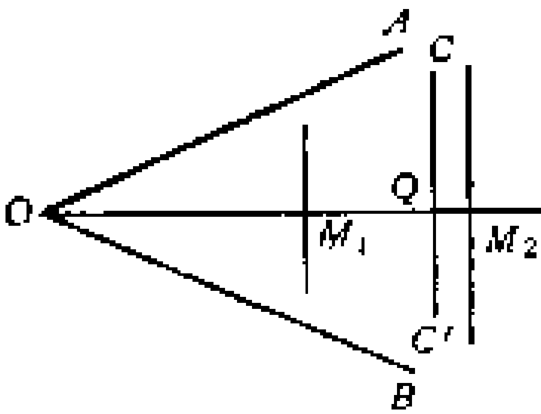


图 3.47

角的分界直线完全落在角的内部，而且与分界垂线类似，它把角平分线的所有垂线划分成两类，其中一类的垂线都与角的两边相交；另一类里的所有垂线都不与角的两边相交，角的分界直线起着分界的作用。

4 平行线的进一步性质

定理3.19 任何两对平行线总可以重合。

证明 设两对平行线$OA \parallel PQ$，$O'A' \parallel P'Q'$（图3.48）。根据定理3.17，在OA和$O'A'$上分别作分界垂线OB和$O'B'$，而且都是唯一的，这时直线PQ和直线$P'Q'$分别是直角$\angle AOB$、直角$\angle A'O'B'$的分界直线。经过运动使垂线$O'A'$、$O'B$分别与垂线OA、OB重合，即直角$\angle AOB$与$\angle A'O'B'$重合，这时在同一运动下直线$P'Q'$必与直线PQ重合，否则$\angle AOB$将有两条分界直线，因此两对已知平行线重合。

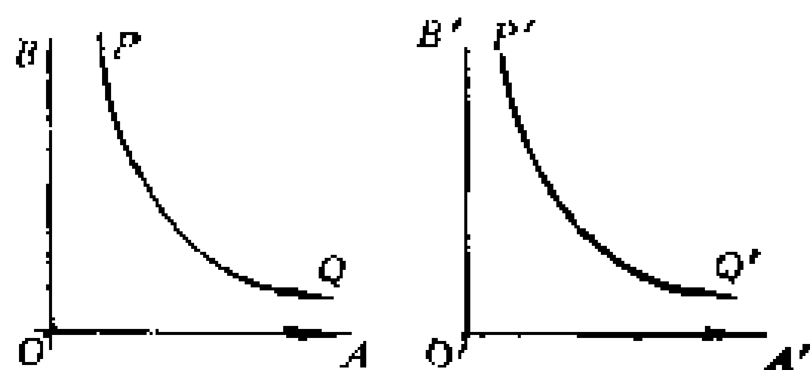


图 3.48

图3.48将直线画成了曲线，这是采用了变形画法，它可以更直观地表达罗氏几何的图形性质。

定理3.20 从一对平行线之一上的一点到另一直线的距离，（1）随着这点沿平行方向运动而递减，随着这点沿相反方向运动而递增；（2）运动时这一距离可取任何数值。

证明 设直线AP平行于直线BQ（图3.49）。在直线AP上依次取三点A、A_1、A_2、过它们分别向直线BN作垂线，垂足为B、B_1、B_2。四边形ABB_1A_1中，$\angle BAA_1$为锐角，$\angle B_1A_1A$为钝角，根据定理1.42，因为$\angle BAA_1 < \angle B_1A_1A$，所以$AB > A_1B_1$。同理在四边形$A_1B_1B_2A_2$中，$A_1B_1 > A_2B_2$。由此证明了本定理的第一部分。

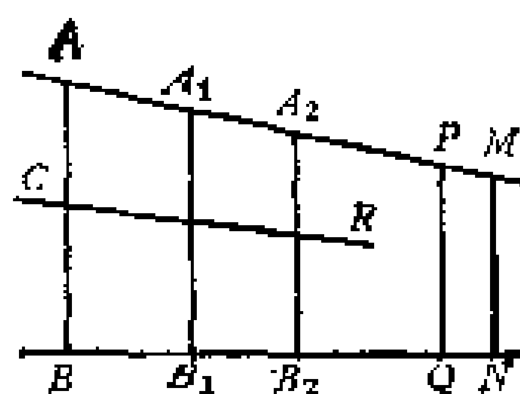


图 3.49

在线段BA上取点C，使CB等于预先随意给定的线段M_1N_1，过C作直线CR平行于直线BQ，根据前一定理，两对平行线$AP \parallel BQ$、$CR \parallel BQ$经过运动可以重合，重合后CB落在MN的位置，则M便是所求的点，M到直线BQ的距离$MN = CB$，而

CB 等于预先给定的线段.

这个定理说明，两条平行线在平行的方向上可以无限地趋近，在相反方向上无限地离散.

5 超平行线及其性质

定义 不平行又不相交的两条直线叫做超平行直线.

定理3.21 两条直线被第三条直线所截，如果截得的同位角相等，则这两条直线是超平行的.

这个定理的证明，在证明定理3.15的后半部分（图3.43）中已经作过了.

定理3.22 如果一条直线超平行于另一条直线，则第二条直线也超平行于第一条直线.

证明 设直线$P'P$超平行于直线$Q'Q$. 假设直线 $Q'Q$平行于直线$P'P$，那么由对称性，直线 $P'P$ 也平行于直线 $Q'Q$，这与已知矛盾. 所以直线 $Q'Q$ 与直线 $P'P$ 既不平行又不相交，即直线 $Q'Q$ 超平行于直线 $P'P$.

这条定理肯定了超平行的对称性，但超平行直线不具有传递性.

定理3.23 如果两条直线超平行，则它们有唯一公垂线，并且在公垂线两侧离散.

证明 已知直线$A'A$与$B'B$超平行（图3.50）.

首先证明存在公垂线. 因为直线$B'B$上任意一点E将它分成的两条半线都与直线$A'A$离散，根据定理3.18，存在半线 $A'P'$ 与AP,都垂直于直线 $A'A$，又分别平行于半线 EB' 和 EB. 取 $A'A$ 的中点C， 过C作 $A'A$ 的垂线CD，我们证明CD与 BB' 相交. 过点C分别引半线 CQ' 与半线 CQ 平行于半线 $A'P'$ 和半线 AP. 因为相等的平行距 CA' 和 CA 对应相等的平行角，即 $\angle A'CQ' = \angle ACQ$，于是

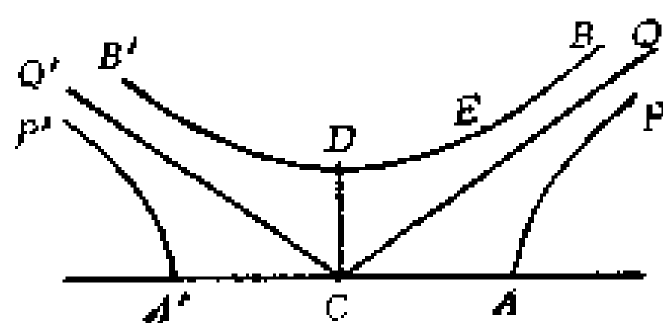


图3.50

两半线CQ'与CQ关于直线CD对称,CD是$\angle Q'CQ$的平分线。又根据平行传递性，半线CQ'与半线CQ分别平行于直线$B'B$，于是直线CD与直线$B'B$垂直相交于一点D，CD为点C到直线$B'B$的平行距，所以CD为直线$A'A$与直线$B'B$的公垂线。

其次证明公垂线的唯一性.若已知二直线有两条公垂线,则罗氏平面上存在矩形,这与定理3.7矛盾,所以公垂线是唯一的.

最后，两已知直线在公垂线两侧离散是显然的，这在证明的开头就已指出了。

归纳本节所讲的定理，罗氏平面上直线的相互位置有三种可能，即相交、平行和超平行。

3．3　罗氏平面上的基本曲线

在欧几里得平面上，直线和圆都具有这样的性质：直线上的任意线段可以运动到直线的任何位置面完全与直线重合，而圆上的任意圆弧也是一样；直线和圆的任意垂线都是它们的对称轴。所以在欧氏几何里把圆作为基本曲线来研究。

在罗巴切夫斯基平面上，具有上述性质的基本曲线除面以外还有等距线和极限圆，就是说有三种，这是罗氏平面和欧氏平面极大的不同之处。

本段将通过罗氏平面上存在的三种基本线束给出三种基本曲线的定义，然后讨论它们的一些简单性质。

1　线束和线束上的对应点

对应罗氏平面上直线的三种位置关系，即相交直线、超平行直线和平行直线，可以定义下面的三种线束（图3.51）。

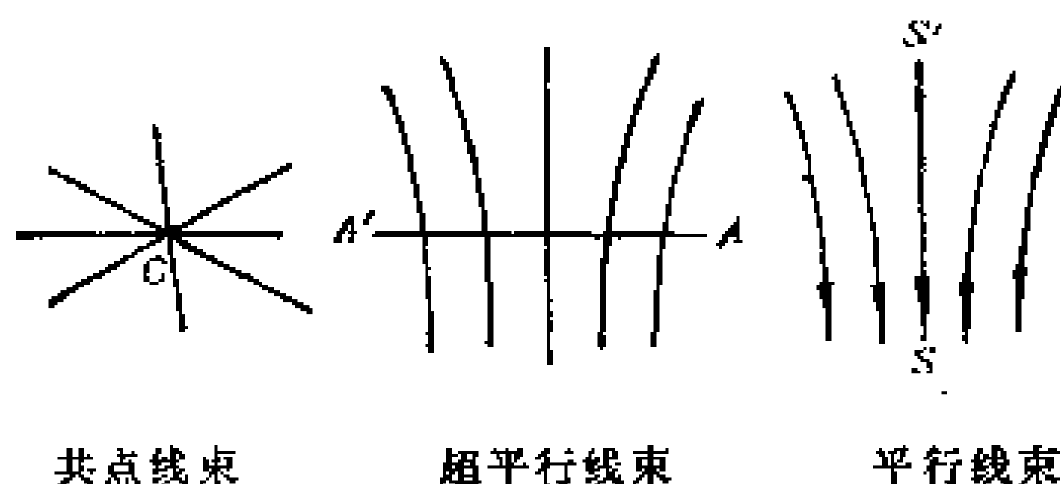


图3.51

共点（中心）线束：平面上相交于同一点的所有直线的集合。交点O叫做线束的中心。

超平行线束：平面上垂直于同一直线的所有直线的集合。公垂直线叫做线束的底。

平行线束：平面上沿着一个方向平行于同一直线$S'S$的所有直线的集合。直线$S'S$叫做线束的方向直线。

显然，平行线束里的任何直线都可以看作是方向直线。

每种线束都具有下面性质：

定理3.24 每个线束中的任意两条直线都关于该线束中的某条直线对称。

证明 共点线束的任意两条直线关于它们的交角平分线对称，显然这条平分线属于该线束。

超平行线束的任意两条直线关于它们与底的交点所构成线段的中垂线对称，中垂线属于线束。

如果直线$A'A$与直线$B'B$是平行线束中任意两条直线，它们在平行的相反方向上离散（图3.52）。过点A作半线$AD \parallel$半线BB'，根据定理3.17，$\angle A'AD$存在唯一的分界直线$P'P$，它在两个方向上分别与半线AA'和AD平行。因为平行线具有传递性，所以直线$P'P \parallel BB'$，而在它们相反方向上离散，根据定理3.18，在直线$P'P$上存在唯一一点C'，使过C'的直线$C'C$与$B'B$平行且与$P'P$垂直（分界垂线）。

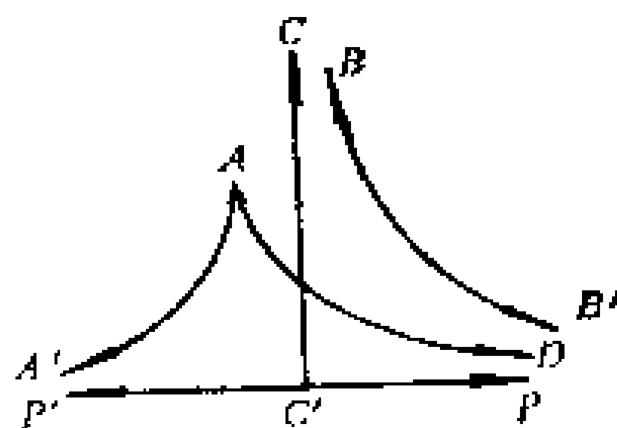


图3.52

显然$C'C$也平行于$A'A$，即$C'C$属于已知平行线束。这时直线$A'A$和直线$B'B$分别是$\angle P'C'C$和$\angle PC'C$的分界直线。以直线$C'C$为轴，将右半平面翻转到左半平面上，则$\angle PC'C$与$\angle P'C'C$重合，这时直线$B'B$与直线$A'A$重合，否

则对于$\angle P'C'C$将有两条不同的分界直线，根据定理3.17这是不可能的，所以直线$A'A$和直线$B'B$关于直线$C'C$对称。

定义 如果两条直线关于某直线对称，则称这条直线为已知两条直线的**平分线**。

这是角平分线的扩充。

推论 线束中每两条直线都有平分线，而且属于该线束。

定义 线束里一条直线上的一个点P，如果与线束里另一条直线上的一个点P'关于它们的平分线对称，则称这两点互为**对应点**。

定理3.25 在线束中一条直线上给定一个确定的点（称为起点），则线束中每条直线上都有这个点的对应点。

这个定理的成立是显然的。因为线束中每条直线都与已知直线关于它们的平分线对称，平分线实际上就是它们的对称轴，所以每条直线都存在点与已知确定的点对称，这就是已知点的对应点。

对应点具有相互性和传递性。

定理3.26 如果两个同类线束中有两条公共直线，则两个线束是同一线束（两者叠合）。

本定理不作证明。

2　基本曲线的定义和类型

定义 在线束的某条直线上取定一个点叫做**起点**。线束里所有与起点成对应的点集合，叫做**基本曲线**。线束的每条直线都叫做**基本曲线的轴**。显然，基本曲线上的每一点都可选为它的起点。

罗氏平面上三种线束决定三种不同类型的基本曲线。

圆：由共点线束决定的基本曲线。线束的中心叫做圆心。

等距线：由超平行线束决定的基本曲线。线束的底也叫做等距线的底。

极限圆（或极限线）：由平行线束决定的基本曲线。

罗氏平面上的圆和欧氏平面上的圆没有什么区别。实际上我们可以证明下一定理。

定理3.27 基本曲线圆是到共点线束的中心有等距离的点的集合（轨迹）。

证明 设点P是圆上的任意一点，A为起点，中心为O，因为A、P是对应点，它们关于$\angle AOP$的平分线对称，所以$OA=OP$，即圆上任意点到中心距离相等。

反过来，若任意一点P'到中心O的距离等于OA，连AP'，则$\triangle OAP'$是等腰三角形，A、P'关于底边上的中垂线对称，面中垂线是属于共点线束O的，所以点A、P'是对应点，点P'在圆上。

定理3.28 等距线是在超平行线束的底直线同侧且到该直线有等距离的点集合（轨迹）。

证明 设等距线是以定直线a为底的超平行线束决定的，起点为A（图3.53）。

设P为等距线上任意一点。因为P、A是对应点，它们所在的直线PP_1和AA_1关于它们的平分线BB_1对称，而直线BB_1是线段P_1A_1的中垂线，所以点P_1与A_1也关于直线BB_1对称，于是$PP_1=AA_1$，即等距线上的任意点到底a的距离等于定长AA_1。

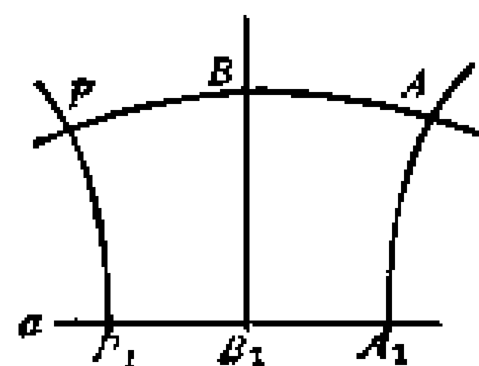


图3.53

反过来，若任意一点P与点A在底a的同侧，且到底a的距离$PP_1=AA_1$。连PA，则AA_1P_1P是萨开里四边形。作P_1A_1的中垂线BB_1，则P_1、A_1关于直线B_1B对称，两条直线PP_1和AA_1也关于直线B_1B对称。又点A、P在a的同侧，且到a的距离相等，所以点A、P也关于线束中的直线B_1B对称，即点A、P为对应点，P属于以a为底，以A为起点的等距线。

在欧氏平面上到一定直线有等距离的点集合是直线，而在罗氏平面上，这样的集合一般说来是曲线，这在后面将要证

明．只有一种特殊的情形，当起点在超平行线束的底上时，这时等距线就是这个线束的底，称这样的等距线为退化的基本曲线。

平行线束在平行的方向无限接近，在无限远处平行距逐渐趋近于零，可以认为线束中的直线都通过一个极限点．可以证明极限圆的点到这个极限点的极限值都相等．因此，极限圆可以看作是当圆周C总通过一个定点A，且圆心沿着过A的直径延长线AA'无限远离时，圆周C的极限图形，AA'就是它的轴。

3　基本曲线的性质

定理3.29　基本曲线关于它的每一条轴对称。

证明　已知A_0A_0'是基本曲线的任一条轴（图3.54），在曲线上取任意点A，我们证明点A关于A_0A_0'的对称点A_1也在曲线上。

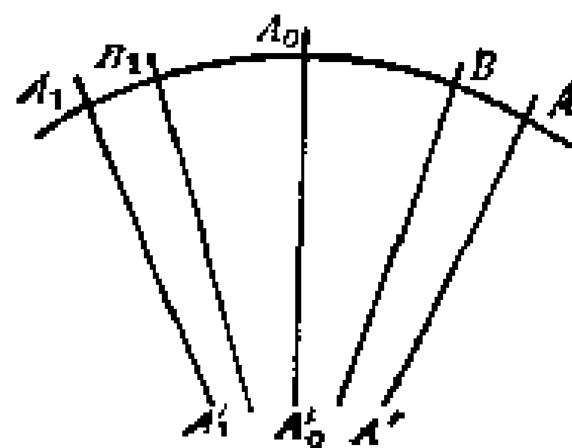


图3.54

设过点A的轴是AA'，它关于A_0A_0'的对称直线为A_1A_1'．根据定理3.24可推出三条直线都属于同一个线束．又根据定理3.25，这个线束与构成已知基本曲线的线束叠合，直线A_0A_0'为直线AA^1和A_1A_1'的平分线，而点A、A_1又关于A_0A_0'对称，所以A、A_1互为对应点，点A_1在曲线上．又，曲线上不同的两点A、B，其对称点是曲线上不同的两点A_1、B_1，因此，曲线关于轴A_0A_0'对称。

定理3.30　基本曲线上任意一段弧AB，经过运动，都可以这样的重合于这条基本曲线上，使得AB的端点A重合于基本曲线上指定的任意一点A_1，端点B落在基本曲线上A_1点指定的一侧。

证明　作过点A、A_1的轴AA'和A_1A_1'（图3.55），以及它们的平分线CC'．根据上一定理，以直线CC'为轴，将弧

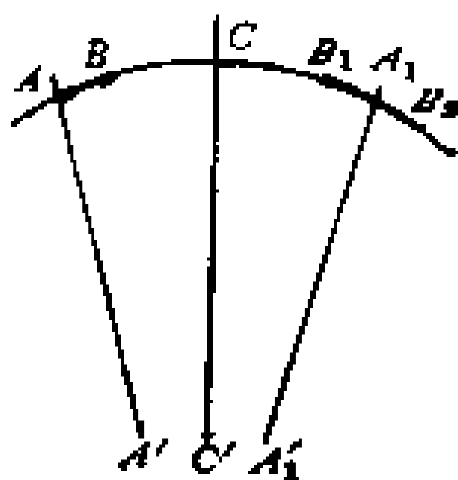


图3·55

AB 所在半平面的曲线部分翻转到另一半平面的曲线部分上，则点A与A_1重合，B落在曲线的B_1点，于是弧AB重合于基本曲线的弧A_1B_1上。若再以直线A_1A_1'为轴，将弧A_1B_1翻转到另一侧的弧A_1B_2上，则弧AB经过两次对称运动重合于弧A_1B_2上，这就是说弧AB可以重合于A_1点指定的一侧。

定理3.29和定理3.30的性质说明了基本曲线很类似于圆或直线，每一条轴都是对称轴，自身可以滑动或沿一轴翻转仍然与自身重合。

定理3.31 过不退化基本曲线上一点且垂直于过此点的轴的直线，不能再与曲线交于其他点，且曲线完全落在这条直线的一侧。

证明 对于圆，这个定理显然成立。我们来证明另两种曲线也成立。

已知曲线上一点A，轴为AA'，直线$P'P$通过点A且垂直于AA'（图3.56）。

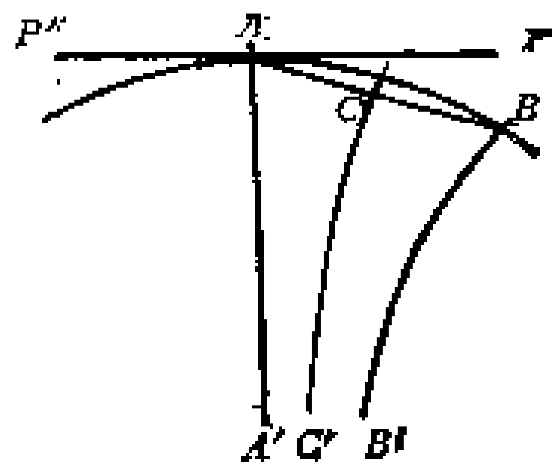


图3.56

在曲线上任取一点B，连结线段AB，作AB的中垂线CC'，垂足为C。根据基本曲线的定义，直线$C'C$也是已知曲线的轴。

若曲线是等距线，则直线AA'和CC'同时垂直于决定曲线的底；若曲线是极限圆，则直线AA'与CC'平行。无论在那一种情形，$\angle A'AB$都小于直角。因此，点B同半线AA'在直线$P'P$的同一侧，点B不在直线$P'P$上。由于点B是曲线上的任意点，所以整个曲线都在直线$P'P$同一侧，这说明了曲线与直线$P'P$不会再有另外的交点。

定义 过基本曲线上的一点且与过这点的轴垂直的直线叫做基本曲线的切线，切线与曲线的交点叫做切点。

定理3.32 不退化的基本曲线与直线最多有两个交点。

证明 假设某基本曲线 Ω 与某直线 a 相交于三个点 A、B、C（图3.57），经过这三点分别作基本曲线的轴 AA'、BB'、CC'。因为其中每两点互为对应点，即关于过这两点的两轴平分线成对称，所以这些平分线垂直于直线 a。由对称性可得 $\angle A'AB=\angle B'BA$，$\angle C'CB=\angle B'BC$，$\angle A'AB=\angle C'CB$，从而得出了 $\angle B'BA=\angle B'BC=d$，这样一来所讨论的角也都是直角，所讨论的三条轴都垂直于直线 a。显然这对共点或平行线束是不可能的，而对超平行线束来说，基本曲线 Ω 将退化为直线 a，这也与已知不退化的条件矛盾。

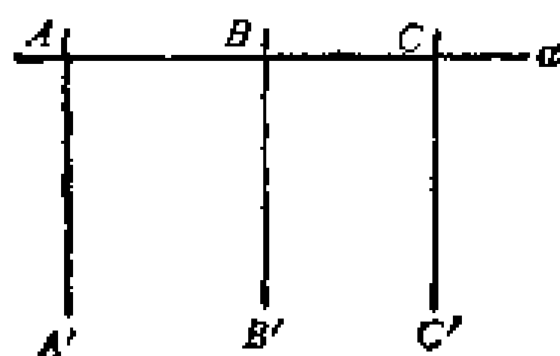


图3・57

圆与不是它切线的直线相交，一定交于两个点。极限圆与不是它的切线或轴的直线相交也一定交于两个点。等距线与不是它的切线相交可以交出一个点或两个点。这些都反映出基本曲线是曲线的特点。

定义 如果一条直线与曲线相交，并与过交点的切线垂直，就说该直线与曲线垂直或正交。

容易证明与基本曲线正交的直线都是该曲线的轴。因此三种基本曲线都与决定它的线束中的所有直线正交。这样的曲线叫做线束的正交轨线。基本曲线是三种线束上的正交轨线。

上面讲的三条定理是基本曲线的共同性质。极限圆还有下述的一个重要性质。

定理3.33 所有极限圆称可以重合。

证明 设 Ω_1、Ω_2 是两个极限圆。直线 A_1A_1'、A_2A_2' 分别是 Ω_1 和 Ω_2 的轴。称动 Ω_1、Ω_2 使 A_1 与 A_2 重合，轴 A_1A_1' 与

A_2A_2'重合，且方向一致。这时决定Ω_1和Ω_2的平行线束有同一的方向半线A_2A_2'，两个线束必重合。又因为以A_1为起点的对应点集合构成了曲线Ω_1，以A_2为起点的对应集合构成Ω_2，现在两个线束重合，两个起点A_1与A_2也重合，因而Ω_1与Ω_2重合。

罗氏平面几何学的结构就讲到这里。这些定义和定理，反映了罗氏几何的基本特性。

3.4 欧氏、罗氏、黎氏三种几何学的对立统一关系

欧氏平行公理与罗氏平行公理的差异就在于过直线外一点是"存在唯一一条直线"还是"至少有两条直线"与已知直线不相交。显然还有第三种可能，即"不存在直线"与已知直线不相交。有人会问，用最后的关系作为平行公理的几何学也存在吗？

三角形内角和"等于二直角"或"小于二直角"是欧氏几何学和罗氏几何学的两个不同结论。有人会问，三角形内角和"大于二直角"的几何学也存在吗？

回答是肯定的。德国数学家黎曼于1854年在他所作的讲演"论几何学作为基础的假设"中，首先指出这种几何学的存在，后来就称这种几何学为黎曼几何学。黎曼认为欧几里得假设直线是无限长的，并且两条平行线在无限远处也永远不会相交，是没有实验根据的，可以从"根本没有平行线"的假设出发来建立新的非欧几何学。

非欧几何产生以后，人们从多方面探讨了它们的现实意义；公理系统的无矛盾性；以及欧氏、罗氏、黎氏三种几何的对立统一关系等，不断地丰富了它们的内容，并肯定了三种几何并存的意义。下面就是这样的例子。

我们曾经讨论了平面上的图形性质，即平面几何学。同样我们也可以在某些曲面上讨论图形的性质，象建立平面几何学一样来建立曲而上的几何学，一般称之为曲面的内在（或内

蕴）几何学．例如球面几何学就是这样的几何学，而平面可以看成是特殊的曲而．

高斯曲率是表示曲面弯曲程度的一个量．各处高斯曲率都相同的曲面称为常曲率曲面．例如平面、球面等都是常曲率曲而．人们在研究常曲率曲面的内在几何时，证明了常曲率曲面上的内在几何只有三种：当高斯曲率等于零时，称为抛物型几何学，欧氏平面几何就是一个例子；当高斯曲率为小于零的常数时，称为双曲型几何学，罗氏几何学就是一个例子；当高斯曲率为大于零的常数时，称为椭圆型几何学，纯球面几何学就是一个例子．这样就从常曲率曲面的内在几何学的关系上，通过高斯曲率把三种几何统一了起来，说明了三种几何学的意义和并存的必要．

通过罗巴切夫斯基空间中三种基本曲面上的内在几何学的研究，进一步说明了这一事实．

把罗氏平面上三种基本线束推广到罗氏三维空间里，可以得出三种线把，即

（1）共点线把：通过同一点的所有直线集合．定点称为线把的中心．

（2）超平行线把：垂直于同一平面的所有直线集合．定平面称为线把的底．

（3）平行线把：和同一半线平行的所有直线集合．定半线称为线把的方向半线．

完全类似地可以把定义基本曲线的方法推广到空间，来定义基本曲面：在线把的某条直线上取定一个点叫作起点．在线把里所有其他直线上且与起点成对应的点集合，叫做基本曲面．由空间中三种线把上可以定义三种不同的基本曲面：

（1）球面：共点线把上所定义的基本曲面（和欧氏空间的球面一致）．

（2）等距曲面：超平行线把上所定义的基本曲面．

（3）极限球面：平行线把上所定义的基本曲面。

三种基本曲面都有和基本曲线类似的特殊性质。例如：

线把内的每条直线都是基本曲面的对称轴，称为基本曲面的轴。

通过轴的每一个平面都是基本曲面的对称平面，称为基本曲面的直径面。

基本曲面上的任一图形经过运动后仍可落在该基本曲面上。

还有一个重要的事实是：

基本曲面与任一直径面的截口都是基本曲线，且曲线的名称与该曲面的名称一致。如球面的截口是大圆，极限球面的截口是极限圆，等距曲面的截口是等距曲线。这些曲线总称为该曲面上的短程线或测地线。测地线上两点间的弧是曲面上连结这两点的最短的弧。这种线类似于平面上的直线。

在三种基本曲面上分别地建立内在几何学：每种几何里的点是曲面上一般的点，“直线”是各曲面上相应的测地线，面结合关系、顺序关系、连续关系、运动关系都是罗氏空间里原来的那些关系。我们可以验证，在三种曲面的内在几何里，黎氏、罗氏、欧氏三种公理系统分别成立。就是说，球面上的内在几何学是黎曼几何；等距曲面上的内在几何学是罗氏几何；极限球面上的内在几何学是欧氏几何。

下一节将要提出的关于罗氏平面几何学的卡莱—克莱因模型，其中建立模型的绝对圆 k 是一个实圆；而当绝对圆 k 是一个虚圆时，则可以建立黎曼几何学的一个模型；当绝对圆为零圆时，则可以建立欧氏几何学的一个模型。这里用射影几何的方法，又将三种几何学统一起来。这也说明三种几何学的对立统一关系。

我们已经讲过在欧氏平面上可以作出罗氏和黎氏几何的模型。反之，在罗氏的极限球面或球面上也可以作出欧氏或黎氏

几何的模型．同时又用不同方法揭示出三种几何学的联系和统一．从罗氏函数中又看出，当平行距趋近于零时，平行角趋近于直角，说明欧氏几何是罗氏几何的一种极限情形，两种几何之间并没有根本上的对立．另外我们也可以证明它们的公理系统在逻辑上都没有矛盾．这样就从理论上论证了三种几何的正确性以及对立统一的关系．

然而，三种几何学在内容上的差别是很深刻的，甚至是相互矛盾的．

罗氏几何学与欧氏几何学的差异，在于平行公理及其推论不同，而属于绝对几何学的部分则是完全相同的，这一点我们已经很清楚了．黎曼几何与欧氏和罗氏几何的差异就更大更深刻，如绝对几何学中可以证明不相交直线的存在（第三章定理1.32），而黎氏几何学中是不存在不相交直线的．因此，不能在绝对几何学的基础上建立黎氏几何学．罗氏与黎氏几何中没有相似形，只若三对对应角分别相等，则两三角形就合同．在罗氏几何学中，二直角减去三角形内角和叫做**三角形的角欠**，在黎氏几何学中，三角形内角和减去二直角称为**三角形的角余**，而欧氏几何学中两者之差为零．欧氏几何的三角形面积与其内角和无关，而且面积可以任意大，罗氏几何的三角形面积与角欠成正比，黎氏几何的三角形面积与角余成正比，而且两种几何的三角形面积在任何情况下都是有限的．关于三种几何学的差异是不胜枚举的．有人可能要问：三种几何学能都正确吗？哪一种几何是反映现实空间的客观真理呢？要回答这个问题，首先要明确什么是真理．真理是客观的，是绝对的，但另一方面，由于人们对客观规律的认识总要受到一定条件的限制，所以真理又是相对的．无数相对真理的总和，就是绝对的真理．一般科学原理都是接近绝对真理界限的相对真理，几何学的发展也是如此．欧氏、罗氏、黎氏三种几何学都没有绝对地揭露现实空间的几何规律，都仅仅是在一定条件下相对的

从某一个侧面反映了现实空间。其实，现实世界从微观到宏观是无穷无尽地变化着，人类对自然界规律的认识也是逐步在深入。当我们在日常工作中作一局部测量时，显然可以看成是欧氏几何学的现象，引用欧氏几何的规律即可以正确地解决了。但当我们从上海航海到伦敦，则是球面上的运动，因而不能用两点间直线最短的规律来测量这样的距离了，这时就需要球面几何的规律，而球面内在几何学是黎氏几何学的一种．又如进行遥远的天文测量时，用罗氏几何学也是很方便的。实践证明三种几何学并无抵触。从爱因斯坦的相对论观点看，宇宙空间的几何学是和充满天际、互相吸引的物质的分布与运动有密切的关系，它的许多答案比较符合于现代的实验知识和结果。这个空间的几何学肯定不是欧氏几何学，面非欧几何学在这一理论中得到了一定的应用。

可是为什么对欧氏几何感到习惯和容易接受呢？这不过是因为它反映了我们身边周围的空间形式面已。几千年前人们研究问题时，也都是从眼前画出的图形着手，就眼睛所看到的，手能摸到的这样一个较小空间里研究几何学。因此，欧几里得《几何原本》里的一些几何命题，不过反映了人们日常生活所接触的小范围空间规律，习惯成自然，人们就容易接受了。可是随着科学的发展，几何学的研究不能局限于欧氏空间，必须研究更加多样的几何空间。

§4 几何公理系统的基本问题

我们在§2和§3里用公理的方法建立了欧几里得几何学结构以及罗巴切夫斯基几何学结构。但是，在选择作为一门几何学基础的公理系统时，希尔伯特提出下面的三个基本问题：

1．公理系统的无矛盾性（或和谐性、相容性）；

2．公理系统中各公理的独立性；

3. 公理系统的完备性.

下面简单地介绍一下这三个问题.

4.1 公理系统的无矛盾性

定义 如果命题 A' 和命题 A 的题设相同，而题断互相矛盾，则称命题 A' 和 A 为矛盾命题.

定义 一组公理系统连带它的一切推论在内，不含有两个矛盾的命题，则称这个公理系统具有无矛盾性.

公理系统的无矛盾性是每一个公理系统都必须具备的，否则就不可能用这个公理系统来建立一种无内在矛盾的科学体系. 公理系统的无矛盾性，是选定公理系统的前提.

给出一组公理系统，如何来证明它具有无矛盾性呢？初看起来似乎是很困难的，拿欧氏几何学来说，它的公理加定理总共有上千条，并且还可能继续发现一些新定理，怎么可能把它们拿来一一比较，判断究竟有没有两条互相矛盾的命题呢. 对无矛盾性的证明，需要用新的思想方法，这就是几何模型法.

第一章提到过几何模型（或解释）的概念，所谓模型是从一种已经存在的事物，作为公理系统的对象（原始元素），把公理系统对象间的原始关系解释成这种事物间的一些具体关系，并且这些具体关系具有公理系统中各条公理所规定的性质. 于是抽象的公理系统就由这种事物间的具体关系得到了一个实现，这种实现就称为该公理系统的模型（或解释）.

我们所用的直观图形就是几何模型的一种. 又如平面解析几何是用代数方法研究几何图形的性质，它把"点"看成是两个有序的实数对，即坐标（x，y）. "直线"是由三个有序实数的比值（$u:v:w$）所确定的二元一次方程 $ux+vy+w=0$. 如果点的坐标满足某个二元一次方程，就说"点"在该"直线"上. 同样可以规定"介于…之间"、"运动"等等关系. 可以验证，这样规定的"点"和"直线"以及它们之间的原始关系，满足欧几里得平面几何的全部公理. 这也是欧氏平面几

何的一种解释或实现，常叫做解析模型或笛卡儿模型．总之，用公理方法建立起来的几何空间是抽象的空间，它可能有各种各样的模型．

几何模型可以把抽象的几何对象具体化，给人们以直观的形象，讲义里的所有直观图就起到了这种作用．在一种几何的模型里还可以帮助发现该几何学里的新定理，或在模型里证明该几何的某些定理，讨论该几何的某些问题，从而使问题简单化．用制造模型的方法可以证明公理系统的三个基本问题，这种方法叫模型法．

究竟怎样用模型法来证明一个公理系统具有无矛盾性呢？下面以证明罗氏几何公理系统的无矛盾性为例，扼要地介绍一下这种思想．

欧氏几何的无矛盾性是容易被人接受的，但是罗氏几何的无矛盾性却很不容易被人接受，因此证明罗氏几何的无矛盾性问题，是一个重要的问题．

有几个很重要的模型，可以用来证明罗氏几何学的无矛盾性．如柏尔特拉米（Beltrami，1850～1900，意大利人）的微分模型，潘加莱（Poincare，1854～1912，法国人）的几何模型以及卡莱（Cayley，1824～1891，英国人）和克莱因（Klein，1849～1925，德国人）的射影模型等．

下面简略介绍一下卡莱—克莱因模型，它是建立在欧氏平面上的（也可以建立在射影平面上）．

首先规定模型中的原始元素和原始关系：在欧氏平面上任取一个圆 k，称为绝对圆或绝对形．规定：

（1）“点”是指圆 k 内部的所有点（圆 k 上的点不属于规定的“点”的范围，称为无穷远点）．

（2）“直线”是圆 k 内所有弦（弦的两端点是无穷远点）．

（3）全部“平面”就是圆 k 的内部区域．

（4）“点”与“直线”的结合关系指原来点和弦的结合关系。

（5）“点”的顺序关系是圆 k 内弦上原来的点的顺序关系。

（6）图形的运动关系，是指欧几里得平面上以圆 k 为基圆的极透射变换，这种特殊的射影变换，具有：

1° 把圆 k 上的点变为同一圆上的点，圆 k 内部的点仍变为同一圆内部的点，圆 k 外部的点仍变为该圆外部的点。

2° 直线仍变为直线，并保持属于关系和介于关系，根据1°、2°可知圆 k 的弦仍变为同一圆上的弦，相交弦仍变为相交弦，不相交的弦仍变为不相交的弦。

3° 线段对于基圆的射影性度量（交比等），在极透射下保持不变。

还有其它一些性质，这里不一一列举。这里提到的关于极透射概念和性质，将在下篇射影几何里讲到。

这样规定的“罗氏平面”以及它上面的“点”、“直线”和它们之间的关系，我们可以验证全部适合罗氏平面几何公理系统。事实上，除了运动公理以外，将罗氏公理的点换成绝对圆 k 内部的点，将直线换成绝对圆 k 内部的弦，就变成欧氏平面上与圆 k 有关的一些命题，面这些命题显然成立。例如：结合公理 I_1：“对于任意两个点，存在且只存在一条直线通过这两个点”．可以换成“对于圆 k 内部任意两个点，存在且只存在一条弦通过这两点．”等等．

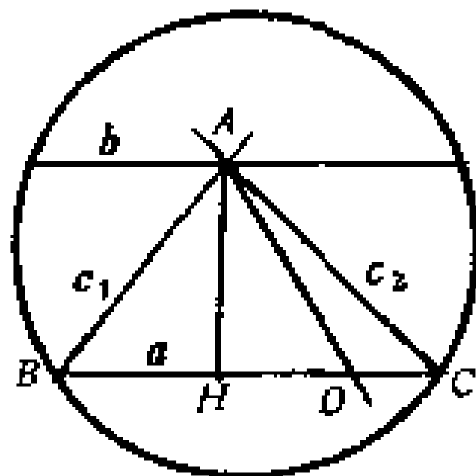


图3.58

我们从图3.58中立刻可以看出罗氏平行公理 $\overline{V}$ 成立，以及直线的三种相互位置关系：

设 a 为一条罗氏直线，A 为直线

a 外一点。过点 A 存在直线 b、c_1、c_2 与直线 a 不相交。其中直线 c_1、c_2 与直线 a 平行，即在直线 a 的两个方向上是第一条与 a 不相交的。直线 b 与 a 既不平行又不相交，是两条超平行直线。

运动公理的验证需要一些射影几何的知识，在这里不作进一步讨论。

这样，我们在欧氏平面上的绝对圆里，实现了罗氏平面几何学。换句话说，在对罗氏平面几何学的基本概念作适当的解释之下，罗氏平面几何学的每一个公理都成了欧氏几何学绝对圆里对应的定理。又因为罗氏平面几何学的其他定理只是这些公理的推论，因面也全变成了欧氏几何学绝对圆里的一些定理，这些定理不过是部分欧氏平面（绝对圆）上的点、线段（弦）的一些性质，它们全部是欧氏几何的定理。反过来，绝对圆内部的这些欧氏几何中的定理，也和罗氏几何的定理相对应。如果罗氏几何学存在两个矛盾的命题，那末它们对应的欧氏几何里的定理也将是相互矛盾的。这就是说，如果罗氏几何学有矛盾，那么欧氏几何学也不可避免的具有矛盾，因此，只要欧氏几何无矛盾，则罗氏几何也无矛盾。

这就是通过模型证明公理系统无矛盾的思想方法。

希尔伯特对欧几里得公理系统的无矛盾性作过证明。他首先给出前面曾经提到过的解析模型（笛卡儿模型），把几何学的元素和定理表示成为实数的算术运算。然后，他得出如下的结论，如果实数的算术运算没有矛盾，那么欧几里得的公理系统就不会有矛盾，也就是说欧几里得几何学没有矛盾。

欧几里得几何的公理系统和罗巴切夫斯基公理系统无矛盾性的证明，最终归结为实数运算无矛盾的条件上，因此这种证明都是相对的，就是说，只要实数的算术运算无矛盾，则欧氏几何就无矛盾，从面罗氏几何也无矛盾。

4.2 公理系统中各公理的独立性

公理系统中各条公理的独立性，就是指这一公理系统中的每条公理都有独立存在的必要。换句话说，公理系统中的每条公理都不是其余公理的推论，因而在公理系统中不能缺少，否则，余下的全部公理就不能再推出原来系统所能推出的全部结论。公理系统中各公理的独立性，也就是使公理系统中的公理达到最少的个数。

每个公理系统都要具备无矛盾性，但不一定都具备独立性。有的公理系统也常把它的某些简单而常用的少数定理列入公理之中，这样就可以在建立该几何的体系时减少某些烦琐的论证，而所建立的几何学仍是相同的。本书的顺序公理和运动公理就是这样处理的。

一个公理系统总是包含着许多条公理，怎样来验证每一条公理的独立性呢？一般也是采用模型的方法。

设公理系统Σ中包含公理A_1、A_2、…、An，要证明A_i在公理系统Σ中是独立的，一般是根据如下原理进行的。在公理系统Σ中去掉公理A_i，余下的所有公理构成系统Σ'。设A'_i是A_i的矛盾命题，假设A_i不独立，即A_i是系统Σ'的推论，则公理系统$\Sigma'+A'_i$及其推论中必包含两个矛盾的命题A_i和A'_i，于是公理系统$\Sigma'+A'_i$就不具备无矛盾性。根据这一道理，如果我们能够验证公理系统$\Sigma'+A'_i$是无矛盾的系统，则A_i就不是Σ'各公理的推论了，从而也就证明了A_i在系统Σ中是独立的。

我们和无矛盾性的证法结合起来，实际上就是制造公理系统$\Sigma'+A'_i$的一个模型，而这个模型中对象的关系是无矛盾的，因而系统$\Sigma'+A'_i$具有无矛盾性，从而证明了A_i不是公理系统Σ'的推论，即A_i在公理系统Σ中具有独立性。

根据欧氏几何学和罗氏几何学公理系统无矛盾性的证

明，显然欧氏平行公理V在欧氏几何的公理系统中具有独立性。

实际上，欧氏公理系统Σ是由绝对几何的公理系统$\Sigma'+V$组成的，而罗巴切夫斯基公理$\overline{V}$是公理V的一个矛盾命题，公理系统$\Sigma'+\overline{V}$构成罗氏几何学的公理系统，我们曾经通过卡莱—克莱因模型证明了这个系统的无矛盾性。因此，公理V不是绝对几何系统Σ'的推论，即公理V在欧氏公理系统Σ中具有独立性。

同理可证，公理$\overline{V}$在罗氏公理系统中也具有独立性。

在科士青（В.И.Костин）著《几何学基础》，以及钱端壮编《几何基础》等书中，都有连续公理具有独立性的证明，可参阅。

4.3 公理系统的完备性

公理系统的完备性是指在这个公理系统里不能再添加新的公理，使它构成新的公理体系，从而建立一个与原来几何学不同的新几何学。这种性质可以用模型的同构关系来定义。

定义 如果某一公理系统有两个模型Ω和Ω'，而这两个模型的对象与对象之间可以建立一一对应，使得对应的对象间有同样的相互关系（即有表示同样关系的对应定理），则这两个模型叫做同构。

例如欧几里得几何学的模型Ω，是绝对几何公理系统Σ'+平行公理V的一种实现，而罗巴切夫斯基几何学的模型Ω'，是绝对几何公理系统Σ'+平行公理V的一种实现，显然它们都是绝对几何的公理系统Σ'的模型，但独立的公理V与独立的公理$\overline{V}$是互相矛盾的，这反映两种模型的“直线”，不具有同样的相互关系，因此绝对几何公理系统Σ'的两个模型Ω和Ω'是不同构的。

定义 如果某一公理系统所有的模型都是同构的，则称这个公理系统具有完备性，称这个公理系统为完备的系统。

根据上面讲的例子，绝对几何学的公理系统 Σ' ，存在着两个不同构的模型 Ω 和 Ω'，因此绝对几何的公理系统 Σ' 不是完备的系统。实际上在公理系统 Σ' 添加欧氏平行公理 V 或罗氏平行公理 $\overline{V}$，便可以扩大成为欧氏或罗氏公理系统，从而可以建立两种不同的新几何学，即欧氏几何学和罗氏几何学。

一般地公理系统不要求都满足完备性，例如“拓扑学”中定义拓扑空间的公理系统等等，都是不完备的。因此在这些公理系统的基础上，可以添加上其它的公理，构成形形色色的空间，这在现代数学里具有重要的意义。

欧几里得公理系统是不是具有完备性呢？它是完备的公理系统。因为我们可以证明，这一公理系统的所有模型都与笛卡儿模型同构。

罗巴切夫斯基的公理系统也是完备性的系统。

习　　题

§ 1

1. 简要叙述绝对几何学的公理系统。

2. 论顺序公理在初等几何中的作用。

3. 证明定理：如果一条直线通过三角形一个顶点和三角形内部一点，那么这条直线必与对边相交。

4. 证明：A、B、C、D 为一条直线上的四个点，如果 $A\overline{B}C$，$B\overline{C}D$，则有 $A\overline{B}D$ 和 $A\overline{C}D$ 成立。

5. 证明：如果点 C 介于 A 与 B 之间，则线段 AB 上不和 C 相同的点，或者属于线段 AC，或者属于线段 CB。

6. 证明定理：每个角有且只有一条平分线。

7. 论述连续公理在初等几何中的作用。

8. 证明：通过直线外的一点常可以引直线，使和定直线

作成已知的任意锐角。

9．在绝对平面几何中，凸四边形内角和是多大？外角和是多大？为什么？

10．（直线交圆命题）通过圆的内部一点的直线一定和圆相交于两个点。

§ 2

11．论述欧几里得平行公理 V 在初等几何里的作用。

12．证明：任一直线的垂线和斜线一定相交。

13．证明：通过不共线的三点可决定唯一的圆。

14．证明：瓦里斯命题"在平面上只要存在一对不相等的相似三角形"与第五公设等价。

15．证明：勒让德第二命题"通过一个角内部任意点，永远可以作和角的两边都相交的直线"与平行公理 V 等价。

16．三角形中位线定理是否为真正的欧几里得命题？

§ 3

17．试证：在罗氏几何学中三角形内角和不是一个固定不变的常数。

18．证明：在罗氏几何学中过不共线的三个点不一定能作圆。

19．试证：在罗氏几何学中立在半圆上的角小于直角。

20．试证：如果直线 $AA' \parallel$ 直线 $C'C$，而且 AA'、CC' 在直线 BB' 的异侧，那么 $AA' \parallel BB'$ 及 $CC' \parallel BB'$。

21．罗氏平面上两条直线有哪些位置关系？它们有哪些性质？

22．分析在罗氏几何学中，三角形两边中点连线与第三边的位置关系和大小关系。

23．试证：过三角形三边的中点所作边的垂直平分线或者有一个公共的交点，或者三条线互相离散，或者三条线在同一方向下互相平行。

24. 在罗氏平面上的任意三角形是否总存在内心、垂心和外心？为什么？

25. 在罗氏几何学中，已知四边形$ABCD$，$\angle A+\angle B=\pi$，$AD=BC$，试分析AB、CD的位置关系和大小关系。

26. 比较欧氏三角形和罗氏三角形性质的异同。

下 编 变换群与几何学

通过上编的学习，我们知道了用公理法建立几何学的程序，那就是先给出一些不定义的原始概念和几组公理，然后利用逻辑推理展开了我们所研究的几何学。可以说，这是用静的观点来研究几何学。

但是，公理法并不是用以建立几何学的唯一方法，还可以用群论的原则，通过变换群来研究几何学，这就是德国数学家克莱因（F.klein）提出的观点。1872年，他在爱尔兰根（Erlangen）大学作了题为"近世几何学研究的比较评论"的学术报告。在报告中他总结了射影、仿射以及其它几何学发展的成果，提出了构成这些几何的普遍原则，即每种几何学都是研究在相应变换群的所有变换下保留不变的图形性质的命题系统。他的这个著名的思想和原则后来就称为"爱尔兰根纲领"。这种用变换群研究几何学的方法，可以说是用动的观点研究几何学。

本编以克莱因的几何学群论原则为主线，首先将在欧氏几何的基础上，分别地建立正交变换（即运动）、相似变换、仿射变换以及射影变换的概念；研究各个变换群下图形的不变性质和不变量，以及各变换群所对应的几何学。着重研究射影几何学的基本理论和方法，并用射影几何的方法统一研究各变换群的从属关系，以及相应几何学的比较；最后研究二次曲线的理论。

本书侧重讨论二维空间（平面）几何学，我们将同时采用解析法与综合法，以简化讨论的过程和突出几何性质。

第四章　正交、相似、仿射变换群与欧氏、仿射几何

本章是在欧几里得几何的基础上，分别建立正交变换、相似变换和仿射变换的概念，然后研究各种变换下的图形的不变性质和不变量，指出各种变换群所对应的几何学，还将讨论一些变换在初等几何中的简单应用。

§1　几何学的群论原则

1.1　点变换

图形是由点构成的，图形的变化，实际上是由它的每个点的变化来实现的。因此，为了研究图形的变换，应该从研究点变换入手。

1　图形间的映射

我们先来叙述集合间的映射的几个一般性的定义，理解这些定义并不困难，只要联想一下关于函数的类似定义，就容易掌握它们。

定义　设S和T是两个集合，假定有一个对应法则σ，使得S的每个元素s对应于T的某一元素t，那么对应σ叫做集合S到集合T内的（单值）映射，记作

$$\sigma: S \longrightarrow T$$

s对应于t，就记作$t=\sigma(s)$，t叫做s的象，而s叫做t的原象。注意，t的原象可能不止一个。

如果从$s_1 \neq s_2$，得到$\sigma(s_1) \neq \sigma(s_2)$，那么映射$\sigma$叫做是一一

的，这时对于集合T中的每个元素t，至多有一个原象；如果对于集合T的每个元素t，都有集合S的一个原素s，使$\sigma(s)=t$，则说σ是到上的，如果σ既是一一的，又是到上的，那么σ叫做一一对应。

以上这些概念和术语，无疑地适用于作为点集合的几何图形，以下所讲的变换也是如此。

下面举几个例子：

（1）如图4.1，从中心S引射线将线段PQ上的每一点A投影到直线a上的一点A'，使A对应于A'，这是从线段PQ到直线a内的一个映射，称为中心投影。这个映射是一一的，但不是到上的，因为线段PQ的象$P'Q'$仅是直线a的一部分。

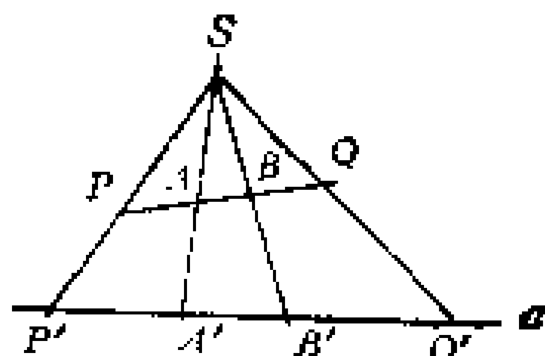


图4.1

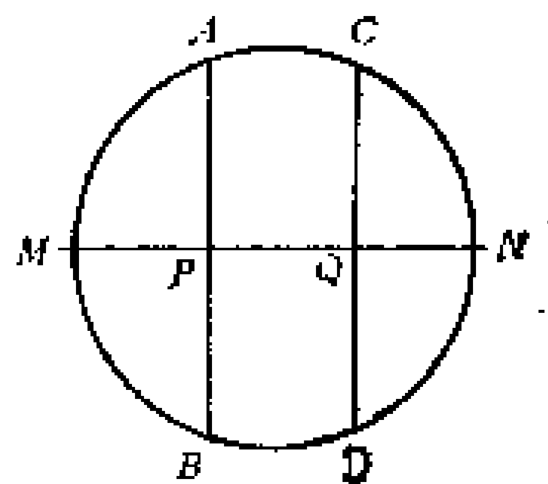


图4.2

（2）如图4.2，将圆上的每一点垂直投影到直径MN上，例如点A对应于点P，这是一个从圆到直径MN上的映射，但不是一一的，因为两个不同的点A，B对应于相同的象P。点M、N各与自身对应，是这个映射下的不动点。

（3）如图4.3，将直线a上的每一个点A平行投射到直线b上的点A'，使A对应于A'，这是从直线a到直线b的一一对应，因为映射既是一一的，又是到上的。这个映射一般叫做平行射影，直线a与直线b的交点M与自身对应，

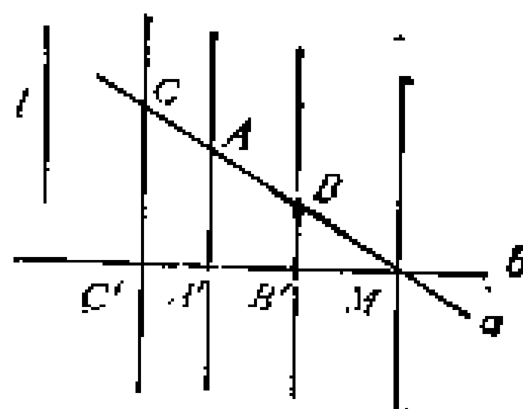


图4.3

是映射下的不动点。

对于“一一对应”来说，“一一的”和“到上的”这两个条件缺一不可。例(1)和例(2)就说明了这一事实。

2　图形的变换

在几何学中，一个非常重要的概念是变换的概念。

定义　图形S到它自身上的一一对应

$$\sigma: S \longrightarrow S$$

叫做图形S到自身的变换，简称为变换σ。

定义　对于每一个变换$\sigma: S \longrightarrow S$，$S$中的每个元素$s'$，都有唯一的原象$s$。这样，把一个点对应于它的原象，就得到一个变换，这个变换叫做σ的逆变换，记作σ^{-1}。于是对于S的每个元素s，有

$$\sigma^{-1}(\sigma(s)) = s$$

定义　如果对于S的每个元素s有$\sigma(s)=s$，则σ叫做恒等变换。

定义　如果对于S的某一元素s（子集U），$\sigma(s)=s$（$\sigma(U)=U$），则s（子集U）叫做不动元素（子集）。

对于几何图形来说就是不动点（或称二重点）、不动直线（或称二重直线）或不动图形。

例如平面上的直线反射（轴对称），它把对称轴上的每一个点都变成自己，因此每一点都是不动点，而对称轴是一条不动直线，因为它在反射下变成自己。此外垂直于对称轴的任意直线也是不动直线，不过，这时直线上的点的对应点不再是自己（这条直线和对称轴的交点除外）。

定义　如果变换σ和它的逆变换σ^{-1}是同一变换，即

$$\sigma(s) = \sigma^{-1}(s)$$

则σ叫做对合变换。

直线反射就是一个对合变换。

下面举几个常见的变换的例子：

（1）平面中的平移σ。

它使平面中的各点都沿同一方向移动相同的距离，这就是说，各点的位移都是相同的向量。设这个向量是$\vec{a}$，它所决定的平移是σ，那么对于任意一点P，象 $\sigma(P)=P'$由等式

$$\overrightarrow{PP'}=\vec{a}$$

确定（图4．4），容易验证σ是个变换。它的逆变换 σ^{-1}是由$-\vec{a}$决定的平移。

坐标法是研究变换的有力工具，今后我们将主要用坐标法来研究变换。为了得到平移σ的坐标表示，我们任取一个直角坐标系，设$\vec{a}=\{a_1,a_2\}$，$P=(x,\ y)$和$P'=(x',\ y')$，因为$\overrightarrow{PP'}=\vec{a}$，所以

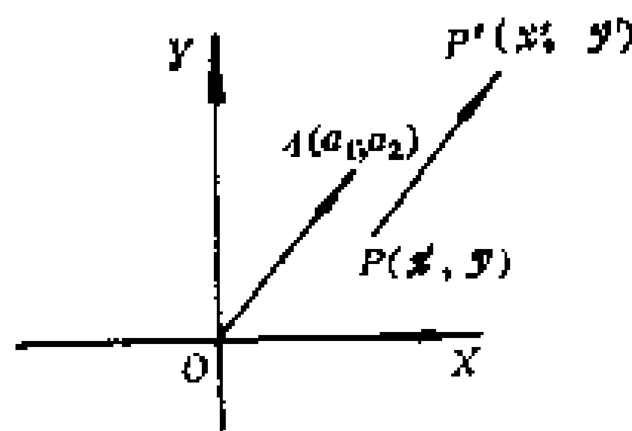


图4．4

$$\begin{cases}x'=x+a_1\\ y'=y+a_2\end{cases}$$

这就是平移变换σ的公式。应当注意，虽然它在表面上和坐标系平移变换式一模一样，但意义却完全不同。在坐标变换中是坐标系变动，而点没有动，现在的情况是坐标系没有动，而点在变动。

（2）平面中的直线反射σ。

可取直角坐标系的X轴作反射轴（图4.5）．设$P=(x,y)$，$P'=\sigma(P)=(x',y')$，这时，由反射的性质，可知直线反射σ的公式是

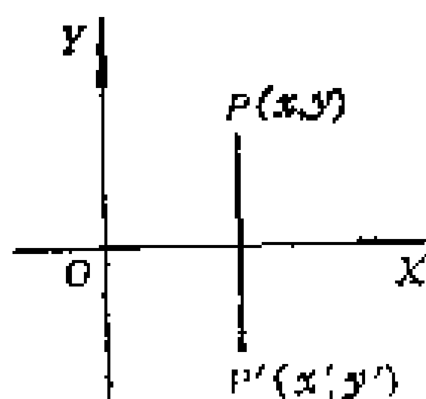


图4．5

$$\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}$$

显然，$\sigma^{-1}=\sigma$，因此直线反射是对合变换。

（3）平面内绕点O的旋转σ。

它使每对对应点P、P'满足$\angle POP' = \alpha$（常数）且具有同一旋转方向．我们以O为坐标原点，任取一个直角坐标系，于是旋转σ可由X轴旋转的角度α所决定（图4．6）．显然σ是个变换．为了得到它的坐标表示，我们注意，经过这个旋转，原来的坐标系〔O；XY〕变成了一个新坐标系〔O；$X'Y'$〕，OX'和OX的夹角是α．设点$P(x,y)$变成点$P'(x',y')$，由于经过旋转，平面上各点的相对位置并没有发生任何变化，因此点P'在新坐标系的坐标就是(X,Y)。所以(X',Y')和(X,Y)的关系，恰好是点P'在原坐标系的坐标(x',y')和它在新坐标系的坐标(x,y)之间的关系．因此，由坐标变换公式，得

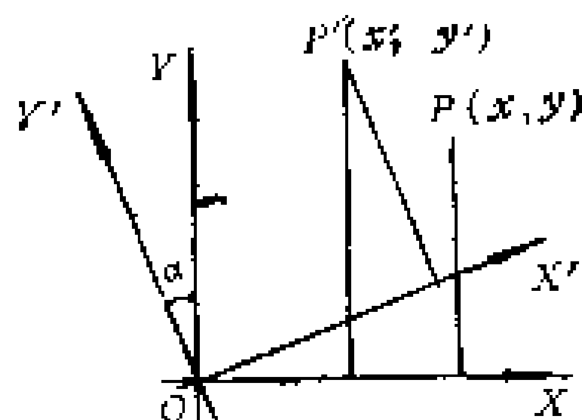


图4．6

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

这就是旋转σ的公式．和平移公式一样，表面上它和坐标变换公式相同，但意义则完全不同，坐标变换公式表示的是坐标系变动，点不变动，面旋转公式表示的是坐标系不动，点变动．

（4）平面中向着一条直线的压缩σ．

设这条直线是l，对于平面上任意点P，过P点作l的垂线，交l于点M，在此垂线上求一点P'，使得

$$\frac{P'M}{PM} = k, \qquad 0 < k < 1$$

其中，k是给定的常数，叫做压缩系数．设$\sigma(P) = P'$，易知σ是个变换．如果取直线l作X轴，设点P和点P'的坐标分别是(x,y)和(x',y')，那么变换σ的公式是

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$$

读者在学习解析几何时，可能已经知道，一个圆经过压缩后就变成了椭圆（图4．7），可以用这种方法来画椭圆．

（5）平面中的位似变换σ．

设以坐标原点O为位似中心，那么位似变换σ是这样的一个变换，它对于平面的任一点P，象点$P'=\sigma(P)$满足

$$\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$$

其中k是个常数（图4．8），利用位似变换的这个性质，易知它的变换公式是：

$$\begin{cases}x'=kx\\ y'=ky\end{cases}$$

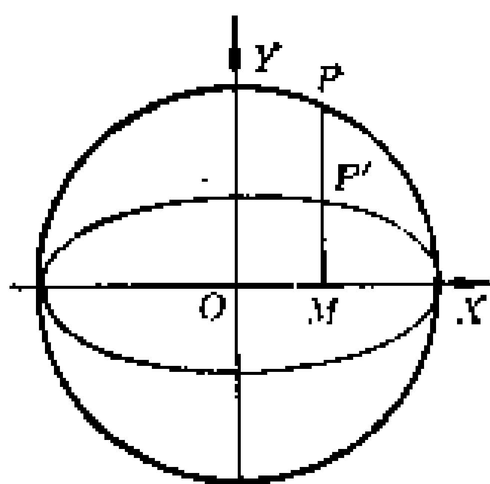


图4．7

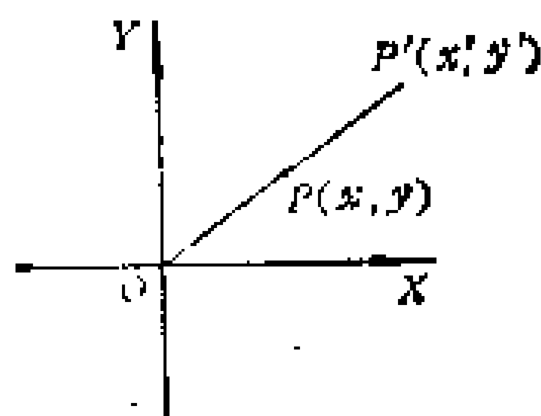


图4．8

从以上五个例子的变换公式，可以看出它们都是线性的，这是我们这一章要研究的变换的主要特征．下面举一个不是线性变换的例子．

（6）平面中的反演变换，严格地说，这是平面去掉一点（反演中心）后的集合的变换．

在平面上取一个定圆，设它的中心为O，半径为R（图4．9）．

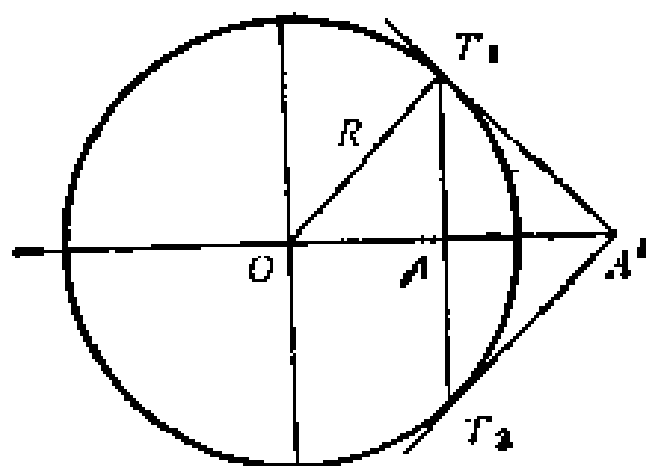


图4．9

除了圆的中心O外，对于平面上任意一点A，使它对应平面上满足下面条件的点A'：

(i) 点O、A和A'在同一直线上；

(ii) $OA \cdot OA' = R^2$.

这个对应叫做关于圆O的反演。

在关于圆O的反演下，对于圆O内的点A，要确定它的对应点A'时，可过点A作直线OA的垂直弦T_1T_2，自它的端点T_1或T_2作圆O的切线，则切线与直线OA的交点A'就是点A的对应点。事实上，从直角三角形$OA'T_1$可知，直角边OT_1是它在斜边上的射影和斜边的比例中项。如果点A在圆外，按相反顺序作图，则得到它的对应点A'。显然，圆内的点对应圆外的点，圆外的点对应圆内的点，而圆O上的点都与自身对应。

其次，在反演下，点与点间的对应是相互的，也就是说，如果点A对应点A'，则点A'也对应点A，即反演变换是对合。

此外，我们容易看出，在反演下通过点O的直线对应本身。圆O也对应本身。

为了得到反演的变换公式，我们以圆心O为坐标原点引进直角坐标系。设平面上任一点（原点除外）A的坐标为(x, y)，在关于圆O的反演下，它的对应点A'的坐标为(x', y')，由图4.10，则

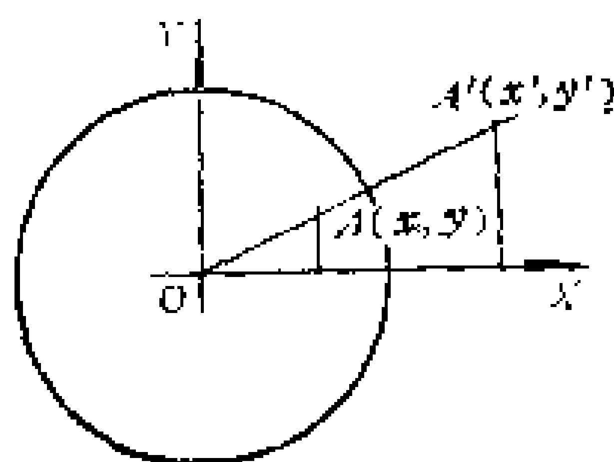


图4.10

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OA \cdot OA'}{OA^2}$$

但$OA \cdot OA' = R^2$（定义），$x^2 + y^2 = OA^2$，这里R是圆O的半径，由此得到：

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2}$$

这就是关于圆O反演的解析式。同理求得这个反演的逆变换公式为：

$$x=\frac{R^2x'}{x'^2+y'^2},\qquad y=\frac{R^2y'}{x'^2+y'^2}$$

从上面的解析式立刻看出反演是个对合。

利用上面的公式，可以证明反演的性质：圆或直线的对应图形，或者是圆或者是直线。

事实上，设任意圆或直线的方程为：

$$A^2(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$$

这里，如果A不为零，则为圆的方程，如果A等于零，则为直线的方程。将上面反演解析式代入这个方程，则得到：

$$AR^4+BR^2x'+CR^2y'+D(x'^2+y'^2)=0$$

我们看出，它是圆或者是直线的方程，并且可以看出在反演下：

(i) 通过点O的圆（$A\neq0$，$D=0$），变为不过点O的直线。

(ii) 不过点O的直线（$A=0$，$D\neq0$），变为过点O的圆（由反演的相互性得到）。

关于反演的其他性质，留给读者作为练习，自己证明。

例（1）到例（6）都是平面中的变换，但是，容易把这些例子推广到空间中去，得到空间中的一些相应的变换。

1.2 变换群

在欧氏几何中，我们知道连续施行两个运动的结果还是一个运动，这就是说运动是可以合成的。对于一般的变换来说，这也是对的。设在平面中或空间中给了任意两个变换σ和τ。我们连续施行这两个变换，在第一个变换σ之下点P变成了一个点P'，即$\sigma(P)=P'$。在第二个变换τ下，点P'又变成了一个点P''，即$\tau(P')=P''$。因此，连续施行σ、τ的结果，每个点P变成了一个确定的点P''，即$\tau(\sigma(P))=P''$。这就是说，我们利用σ、τ得到了一个映射，这个映射是一一的。因为如果$P\neq Q$，由于σ是一一的，则$\sigma(P)\neq\sigma(Q)$，再由于τ是一一的可知，

$\tau(\sigma(P))\neq\tau(\sigma(Q))$。同时，这个映射也是到上的。因为对于任意点$P''$，由于$\tau$是到上的，故有一点$P'$，使得$\tau(P')=P''$，再由$\sigma$是到上的，所以有一点$P$，使得$\sigma(P)=P'$。这样，$\tau(\sigma(P))=\tau(P')=P''$。因此，这个映射实际上是一个变换，我们把这个变换记作$\tau\sigma$。

定义 连续施行变换σ和τ所得到的变换$\tau\sigma$叫做σ和τ的积。

显然$(\tau\sigma)(P)=\tau(\sigma(P))$。

有了两个变换的积的定义后，不难给出任意有限个变换的积的定义。

积$\tau\sigma$表示先施行σ后施行τ。这里，因子的顺序是重要的，因为一般地，$\tau\sigma\neq\sigma\tau$。

例1 设σ是旋转

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha\\y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{cases}$$

τ是平移

$$\begin{cases}x'=x+a_1\\y'=y+a_2\end{cases}$$

则变换$\tau\sigma$是：

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+a_1\\y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+a_2\end{cases}$$

而变换$\sigma\tau$是：

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+a_1\cos\alpha-a_2\sin\alpha\\y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+a_1\sin\alpha+a_2\cos\alpha\end{cases}$$

因此，一般地$\tau\sigma\neq\sigma\tau$。

为了继续讨论变换的性质，我们需要一点群的知识。

定义 一个集合S叫做在二元运算（$*$）之下是封闭的，如果对于集合S中的任意一对有序元素a和b，对应S的唯一的一个元素$a*b$。

注意，并不是每个集合在每个二元运算之下都是封闭的，例如整数集合在除法运算之下就不是封闭的。

例 2　对于平面上任意一对点P、Q，假设 $P*Q$是线段PQ的中点。显然，平面上所有点的集合在“取中点”的运算下是封闭的。

定义　设一个集合S，它有一个二元运算$(*)$，如果满足下面四个条件，则$(S, *)$叫做一个群。

（1）S在$(*)$之下是封闭的；

（2）对于S中的任意三个元素a、b、c

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

这个性质叫做结合性；

（3）S中含有一个元素e，使得对于S中所有元素a，满足

$$e*a=a*e$$

元素e叫做S的单位元；

（4）对于S的每个元素a，S中存在唯一的元素a'，使得

$$a*a'=a'*a=e$$

a'叫做a的逆。

如果用$a+b$或ab代替 $a*b$，那么这个群分别叫做加法群或乘法群。这时单位元e分别用零元素O或单位元1代替，逆元a'在加法的情形记为$-a$，而在乘法的情形记为a^{-1}。为了使记号尽可能的简单，一般地是用乘法记号。

在不发生混淆的情况下，我们常将“群$(S, *)$”简称为“群S”。

在数学中，群的例子不胜枚举。

作为群的基础集合S，决不能是空集，面为一个群至少应该有一个单位元。

定义　如果群S是有限的，则称**有限群**，它的元素的个数叫做这个群的阶。如果S是无限的，则S叫做无限群。

应该特别注意的是，一般地$ab \neq ba$，

定义 如果一个群S，对于任意两个元素a、b，都有$ab = ba$，则这个群叫交换群。

由于（2），我们可以用abc来记$(ab)c$和$a(bc)$。利用数学归纳法可以证明，对于任意有限多个元素的乘积，也有结合性。因此，尽可不去管那些括号是怎样画的，反正结果是一样的，所以我们可定义幂，如$a^2 = aa$，$a^3 = aaa$，$a^{-2} = a^{-1}a^{-1}$，……等等。

定义 如果群G的一个子集H，在G的运算下仍然构成群，则H叫做G的子群。

定义 设G是平面上（或空间里）的由一些变换构成的集合，如果它在变换乘法之下构成一个群，那么G叫做变换群。也就是说，它要满足群的四个条件：

（1）G在变换乘法之下是封闭的；

（2）对于G的任意三个变换σ，τ，λ，满足结合律：

$$\lambda(\tau\sigma) = (\lambda\tau)\sigma$$

（3）G中有一个变换ε（单位元），使得：

$$\sigma\varepsilon = \varepsilon\sigma = \sigma$$

（4）对于G的任意变换σ，G中有一变换σ'（逆元），使得：

$$\sigma'\sigma = \sigma\sigma' = \varepsilon$$

例如，平面上的全体变换，就构成一个变换群。因为

（1）由定义，任意两个变换的积，还是一个变换。

（2）对于平面上的任意点P，由变换乘积的定义，可得

$$(\lambda(\tau\sigma))(P) = \lambda(\tau\sigma)(P)) = \lambda(\tau(\sigma(p)))$$

$$((\lambda\tau)\sigma)(P) = (\lambda\tau)(\sigma(P)) = \lambda(\tau(\sigma(P)))$$

因此

$$\lambda(\tau\sigma) = (\lambda\tau)\sigma$$

（3）由变换乘积的定义可知，平面上的恒等变换ε，对

于平面上的任意变换σ，有

$$\sigma\varepsilon=\varepsilon\sigma=\sigma$$

（4）平面上任意变换σ的逆变换σ^{-1}满足

$$\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=\varepsilon$$

显然，任意集合S的全体变换也构成一个变换群。平面上的变换群是它的特例。

欧氏几何中的运动公理保证平面上的全体运动构成一个变换群。下一节我们将较仔细地讨论它们。

定义 平面上（或空间里）的图形在一变换群G的所有变换下保持不变的性质或量（函数），叫做**图形在变换群G下的不变性质和不变量**。若在G下的所有不变量都可用某一个不变量来表示，这个不变量叫做**基本不变量**。

下面即将看到，变换群所对应的几何学就是研究变换群下的不变性质和不变量的，这些性质就是这种几何的几何性质。

1．3 几何学的群论原则

克莱因在他著名的“爱尔兰根纲领”中提出了几何学的群论原则。

在欧氏几何里，我们学过三角形和圆等图形以及它们的一些性质，并且知道一切相等的图形有相同的性质。由此可见，所谓图形F的性质是指那些和图形F相等的一切图形所具有的公共性质。我们也知道图形相等的含义，两个图形是相等的，表明存在一个使得一图形变成另一图形的运动。因此，和图形F相等的一切图形所具有的共同性质，无非是图形在运动之下保持不变的那些性质。这样，我们可以说欧氏几何就是研究在运动群之下所有那些不变性质和不变量的一种几何。

一般来说，几何学的群论原则可以概括地归纳如下：

首先，考虑某一集合Ω，它的元素叫做点，它的每个子集叫做图形（例如直线、直线形等等），并且给出这些图形的某些性质，集合Ω叫做基础集合，有时也叫做空间。

其次，考虑从集合Ω到Ω的某一变换群G，根据它可将Ω的图形分成等价类：如果G中有一个变换f，使图形A变成图形B，那么称图形A与图形B等价。图形间的等价关系具有下列性质：

（1）图形A必与它自身等价（反身性）。

这是因为群G里的恒等变换把A变成A。

（2）如果图形A与图形B等价，则图形B也与图形A等价（对称性）。

这是因为群G里的变换f，使$B=f(A)$，而其逆变换f^{-1}，使$A=f^{-1}(B)$。

（3）如果图形A与图形B等价，图形B与图形C等价，则图形A也与图形C等价（传递性）。

这是因为$B=f(A)$，$C=g(B)$，因而$g(f(A))=g(B)=C$。

由此可见，为了保证等价图形的基本性质，集合Ω上的变换构成群是绝对必要的，没有这个条件就不能使用“等价”这个关系。根据等价关系可以把集合Ω内的所有图形进行分类，凡是等价的图形属于同一等价类。于是，同一类里的一切图形所共有的几何性质必定是变换群G下的不变性质和不变量。反过来，图形在变换群下的不变性质和不变量，必定是同一个等价类里一切图形所共有的性质，而这些性质正是该几何学所要研究的。因此，可以说每种几何学都被它的一个固有的变换群G所确定，而且根据关系：“空间Ω上的几何学性质$\Longleftrightarrow$属于变换G的所有变换下保持不变的性质”，由变换群G完全赋与了这种几何学所具有的特征。

在上述两方面的意义下，一种几何可以用几何（Ω，G）来表示。简略地说就是：**几何学是研究某空间Ω上的图形在变换群G下不变性质和不变量的命题系统。**这种几何学简称群G的几何学。

按着克莱因的几何学群论原则，每一种几何学都是由空间Ω和其上的变换群G决定的。空间Ω相同，但其上的变换群G不同，就可以构成不同的几何学，因为它们的等价关系不同，变换群下的不变性质和不变量不同，例如下面要讲的欧氏几何（运动群），相似几何（相似群）以及仿射几何（仿射群）等都是。当空间Ω不同而变换群相同，也可以构成不同的几何学，例如欧氏几何和罗氏几何。

设有集合S的一个变换群G和G的一个子群G_1，它们所对应的几何学分别是甲和乙。因为G_1的每个变换都在G里，所以群G的不变性质和不变量必然是G_1的不变性质和不变量。所以几何甲中所研究的几何性质、对象必在几何乙中；反过来，G_1中的全部变换虽然都属于G，但一般说来G_1的全部变换可能仅仅是G的全体变换的一部分，从而G_1的不变性质和不变量不一定是G的不变性质和不变量，所以几何乙中所研究的几何性质、对象不一定在几何甲中。这就是说，作为几何基础的变换群越大，则对应的几何内容越贫乏；反过来，变换群越小，则所对应的几何内容越丰富。

我们在这里比较抽象地提出了克莱因的观点和原则，以下各章就是在这种原则的基础上展开的。也许读者现在对这一原则还不能很好的理解，但不要因此面感到不安。上面所说的只不过是个引子，待学完以下各章之后，你会进一步地理解这一原则，并且能够较深入地掌握它。

§2 正交变换群与正交几何

在欧氏几何中研究了运动公理，而且我们已经知道，所谓运动无非是平移、旋转、反射以及它们的某种合成（乘积），这些变换的基本特征是保持两点间的距离不变。那么，保持两点间的距离不变的变换是不是就是运动呢？为此我们来研究正

交变换．

2．1 正交变换的定义和简单性质

定义 平面上（或空间中）保持两点间距离不变的变换，叫做正交变换。

显然，运动是正交变换。

正交变换有下列性质：

（1）两个正交变换的乘积是正交变换；正交变换的逆变换还是正交变换。这些都不难用正交变换的定义验证。容易看出正交变换的全体构成一个群，叫做正交变换群。

（2）正交变换把直线变成直线。为此，我们只需要证明，正交变换把共线的三点变成共线的三点。设 P、Q、R是平面上顺序的三点，那么，它们在同一直线上的充要条件是

$$|PQ|+|QR|=|PR|$$

因为正交变换保持距离不变，所以变换之后，这个等式仍然成立，因此还在一条直线上。

利用上面的事实可以证明，空间中的正交变换还把平面变成平面。

（3）正交变换把相交直线（或平面）变成相交直线（或平面）；平行直线（或平面）变成平行直线（或平面）。

平行直线（或平面）没有公共点，它们经过正交变换之后，根据变换是一一的和性质（2），仍然变成没有公共点的直线（或平面），即仍旧是平行直线（或平面）。

（4）正交变换保持线段的分比不变。

由正交变换保持距离不变这一事实即可推出。

由性质（4）和（2），正交变换把线段变成线段，因为线段上的任意点把线段分成定比 λ，经过正交变换，λ 保持不变。所以线段上的点仍变成线段上的点，由此推出线段变成线段。

（5）正交变换保持角度不变。

实际上，设$\angle AOB$（A、B是在角两边上任取的点）在正交变换下变成$\angle A'O'B'$。因为正交变换保持距离不变，所以$\triangle AOB$与$\triangle A'O'B'$的对应边相等，于是

$$\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$$

因此$\angle AOB = \angle A'O'B'$。

（6）正交变换把直角坐标系变成直角坐标系，而且任意点M的象M'在新坐标系里的坐标与点M在原坐标系里的坐标相同。

因为正交变换即保持距离又保持角度不交，因此它把直角坐标系变为直角坐标系（图4．11）。



图4．11

设点M的坐标为(x, y)，因为正交变换保持分比不变，因而有

$$x = \frac{OM_1}{OE_1} = \frac{O'M_1'}{O'E_1'}$$

$$y = \frac{OM_2}{OE_2} = \frac{O'M_2'}{O'E_2'}$$

这表明M'在变换后的坐标系中的坐标与M在原坐标系中的坐标相同。其中，E_1、E_2分别是X轴与Y轴上的单位点；M_1、M_2分别是M在X轴与Y轴上的正投影。

对于空间的正交变换，也有同样的结果。

2．2　正交变换的坐标表示与分解

有了正交变换的性质（6），很容易求出它的坐标表示。

先来考虑平面上的正交变换（图4．12）．

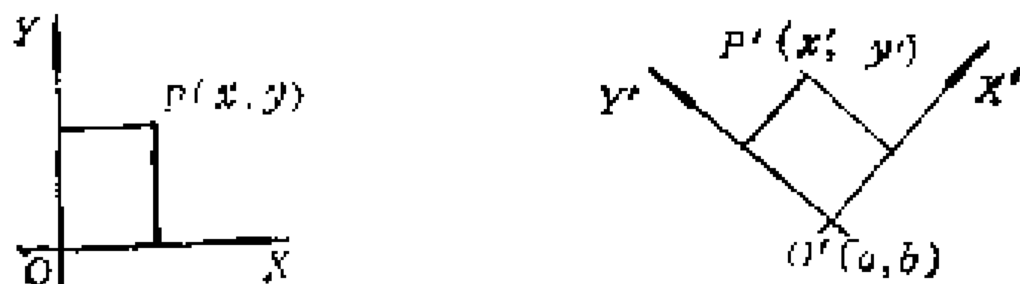


图4．12

设σ是平面上一个给定的正交变换．任取一个直角坐标系〔O；X，Y〕．在这个坐标系里，设点$P(x,y)$经过σ变成点$P'(x',y')$，我们来求出(x,y)和(x',y')之间的关系．

由正交变换的性质（6），直角坐标系〔O；X，Y〕，经过σ变成直角坐标系〔O'；X'，Y'〕．设O'在原坐标系中的坐标是(a,b)，设$O'X'$和OX的夹角是α，由于点P'在新坐标系里的坐标恰好是(x,y)，那么，现在(x,y)和(x',y')之间关系，相当于点P'的新坐标和旧坐标之间的关系．因此，可利用坐标变换公式求出(x,y)和(x',y')之间的关系．

由坐标变换公式，我们知道，当〔O；X，Y〕和〔O'；X'，Y'〕同为左手系或同为右手系时，有

$$\begin{cases}x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a\\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b\end{cases} \qquad (1)$$

当〔O；X，Y〕和〔O'；X'，Y'〕中，一个是右手系，一个是左手系时，则有

$$\begin{cases}x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + a\\ y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + b\end{cases} \qquad (2)$$

这就是正交变换σ的公式．

由上面的公式可以看出，对于第一种情况，正交变换σ可表示为一个旋转τ：

$$\begin{cases}x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha\end{cases}$$

与一个平移φ：

$$\begin{cases}x' = x + a \\ y' = y + b\end{cases}$$

的乘积，即：

$$(x,\ y)\xrightarrow{\tau}(x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

$$\xrightarrow{\varphi}(x\cos\alpha - y\sin\alpha + a,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha + b)$$

对于第二种情况，正交变换σ可先经过一个关于X轴的反射Ψ：

$$\begin{cases}x' = x \\ y' = -y\end{cases}$$

然后再经过一个旋转τ和一个平移φ而得到：

$$(x,\ y)\xrightarrow{\Psi}(x,\ -y)\xrightarrow{\tau}(x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ x\sin\alpha - y\cos)$$

$$\xrightarrow{\varphi}(x\cos\alpha + y\sin\alpha + a,\ x\sin\alpha - y\cos\alpha + b)$$

所以，一个正交变换或者分解为一个旋转和一个平移的乘积，或者分解为一个反射、一个旋转和一个平移的乘积，于是我们得到一个重要的结论：

定理4．1 平面的正交变换就是运动。

应该注意，我们所说的运动和通常所说的刚体运动是不同的，我们所说的运动，其实是满足运动公理的变换，不一定能通过刚体运动来实现。比方说，平面上的直线反射，就不能通过平面上的刚体运动来实现。因此，我们可以把运动分成两类：一类是把右手系变成右手系，叫做第一类运动；一类是把右手系变成左手系，叫做第二类运动，刚体运动指的就是第一类运动。

正交变换σ在两种情况下的公式（1）和（2），可以统一写成

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases} \qquad (4.1)$$

其中，矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

满足正交条件

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \qquad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

这种矩阵叫做二阶正交矩阵，由上述条件可知

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

并且可知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

所以

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \pm 1$$

显然，前面的公式（1）、（2）是上列公式的特殊情况。

由于 $a_{11} = a_{22} = \cos\alpha$，$a_{12} = a_{21} = \sin\alpha$，所以有时也将（1）、（2）两式统一写成

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \varepsilon\beta y + a_1 \\ y' = \beta x + \varepsilon\alpha y + a_2 \end{cases}$$

其中$\varepsilon = \pm 1$，$\alpha^2 + \beta^2 = 1$。

现在我们来说明公式（4．1）确实表示一个正交变换。

设 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 是平面上的任意两点，而 $P_1'(x_1', y_1')$，$P_2'(x_2', y_2')$分别是它们的象点，则由

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_1 \\ y_1' = a_{21}x_1 + a_{22}y_2 + a_2 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x_2' = a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_1 \\ y_2' = a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_2 \end{cases}$$

得：

$$x_1' - x_2' = a_{11}(x_1 - x_2) + a_{12}(y_1 - y_2)$$

$$y_1' - y_2' = a_{21}(x_1 - x_2) + a_{22}(y_1 - y_2)$$

于是：

$$\begin{aligned} & (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 \\ = & [a_{11}(x_1 - x_2) + a_{12}(y_1 - y_2)]^2 + \\ & [a_{21}(x_1 - x_2) + a_{22}(y_1 - y_2)]^2 \\ = & (a_{11}^2 + a_{21}^2)(x_1 - x_2)^2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_1 - y_2)^2 + \\ & + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

这里用到$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 = a_{12}^2 + a_{22}^2, a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$，由此可知$P_1'$、$P_2'$的距离等于$P_1$、$P_2$的距离。所以这个公式确实表示一个正交变换。因此，只要我们适当地选择a，总能把公式

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases}$$

写成前面的（1）、（2）那种形式，$\Delta = 1$是第一类运动，而$\Delta = -1$是第二类运动。

对于空间的正交交换可同样讨论，不过情况稍微复杂一些罢了。

设σ是三维空间的一个给定的正交变换。任取一个直角坐标系$[O; XYZ]$，在这个坐标系里设点$P(x, y, z)$经过σ变成点$P'(x', y', z')$。那么，利用正交变换的性质（6）和坐标变换公式，得到σ的公式是

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 \end{cases}$$

其中，矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

满足条件

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$$

其中

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{当} j = k \text{时} \\ 0, & \text{当} j \neq k \text{时} \end{cases}$$

这种矩阵叫做三阶正交矩阵。和二阶正交矩阵一样，由上述条件可知

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \pm 1$$

其中 $\Delta = 1$对应于 σ 把右手系变成右手系的情况，而 $\Delta = -1$对应于 σ 把右手系变成左手系的情况。

和平面情况类似地有下列定理（证明从略）

定理 4．2 空间的正交变换就是运动。

和平面的情形一样，我们把空间中的运动分为两类，一类把右手系变成右手系，叫做第一类运动，它是由一个平移和一个旋转合成的；另一类把右手系变成左手系，叫做第二类运动，它是由一个平移、一个旋转再加一个平面反射合成的。前者对应于$\Delta = 1$，后者对应于$\Delta = -1$。

2．3 正交变换群的几何—正交几何

我们已经弄清楚了正交变换就是运动，现在可以说所谓欧氏几何就是正交变换群下的几何，即研究在正交变换之下的那些不变性质和不变量。由正交变换的定义，“距离”是基本的不变量。由此可以推出一系列的其它的不变性质和不变量。

正交变换把任意图形 F 变成与它相等的图形 F'，但正交

变换是构成群的，因此图形的相等关系具有下列性质：

（1）图形F与自身相等（反身性）．恒等变换保证了这一关系．

（2）如果图形F相等于F'，则图形F'也相等于图形F（对称性）．逆变换的存在保证了这一性质．

（3）如果图形F_1相等于图形F_2，图形F_2相等于图形F_3，则图形F_1相等于图形F_3（传递性）．正交变换的积是正交变换保证了这一性质．

因此，图形的相等关系是一个等价关系．按着这一关系可将平面（空间）内的所有图形进行分类，凡是相等的图形都属于同一个等价类，其中的所有图形具有共同的几何性质，它们是正交变换下的不变性质；反过来，正交变换下的不变性质，也正是同一等价类图形的共同性质．

正交变换群的几何就是研究正交变换下各等价图形的共同性质，也就是正交变换下图形的不变性质和不变量．例如：结合关系、顺序关系、相等关系、度量关系、平行关系等都是，而这些关系都是欧几里得公理系统的推论．具体地说，这些不变性质和不变量也就是属于、介于、相交、平行、垂直、相等、角、正多边形、相似形、圆和其它二次曲线、长度、面积等，以及把这些平面几何的性质推广到空间的一些性质等等．它们都是欧氏几何所研究的几何性质和量．可见，正交变换群的几何学——正交几何，属于欧氏几何学．

2．4　利用正交变换解作图题

利用前面讲过的正交变换（平移、反射、旋转以及它们的合成等）解决初等几何的一些作图问题是很方便的，具体的应用可通过下面几个例子说明．

例1　在两圆之间求作一线段XY，使它以定点A为中点（图4．13）．

解　如果线段XY已经作出，延长XO_1到X_1，将圆O_1沿O_1A

方向平移，使X_1与Y重合。于是 O_1点变成O_1'点，易知 $AO_1=AO_1'$。由此得到作法。

在O_1A的延长线上截取 $AO_1'=AO_1$，以 O_1'为圆心作与圆O_1半径相等的圆O_1'，把它与圆 O_2的交点Y和A用直线连接起来就成了。显然，这个问题可以有两解、一解或无解。

例 2 在一给定的$\angle ABC$内作一周长最小的内接三角形，使其一个顶点为角内一已知点M，另两个顶点分别在已知角的两边上（图 4．14）。

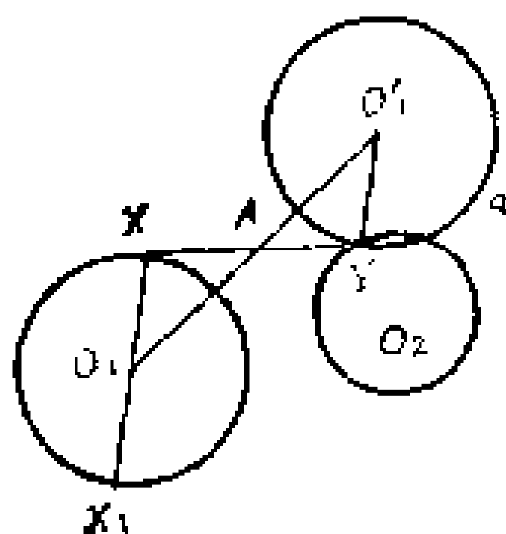


图 4．13

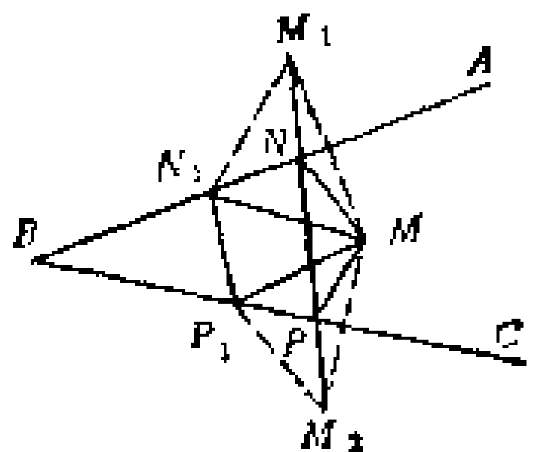


图 4．14

解 对于以M为一顶点的任意内接三角形MN_1P_1，作M点关于直线AB和BC的对称点M_1和 M_2，则 $\triangle MN_1P_1$ 的周长等于$M_1N_1+N_1P_1+P_1M_2$，显然折线 $M_1N_1P_1M_2$ 变成直线时，对应$\triangle MNP$的周长最小。因此，不难作出这个三角形来。

例 3 以已知点O为一顶点，作一等边三角形，使其它两个顶点分别在已知直线a、b上。

解 设 $\triangle OA'B'$ 为所求三角形（图4．15）。如果线段OA'与直线a同时绕O点旋转60°，则点 A'与B'重合。这时，B'点就是直线a 绕 O 点旋转60°后的直线a'与b的交点。因此，作出直线a'，问题就

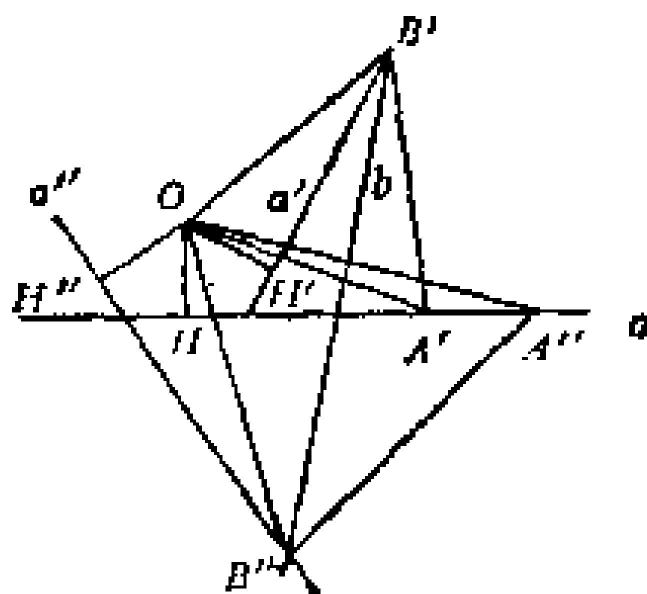


图4．15

算解决了，于是有下列作法：

从点O向直线a作垂线OH。再作点H'，使$\angle HOH'=60°$，且$OH=OH'$。过H'点作垂直于直线OH'的直线a'，则直线a'与直线b的交点即为B'点。

由于OH可向两个相反的方向旋转60°，因此，还能求得$OH''=OH$，从而得到相应的直线a''、请读者自己讨论一下解的情况，它可能有两解、一解或无穷多解。

例4　已知线段XY（图4．16），及直线XY同侧的两已知点A、B．在直线XY上求两点M、N，使线段MN等于线段XY且同向，同时使折线$AMNB$的长为最小。

解　对于任意折线$AMNB$，其中$MN=XY$且同向．先将点A沿XY方向平移至A'，使得$AA'=MN$，再作点A'关于直线XY的对称点A''．这时有

$$\begin{aligned}AMNB&=AM+MN+NB\\&=AM+NB+MN\\&=A'N+NB+XY\\&=A''N+NB+XY\end{aligned}$$

因此，只要$A''N+NB$最小，那么折线$AMNB$就最小．显然，折线$A''NB$变成直线时，折线$AMNB$就最小．

于是可作图如下：按所指出的那样，将A点平移反射求得A''点，作连结点A''与点B的直线，它与直线XY的交点即为所求的N点，再作出M点．

这个问题有且仅有一解．

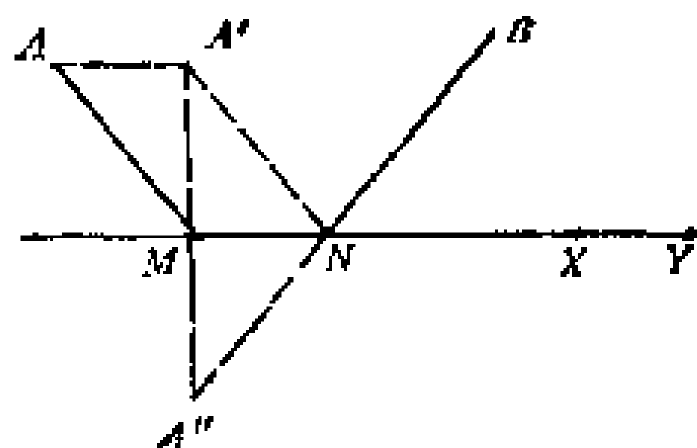


图4．16

§3　相似变换群与相似几何

正交变换的特点是保持两点间的距离不变．正交变换只是

改变图形的位置，并不改变图形的大小和形状。因此，它不能反映物体的形变。在形变中，大概仅有尺寸大小的改变而形状完全相同的形变要算是最简单的了。反映这一种形变的就是相似变换。我们先从最简单的相似变换谈起。

3．1 位似变换

1 位似变换的定义和性质

定义 如果平面上一变换的每一对对应点A、A'满足下面条件：

（1）A和A'在通过点O的同一直线上；

（2）$OA'/OA=\lambda$，其中λ是不等于零的常数；

（3）如果$\lambda>0$，点A和A'在点O的同侧，如果$\lambda<0$，点A和A'在点O的异侧，则这种变换叫做**位似变换**（或中心相似变换），常数λ叫做位似比（或中心相似比），点O叫做**位似中心**（或相似中心）。

如果位似比$\lambda>0$，则点O叫做外相似中心。如果位似比$\lambda<0$，则点O叫做内相似中心（图4．17）。

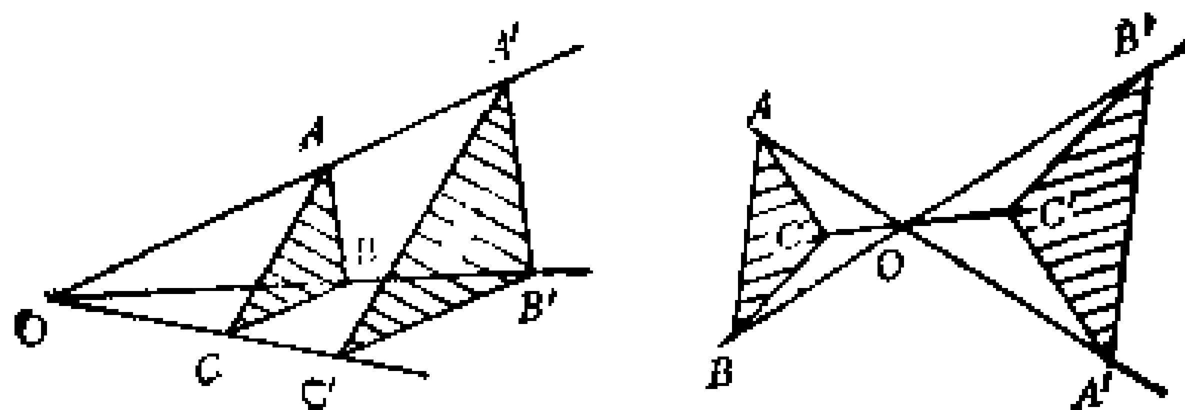


图4．17

显然，位似变换在位似比$\lambda=1$和-1的特殊情况下，分别是恒等变换和中心对称。

位似变换一般只有一个不动点，即位似中心。通过位似中心的所有直线是不动直线。

正如前一节讨论过的那样，如果以位似中心为坐标原点任取一个直角坐标系，那么位似变换的公式是：

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases} \tag{4.2}$$

利用这个公式，容易验证位似变换有下列性质：

（1）有同一位似中心的两个位似变换的积是位似变换；位似变换的逆变换是位似变换。因此，具有同一中心的所有位似变换构成一个群。

（2）位似变换把直线变成直线。

（3）位似变换把平行直线变成平行直线。

（4）位似变换保持线段的分比不变。

（5）位似变换使对应线段的比等于位似比的绝对值。

位似变换实际上是把一个图形放大或缩小的一种变换。它在初等几何的作图方面有许多应用。

2　利用位似变换解作图题

例 1　求作一个正三角形，使其内接于已知三角形，并且一个边与已知三角形一边平行。

解　在已知△ABC内先作一正△$A_1B_1C_1$（图 4．18），使得B_1、C_1分别在边 AC、BC上，$B_1C_1 \parallel BC$，且A与 A_1在B_1C_1的异侧。连结直线AA_1，设它与边BC相交于A'。过A'点作 $A'B' \parallel A_1B_1$，$A'C' \parallel A_1C_1$，设$A'B'$与AC相交于B'，$A'C'$与AB相交于 C'。则易知△$A'B'C'$与△$A_1B_1C_1$ 成位似。因此，△$A'B'C'$就是我们所要求的正三角形。

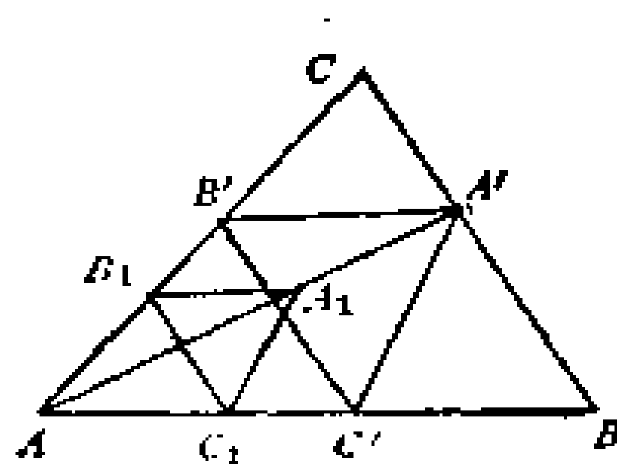


图 4．18

显然，本题有三个解。

例 2　已知通过点O的三条射线 a、b、c，求作一个圆，使它与直线a 相切，中心在直线 b上，并且在直线 c 上截取的线段等于定长 l。

解 以直线 b 上任意点 S 为中心，以 r 为半径作圆与直线 a 相切（图 4．19）．设这个圆在直线 c 上所截的弦 $AB=m$．因为所求圆的中心 S' 在直线 b 上，并且与直线 a 相切，所以与圆 S 关于点 O 位似，如果用 r' 表示圆 S' 的半径，则位似比 $k=l/m$，并且 $r'=kr$．由此我们得到作图方法．

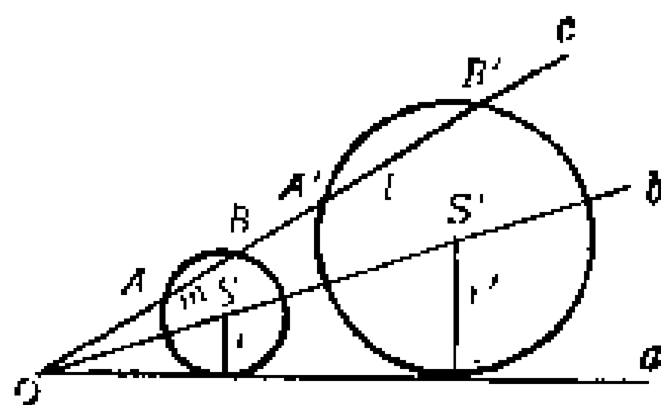


图 4．19

首先作圆 S，由位似比 k 求出中心 S'，再以 r' 为半径作圆就是所要求的．

本题只有一个解．

3．2 相似变换的定义和简单性质

位似变换使得对应线段的比是个正的常数（位似比的绝对值）．这个性质反映了相似变换的特征．

定义 平面上的变换，如果对应线段 $A'B'$ 与 AB 的比是个正的常数：

$$\frac{A'B'}{AB}=k$$

则这种变换叫做相似变换，k 叫做相似比．

在相似变换下，如果图形 F 变为图形 F'，则说图形 F 相似于图形 F'．

从相似变换的定义可以直接看出，正交变换是相似变换当相似比 k 等于 1 的特殊情形．显然位似变换是相似变换的特例．

相似变换具有下面的性质：

（1）相似变换 θ 的逆变换 θ^{-1} 仍是相似变换．

事实上，设相似变换 θ 的对应线段为 AB 和 $A'B'$，相似比为 k：

$$\frac{A'B'}{AB}=k$$

则逆变换θ^{-1}的对应线段为$A'B'$和AB，并且它是以k的倒数：

$$k'=\frac{1}{k}=\frac{AB}{A'B'}$$

为相似比的相似变换。

根据这个性质可知，如果图形F相似于F'，则F'也相似于F。

（2）两个相似变换θ_1和θ_2的积仍是一个相似变换。

事实上，设相似变换θ_1把线段AB变为A_1B_1，相似比为k_1，相似变换θ_2把线段A_1B_1变为A_2B_2，相似比为k_2。这时两个相似变换的积$\theta_2\theta_1$把线段AB变为A_2B_2，而且

$$\frac{A_2B_2}{AB}=\frac{A_2B_2}{A_1B_1}\cdot\frac{A_1B_1}{AB}=k_2k_1$$

因此，$\theta_2\theta_1$是以k_2k_1为相似比的相似变换。所以平面上所有相似变换构成一个群，叫做相似变换群。

根据这个性质可知，如果图形F相似于F_1，F_1相似于F_2，则F相似于F_2。

其次，由上面两个性质可知，相似变换$\theta^{-1}\theta$是恒等变换，恒等变换把每个图形F变为本身。因此，每个图形相似于本身。

（3）在相似变换下，一条直线上的点，仍变到一条直线上，也就是直线变为直线。

事实上，设A、B、C是一条直线a上的三个点，并且点B在A与C之间，A'、B'、C'是它们的对应点（图4．20）．根据相似变换的定义

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=k$$

这里的k是相似比。由此得到

$$\frac{A'B'+B'C'}{A'C'}=\frac{AB+BC}{AC}$$

因为，$AB+BC=AC$，所以 $A'B'+B'C'=A'C'$。因此，点A'、B'、C'也在一条直线上，并且点B'在A'与C'之间。

根据这个性质可知，在相似变换下，射线变为射线，角变为角，任意三角形变为与其相似的三角形。



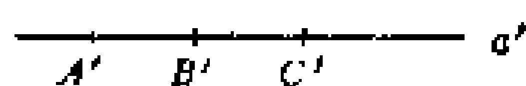


图4·20

定义 一条直线上三个点A、B、C构成的比AC/BC叫做简单比。这个简单比常用记号(ABC)表示，A、B叫做基础点，C叫做分点。简单比与线段的分比略有不同，AB由分点C所得到的分比是AC/CB，从有向线段来看，两者差一符号。C内分AB时，简单比是负值，外分时是正值。

（4）在相似变换下，一条直线上的三个点A、B、C的简单比不变。

设三点A、B、C在相似变换下，变为点A'、B'，C'、根据相似变换定义

$$\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$$

由此得到

$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{AC}{BC}$$

也就是

$$(A'B'C')=(ABC)$$

（5）在相似变换下，角的大小不变。

事实上，对任意$\angle ABC$，在相似变换下，$\triangle ABC$变为$\triangle A'B'C'$，且

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=k$$

因此$\triangle ABC$相似于$\triangle A'B'C'$，于是$\angle A'B'C'=\angle ABC$。

（6）在相似变换下，对应三角形的面积比不变。

事实上，设三角形ABC变为$A'B'C'$，用h和h'表示这两个三角形的高（图4.21）。根据上述性质，在相似变换下，h变为h'。因此，

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\frac{A'B'\cdot h'}{AB\cdot h}=k^2$$

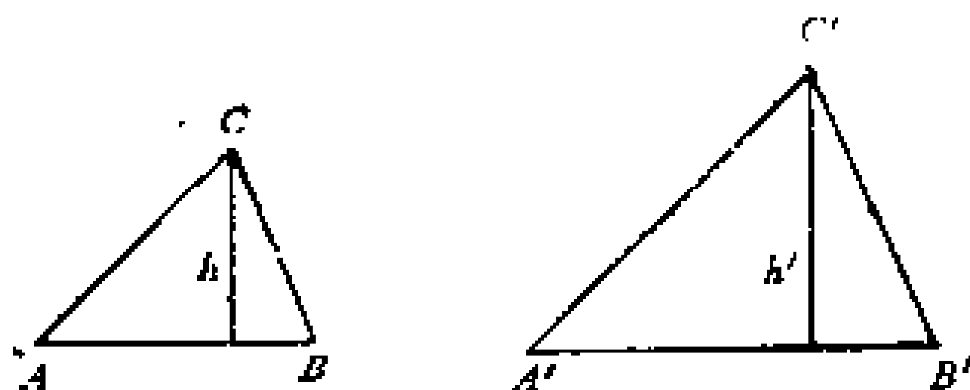


图4·21

这里S_{ABC}和$S_{A'B'C'}$表示对应三角形的面积。由这个等式可知，三角形面积的比是相似变换的不变量。

现在研究决定相似变换的条件，我们有下面的定理。

定理 4.3 相似变换由不共线的三对对应点唯一确定。

证明 设已知相似变换的三对对应点为A、A'，B、B'，C、C'，构成了两个相似三角形ABC和$A'B'C'$（图4.22）。我们证明把三角形ABC变成三角形$A'B'C'$的相似变换只有一个。

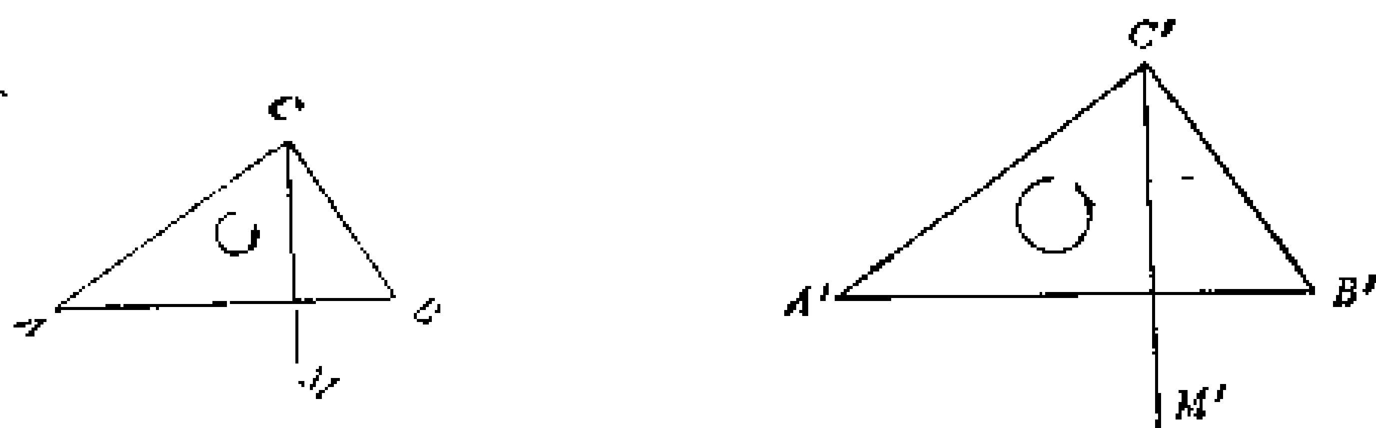


图4·22

事实上，设M是平面上的任意一点，根据相似变换性质（5），$\angle ACM=\angle A'C'M'$，点M的对应点M'在$C'M'$上，又根据相似变换的定义

$$C'M'/CM=C'A'/CA=k$$

即

$$C'M'=kCM$$

所以点M'唯一确定。

与运动相类似，相似变换也可以分为两类，把一个三角形变为同向三角形的相似变换，叫做**第一类相似变换**。反之，把一个三角形变为异向三角形的相似变换，叫做**第二类相似变换**。

显然，两个同类相似变换的积，是第一类相似变换；两个不同类相似变换的积是第二类相似变换。

3.3 相似变换的分解与坐标表示

1 相似变换的分解

下面我们讨论相似变换的分解，这可由下面几个定理来完成。

定理 4.4 相似变换是位似变换与运动的积

证明 相似变换θ是由三对对应点A、A'，B、B'和C、C'，也就是两个相似三角形ABC和$A'B'C'$确定的(图4.23)。

任意取一点O作为位似中心，以已知相似比$A'B'/AB=k$作为位似比。作出三角形ABC关于中心O的位似三角形$A_1B_1C_1$，则三角形$A_1B_1C_1$与$A'B'C'$相等。

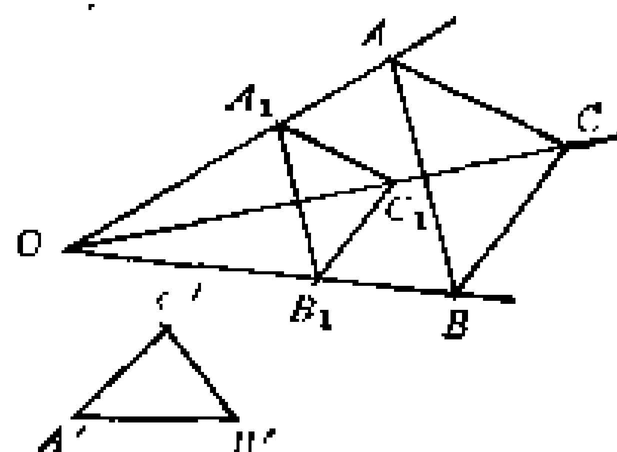


图4.23

由此可知，设三角形ABC和$A_1B_1C_1$决定的运动为τ，再设以点O为中心，以k为位似比的位似变换为σ，则它们的积就是已知相似变换θ：

$$\theta=\tau\sigma$$

于是定理得到证明。

2 相似变换的坐标表示

利用相似变换是一个位似变换和一个运动的乘积这一事实，不难得到相似变换的公式。

设这个位似变换为

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

而这个运动是

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases}$$

其中

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵，而 k 是相似比。

于是这个位似和运动的乘积是

$$\begin{cases} x' = k(a_{11}x + a_{12}y) + a_1 \\ y' = k(a_{21}x + a_{22}y) + a_2 \end{cases} \tag{4.3}$$

反之，任意这种形式的变换式表示一个相似变换。

这显然是一个线性变换式，它的变换行列式是

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \pm k^2$$

其中“+”号表示第一类相似变换。“-”号表示第二类相似变换。

有了相似变换的坐标表示，就可以用解析法来研究相似变换。

空间的相似变换可作完全类似的讨论。

定理4.5 异于运动和位似的第一类相似变换 θ_1是以某一点 O为中心的旋转与同一点为中心的位似变换的积。

证明 相似变换θ_1是由两个相似三角形 ABC和 $A'B'C'$确定的（图 4.24）。

现在来找点 O，我们注意点 O应是相似变换的不动点，根据已知条件，线段AB与$A'B'$不相等也不平行。设 S 是直线AB与$A'B'$交点。因为三角形OAB与 $OA'B'$ 相似，所以$\angle OAS =$

$\angle OA'S$，这就是说四个点O、S、A、A'在同一圆周上。同理，四个点O、S、B、B'也在同一圆周上。因此，不动点是通过三点S、A、A'和S、B、B'的两个圆的交点。

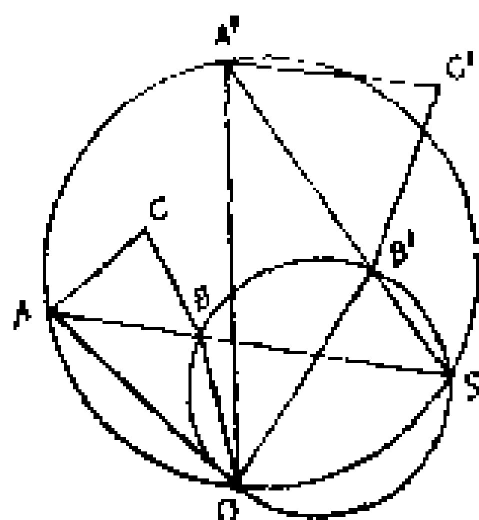


图 4.24

我们作出点O，以O为中心，以$\varphi=\angle AOA'$为旋转角作旋转τ，再作以O为中心，以$k=A'B'/AB$为位似比的位似变换σ，则它们的积就是已知相似变换θ_1，即

$$\theta_1=\sigma\tau$$

应该注意，点S可能与O重合，在这种情况下，可用直线BC和$B'C'$或直线AC和$A'C'$的交点。

可以看出，异于运动和位似的相似变换有一个不动点。

定理4.6 异于运动的第二类相似变换θ_2是反射与反射轴上某一点O为中心的位似变换的积。

证明 设相似变换θ_2是由两个相似三角形ABC和$A'B'C'$确定的（图4.25）。

现在来找点O，我们注意点O是相似变换的不动点。根据已知条件，因为直线OA应该与OA'对称，直线OB应该与OB'对称。所以，对称轴应是三角形AOA'与BOB'的$\angle O$的平分线，设它分别与AA'、BB'交于点P和Q，P和Q必分别将线段AA'和BB'分成比值等于相似比k的两个线段，即

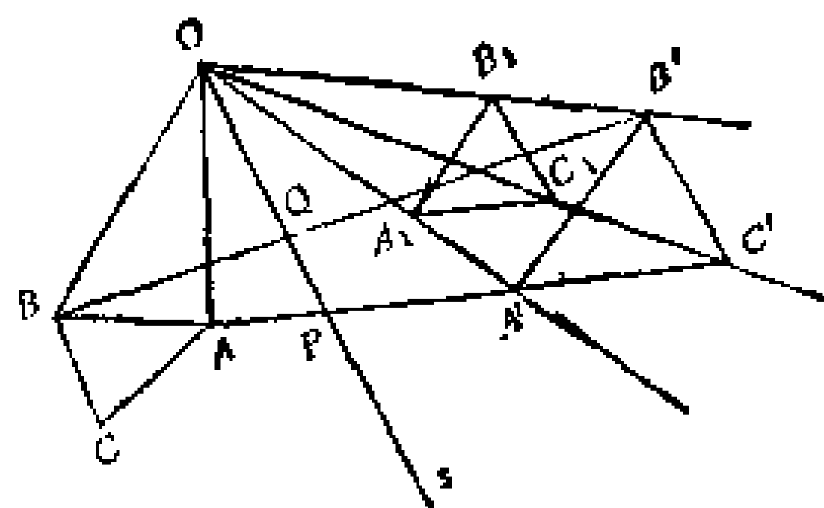


图 4.25

$$\frac{A'P}{AP}=\frac{OA'}{OA}=\frac{A'B'}{AB}=k$$

$$\frac{B'Q}{BQ}=\frac{OB'}{OB}=\frac{A'B'}{AB}=k$$

因此，作出反射轴 s 与三角形 ABC 关于轴 s 的对称三角形 $A_1B_1C_1$，根据已知条件，则三角形 $A_1B_1C_1$与 $A'B'C'$位似，于是直线A_1A'与轴 s 的交点就是中心 O。

我们作出点 O，作关于直线 s 的反射 σ，再作以 O 点为中心，以 R 为位似比的位似变换 τ，则它们的积就是已知相似变换θ_2，即

$$\theta_2=\tau\sigma$$

同时可以看出，异于运动的相似变换有不动点 O 和通过点 O 的互相垂直的两条不动直线。

3.4 相似变换群的几何——相似几何

我们看一看相似变换群的几何是什么样的几何。

根据相似变换的基本性质可以知道，平面上的任一图形在所有的相似变换下都变成它的相似图形，所有相似形间的基本特点（公共性质）是对应角相等对应边成比例。由于相似变换构成群，所以图形的相似关系具有反身性、对称性和传递性，因此可以根据相似关系将平面上（或空间里）所有图形分成等价类，每一类里的图形都是相似的，于是同一类里一切图形所共有的几何性质都是相似变换下的不变性质和不变量，反过来也成立。例如全体正方形属于一个等价类，它们的公共性质是对边平行且相等，对角线垂直平分，对角线相等，四个内角都是直角，四个边相等，等等。面每一个边的大小，面积的大小在相似变换下都改变了，不是公共的性质。总之，在相似变换下只保留形状而不保留图形的大小。

研究在相似变换下各等价类的公有性质，也就是研究在相似变换群下图形不变性质和不变量的命题系统的几何，称为相

似几何。

容易验证，所有相似系数$k=1$的相似变换构成群。在这个变换群下总保持两点间的距离不变，因此，这个群就是正交变换群，可见正交变换群是相似变换群的子群。相似几何也属于欧氏几何，一般将正交几何与相似几何统称欧氏几何。

3．5　相似变换的应用

相似变换常用在解决作图问题上。

如果某个问题，可以归结为一个作图F，我们常根据已知条件或其一部分，作出所求图形的相似图形 F'，然后再用 相似变换将它变为所要求作的图形。这种作图方法叫做相似作图法。

例1　已知三角形的三个高，求作这个三角形。

解　因为三角形ABC的边BC、CA、AB与相对应的高h_a、h_b、h_c有下面关系（图 4 ．26）

$$BC\cdot h_a=CA\cdot h_b=AB\cdot h_c=2S$$

这里S是三角形ABC的面积。所以

$$BC:CA:AB=\frac{2S}{h_a}:\frac{2S}{h_b}:\frac{2S}{h_c}$$

$$=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$$

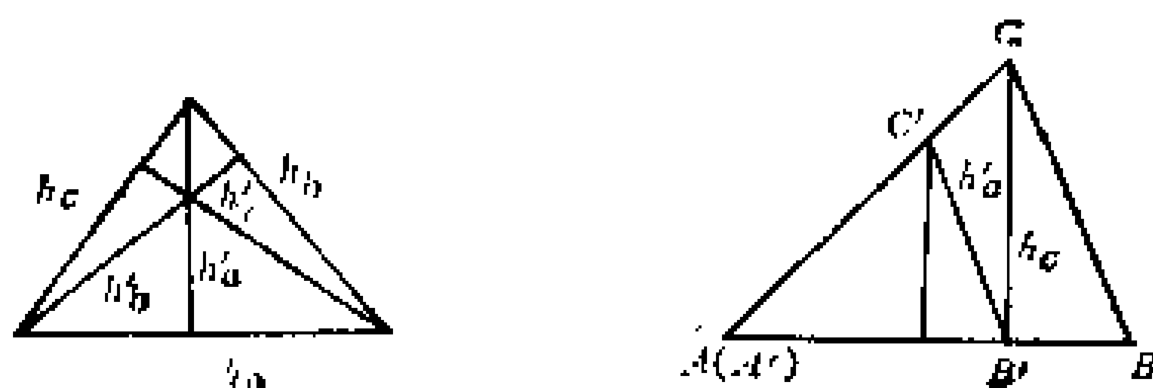


图 4 ．26

同样

$$h_a:h_b:h_c=\frac{1}{BC}:\frac{1}{CA}:\frac{1}{AB}$$

如果以三个高h_a、h_b、h_c为边作三角形，则这个三角形的边与它的高h'_a、h'_b、h'_c也有这样关系：

$$h'_a:h'_b:h'_c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$$

因此

$$BC:CA:AB=h'_a:h'_b:h'_c$$
$$=B'C':C'A':A'B'$$

这个等式表示所求的三角形ABC与以h'_a、h'_b、h'_c为边的三角形$A'B'C'$相似，由此得到作图方法：

以h_a、h_b、h_c为边作三角形，求出它的高线h'_a、h'_b、h'_c。再以它们为边作三角形$A'B'C'$，然后再将它相似变换为三角形ABC，使一个高为h_c（图4.26），则这个三角形就是所求的。

本题只有一个解。

以下我们研究相似轴的概念，并用来证明几个重要定理。为明确相似轴的概念，我们研究三个图形的位似中心间的关系。

定理4.7 如果三个图形两两位似，则它们的相似中心在同一直线上。

证明 设O_{12}是图形φ_1和φ_2的相似中心，O_{23}是图形φ_2和φ_3的相似中心，O_{13}是图形φ_3和φ_1的相似中心（图4.27）。

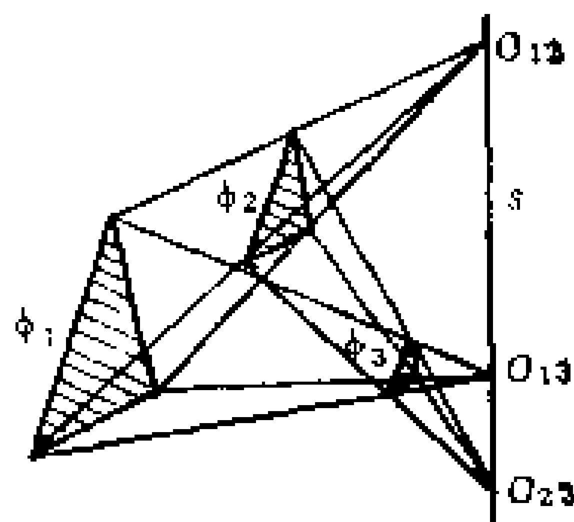


图4.27

我们用s表示直线$O_{23}O_{13}$，证明直线s通过点O_{12}。为此，首先把s看做是图形φ_1的直线，因为它通过中心O_{13}，所以在把图形φ_1变为图形φ_3的位似变换下，直线s变为本身。其次把它看作是图形φ_3的直线，因为通过中心O_{23}，所以在把图形φ_3变成图形φ_2的位似变

换下，直线 s 仍变为本身。

由此可知，直线 s 是图形φ_1的直线，同时也是图形φ_2的直线。因此，在把图形φ_1变为图形φ_2的位似变换下，直线 s 必通过中心φ_{12}。

通过两两位似的三个相似中心的直线，叫做这三个图形的**相似轴**。

例如，三个圆互不相等，并且中心不共线，则每取两圆所得到的六个相似中心，每三个一组共在四个相似轴上。

图 4.28表示三个圆O_1、O_2、O_3的六个相似中心O_{12}、O'_{12}、O_{23}、O'_{23}、O_{13}、O'_{13}和四个相似轴s_1、s_2、s_3、s_4。

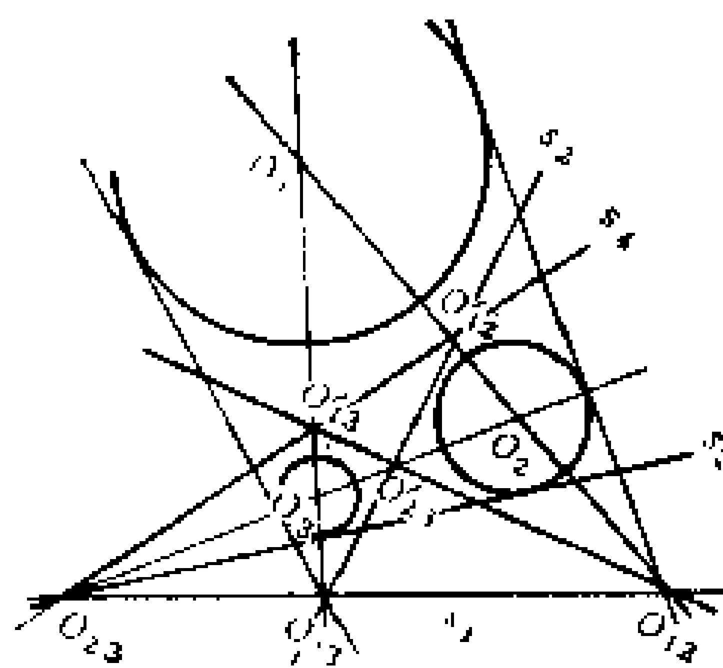


图 4.28

现在应用相似轴的概念证明下面定理：

定理4.8 如果三角形ABC的边BC、CA、AB或其延长线上三点 L、M、N，满足下面条件：

$$\frac{LB}{LC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{NA}{NB}=1$$

则三点L、M、N在同一条直线上。

证明 设 A、B、C是三个位似图形F、F_1、F' 上的对应点（图 4.29），L和M分别是图形 F_1、F'和F'、F 的位似中心。

在图形 F、F_1、F' 上分别取对应点 A'、B'、C'，连结线段AA'、BB'、CC'，则

$$AA' \parallel BB' \parallel CC'$$

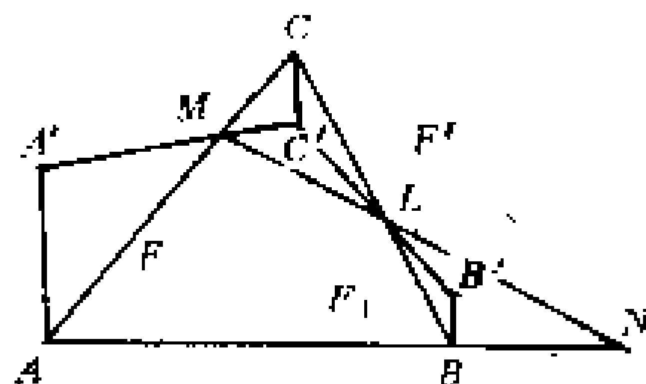


图 4.29

因而

$$\frac{LB}{LC}=-\frac{BB'}{CC'},\qquad \frac{MC}{MA}=-\frac{CC'}{AA'}$$

从这两个等式和已知条件可以得到：

$$\frac{NA}{NB}=\frac{AA'}{BB'}$$

因为点N在边AB上，所以，由这个等式可知N是图形F和 F_1的位似中心，根据定理4．7，三个位似中心 L、M、N应该在同一直线上。

这个命题叫做美耐劳斯（Menelaus）定理。容易证明，这个定理的逆命题也成立，我们把证明留给读者。

现在利用定理4．8证明下面定理：

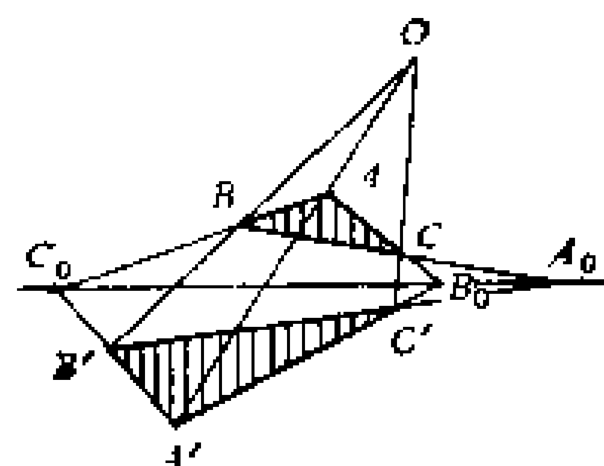


图4．30

定理4．9 如果三角形ABC和$A'B'C'$的对应顶点连线AA'、BB'、CC'交于一点O，（或互相平行）则对应边BC、$B'C'$，CA、$C'A'$，AB、$A'B'$的交点A_0、B_0、C_0在一条直线上（图4．30）．

证明 根据美耐劳斯定理的逆定理，就三角形OBC与各边截线$A_0C'B'$，则：

$$\frac{A_0B}{A_0C}\cdot\frac{C'C}{C'O}\cdot\frac{B'O}{B'B}=1$$

就三角形OCA与各边截线$B_0C'A'$，则：

$$\frac{B_0C}{B_0A}\cdot\frac{A'A}{A'O}\cdot\frac{C'O}{C'C}=1$$

就三角形OAB与各边截线，$A'B'C_0$则：

$$\frac{C_0A}{C_0B}\cdot\frac{B'B}{B'O}\cdot\frac{A'O}{A'A}=1$$

由上面三个等式，得到

$$\frac{A_0B}{A_0C}\cdot\frac{B_0C}{B_0A}\cdot\frac{C_0A}{C_0B}=1$$

再根据美耐劳斯定理，由三角形ABC可以看出，点A_0、B_0、C_0在一直线上.

这个定理的逆命题可用同样方法，按正定理相反顺序证明，我们把证明留给读者。

上面的定理，叫做笛沙格定理，它在几何学里占有重要地位，满足笛沙格定理的两个三角形叫做透视三角形（图4．30），关于透视三角形在第五章里还会遇到。

§4　仿射变换群与仿射几何

正交变换和相似变换有两个共同特点，它们都把共线点变成共线点和保持线段的简单比不变。我们把这两个性质抽象出来，便得到仿射变换的概念。

4．1　仿射变换的定义和简单性质

定义　如果平面上的一个变换，把共线的任意三点变成共线的三点，并且保持线段的简单比不变，那么这个变换就叫做**平面上的仿射变换**。

因此，正交变换和相似变换都是仿射变换的特殊情形，显然，向着直线的压缩也是仿射变换。

下面，根据定义讨论仿射变换的一些简单性质：

（1）仿射变换把不共线的三点变成不共线的三点。

实际上，假设不共线的三点P、Q、R的象P'、Q'、R'是共线的，则整个平面将被映到P'、Q'、R'所在的那条直线l'上，这就和仿射变换的定义相矛盾了．因此P'、Q'、R'是不共线的，现在我们来证明上述的断言：

设M是平面上不与P重合的任意一点，过M点作一直线l，它与直线PQ和PR分别交于A、B(图4．31)。设A'、B'

是A、B 的象点，由于点 P、A、Q、共线，所以P'、A'、Q'共线，即A'在l'上；同理，B'也在l'上。因此M的象点M'也在l'上，从而整个平面被映到l'上。

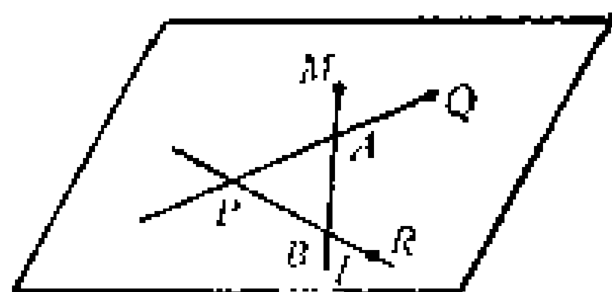


图 4．31

（2）仿射变换把直线变成直线。

这是定义的直接推论。

（3）仿射变换把平行直线变成平行直线。

平行直线的特征是无公共点，根据变换是一一的，所以一对平行直线经过仿射变换后两直线仍无公共点，因面是平行的。

（4）仿射变换把线段变成线段，并且保持关系 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$不变。

设经过一仿射变换，点A、B分别变成 A'、B'。如果C是线段AB的内点，则简单比 $(ABC)<O$。由定义，$(A'B'C')=(ABC)<0$，因此C'是 $A'B'$的内点；反之，利用（1）易知线段 $A'B'$的任一内点是AB的某一内点的象，于是线段变成线段。

为证明仿射变换保持关系 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$不变，在 AB 的连线上取一点E（图 4．32），使

$$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AE}$$

显然 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CD}$，因此 $AECD$是平行四边形，经过变换后，A、B、C、D、E分别变成A'、B'、C'、D'、E'。由（3），A'、E'、C'、D'仍为平行四边形，所以有$\overrightarrow{A'E'}=\overrightarrow{C'D'}$，由定义有

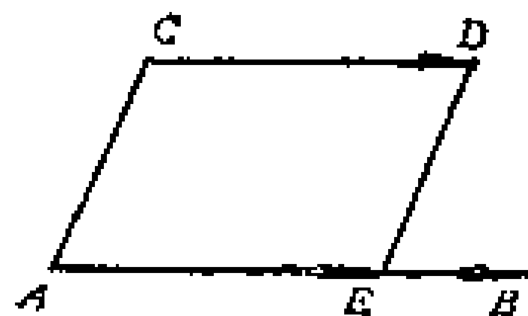


图 4．32

$$\overrightarrow{A'B'}=\lambda\overrightarrow{A'E'}$$

因此得到所要证明的结果

$$\overrightarrow{A'B'}=\lambda\overrightarrow{C'D'}$$

可见，仿射变换引起平面的向量间的一个变换，并且有

（5）仿射变换保持向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，的关系：

$$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$$

不变。

（6）两个仿射变换的乘积仍是一个仿射变换。

（7）仿射变换的逆变换仍是仿射变换。

由（1）和仿射变换的定义即可得到。

因此，平面上的全体仿射变换构成一个群，即平面上的仿射变换群。

4.2 仿射坐标系

在研究正交变换时，利用直角坐标系是方便的，这是因为经过正交变换后直角坐标系仍旧变成直角坐标系。可是，我们将会看到，一般地仿射变换并不保持距离和角度不变。因此，一个直角坐标系经过仿射变换后，就未必是直角坐标系了。这样，再用直角坐标系来研究仿射变换，就没有什么特别方便了。但是我们可以把直角坐标系稍加推广，引进仿射坐标系，这种坐标系在仿射变换下仍变成仿射坐标系。

一个直角坐标系，实际上是由坐标原点O和OX轴的单位向量$\vec{i}_1$及OY轴上的单位向量$\vec{i}_2$所确定，当然这时$\vec{i}_1\cdot\vec{i}_2=0$。我们在平面上建立直角坐标系，无非是把平面上的点和数对一一对应起来。但是直角坐标系并不是达到目的的唯一途径。比方说，两个坐标轴可以是不垂直的，它上面的用以确定轴的方向的向量也可以不是单位长的。

定义 平面上一个仿射坐标系是指平面上任意一点O和任意两个不共线的向量$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$记为，$[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2]$。对于平面上任意一点M，设$\overrightarrow{OM}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$，其中$(x,y)$是唯一的，叫做$M$点在仿射坐标系$[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2]$中的坐标。同样可以定义

向量的坐标（图 4．33）．

过O点的以$\vec{e_1}$为方向的直线称为X轴，以$\vec{e_2}$为方向的直线称为Y轴。

可见，直角坐标系是仿射坐标系的特殊情形。

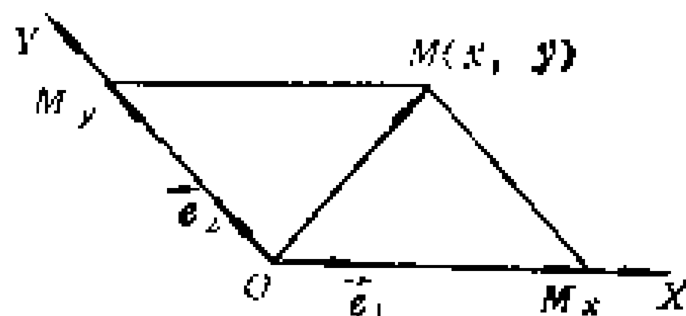


图 4．33

有了仿射坐标系，就可以把平面上的点和数对建立起一一对应的关系。并可借助仿射坐标系来研究各种几何问题。下面列举几个这样的问题。

（1）向量的运算和在直角坐标系中一样，对于任意向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，可写成

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$
$$\vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$$

那么

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}$$

又 $$\lambda\vec{a}=\lambda a_1\vec{e_1}+\lambda a_2\vec{e_2}$$

这就是说，两个向量和的坐标等于它们坐标的和，用数λ乘向量得到的乘积的坐标等于用λ乘向量的坐标。

由此可知，向量$\vec{a}=(a_1, a_2)$，$\vec{b}=(b_1, b_2)$共线的条件是

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \qquad (1)$$

（2）直线的方程。设一直线l过点$M_0(x_0, y_0)$，方向为$\vec{m}=(m_1, m_2)$。易知任意一点$M(x, y)$在l上的充分必要条件是$\overrightarrow{M_0M}$与$\vec{m}$共线，由（1）知

$$\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{m_2}$$

或者写成

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

其中 $k=m_2/m_1$。在仿射坐标系中，直线的方程是一次的，反过来，一次方程

$$Ax+By+C=0$$

其中A、B不全为零，总表示一条直线。

（3）定比分点。在仿射坐标系中，定比分点的公式和直角坐标系中的公式完全一样。

设〔O，$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$〕是一仿射坐标系，$M_1(x_1, y_1)$和$M_2(x_2, y_2)$是平面上的两点。$M(x, y)$是直线M_1M_2上的一点，使得

$$M_1M/MM_2=\lambda$$

因为

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\vec{e_1}+y_1\vec{e_2}$$
$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\vec{e_1}+y_2\vec{e_2}$$
$$OM=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$$

由

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$$

得

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\lambda(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM})$$

用坐标表示即得

$$\begin{cases}x-x_1=\lambda(x_2-x)\\ y-y_1=\lambda(y_2-y)\end{cases}$$

设$\lambda\neq-1$，则有

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

（4）坐标变换公式。和直角坐标系一样，点的坐标及曲线的方程和坐标系有关。

设〔O；$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$〕和〔O'；$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$〕是两个仿射坐标系（图4.33），〔O'；$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$〕的位置是

$$\overrightarrow{OO'}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$
$$\vec{e'_1}=a_{11}\vec{e_1}+a_{21}\vec{e_2} \qquad (2)$$
$$\vec{e'_2}=a_{12}\vec{e_1}+a_{22}\vec{e_2}$$

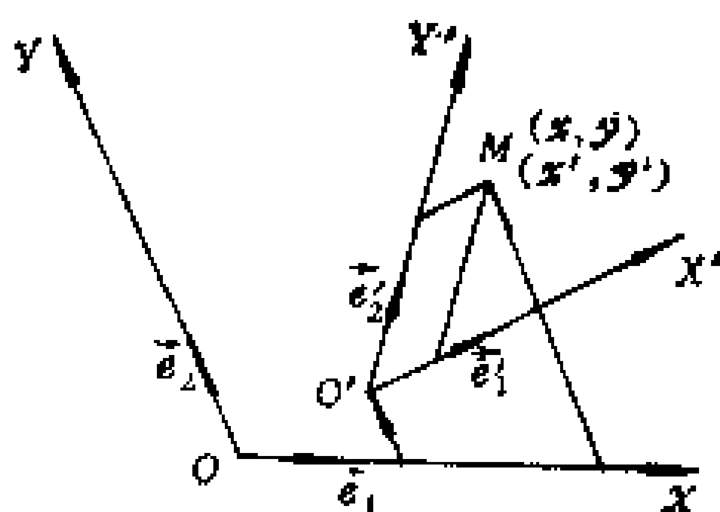


图 4・34

设(x, y)与(x', y')是同一点M分别对于这两个坐标系的坐标，即：

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2} \\ \overrightarrow{O'M}=x'\vec{e'_1}+y'\vec{e'_2}\end{cases} \qquad (3)$$

由（2）和（3）有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}\\&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(x'\vec{e'_1}+y'\vec{e'_2})\\&=(a_{11}x'+a_{12}y'+a_1)\vec{e_1}+(a_{21}x'+a_{22}y'+a_2)\vec{e_2}\end{aligned}$$

比较系数，得：

$$\begin{cases}x=a_{11}x'+a_{12}y'+a_1\\y=a_{21}x'+a_{22}y'+a_2\end{cases} \qquad (4)$$

这就是仿射坐标的坐标变换公式，其中

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$$

因为(a_{11}, a_{21})与(a_{12}, a_{22})分别是新坐标向量$\vec{e'_1}$，$\vec{e'_2}$在坐标系$[O; \vec{e_1}, \vec{e_2}]$中的坐标，由于$\vec{e'_1}\vec{e'_2}$不共线，因此

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}\neq\frac{a_{21}}{a_{22}} \quad 或 \quad a_{11}a_{22}\neq a_{12}a_{21}$$

因此，由（4）可得

$$x'=\frac{1}{\Delta}[a_{22}(x-a_1)-a_{12}(y-a_2)] \qquad (5)$$

$$y'=\frac{1}{\Delta}[-a_{21}(x-a_1)+a_{11}(y-a_2)]$$

这就是用旧坐标表示新坐标的式子。

注意，坐标变换公式，不论是用新坐标表示旧坐标的式子

（4），还是用旧坐标表示新坐标的式子（5），都是一次的。

类似地，可以建立空间的仿射坐标系。

4．3 仿射变换的坐标表示

定理4.10 在仿射变换下，仿射坐标系变成仿射坐标系，而且每一点M变成这样的点 M'，它对于新坐标系的坐标与点M对于原坐标系的坐标相同。反过来，具有这些性质的每一变换都仿射的。

证明 因为仿射变换把不共线的三点变成不共线的三点。所以，仿射变换把仿射坐标系变成仿射坐标系。

如果仿射坐标系$[O; \vec{e_1}, \vec{e_2}]$ 经过一仿射变换变成仿射坐标系$[O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'}]$（图4．35），那么由

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$$

根据上段的性质（5），得

$$\overrightarrow{O'M'}=x\vec{e_1'}+y\vec{e_2'}$$

这就是说，经过一仿射变换，如果仿射坐标系$[O; \vec{e_1}, \vec{e_2}]$ 的像为仿射坐标系$[O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'}]$，那么点$M$的象$M'$对于$[O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'}]$的坐标和点$M$对于$[O; \vec{e_1}, \vec{e_2}]$的坐标是相同的。

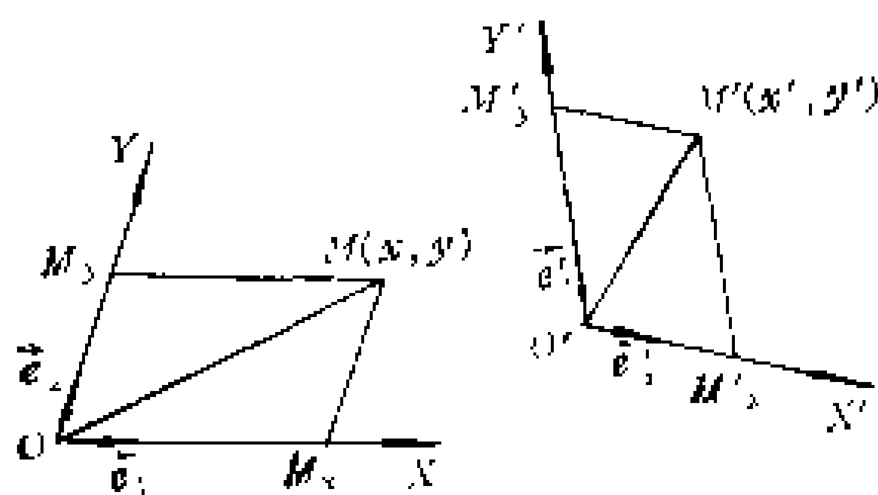


图4・35

反过来，对于任意两个仿射坐标系$[O; \vec{e_1}, \vec{e_2}]$和$[O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'}]$，设平面上任意一点$M$，它关于坐标系$[O; \vec{e_1}, \vec{e_2}]$的坐标为$(x, y)$，我们定义它的像点$M'$关于$[O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'}]$的坐

标为(x, y)，现在证明这个映射是仿射的。

根据仿射变换的定义，只需证明这个映射把共线点变成共线点且保持简单比不变。但是我们已经知道，三点共线的条件及线段的分比都可用点的坐标表示出来，并且表达式与坐标系的选择无关。即然我们所定义的映射，任意点和它的像点在两个坐标系中坐标完全相同，因此它满足仿射变换的条件。显然，这个映射是平面上的一一映射，所以这个映射就是仿射变换。这就全部完成了定理的证明。

推论 平面上的一个仿射变换，由不共线的三对对应点所唯一决定。

现在我们可以导出仿射变换的坐标表示了。

设σ是一个仿射变换，它把仿射坐标系〔O；$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$〕变成仿射坐标系〔O'；$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$〕，它们的关系为：

$$\overrightarrow{OO'} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$$

$$\vec{e_1'} = a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2}$$

$$\vec{e_2'} = a_{12}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2}$$

设平面上任一点M关于〔O；$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$〕的坐标为(x, y)，它的象点M'关于〔O；$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$〕的坐标为(x', y')。我们来研究(x, y)和(x', y')之间的关系。

因为M'关于〔O'；$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$〕的坐标与M关于〔O；$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$〕的坐标相同，于是M'关于新坐标系〔O'；$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$〕的坐标为(x,y)，面关于原坐标系〔O；$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$〕的坐标为(x', y')。所以，问题变成了寻求点M'关于两个仿射坐标系的坐标之间的关系。因此，利用坐标变换公式，则得到：

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases} \qquad (4.4)$$

这就是仿射变换σ的坐标表示。

因为$\vec{e_1'}$，$\vec{e_2'}$不共线，所以在（4.4）中有

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

和正交变换一样，仿射变换根据Δ的符号分成两类，$\Delta>0$的叫做第一类仿射变换，而$\Delta<0$的叫做第二类仿射变换。

反过来，在任意仿射坐标系中，由（4．4）（$\Delta\neq 0$）所给出的点$M(x, y)$到点$M'(x', y')$的变换是仿射的。因为，由（4．4）可建立一个新的仿射坐标系$[O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2]$，使

$$\overrightarrow{OO'}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$$

$$\vec{e}'_1=a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2$$

$$\vec{e}'_2=a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2$$

在这两个坐标系中，把坐标相同的点对应起来，所得到的映射显然是个仿射变换，这个变换根据前面的结论，就是用公式（4．4）表示的。

要注意的是，虽然公式（4．4）和坐标变换公式形式上是一样的，但意义是完全不同的。（4．4）表示坐标系不动而点变动，坐标变换公式则表示点不动而坐标系变动。

4．4 透视仿射变换

这是一种非常重要的仿射变换。

下面，我们试图通过对仿射变换不动点的讨论来得到这个特殊的仿射变换。

设给定的仿射变换是：

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_1 \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_2 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (1)$$

因此，不动点应满足的条件是

$$\begin{cases} x=a_{11}x+a_{12}y+a_1 \\ y=a_{21}x+a_{22}y+a_2 \end{cases} \qquad (2)$$

解方程组（2），便得到不动点的坐标。

方程组（2）可能有一个解，可能没有解，也可能有无限

多个解．我们感兴趣的是最后一种情形，在这种情形中，方程的系数成比例，即

$$\frac{a_{11}-1}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}-1}=\frac{a_1}{a_2}$$

这时方程组（2）表示一条直线，它的所有点都是不动点．

现在我们证明，在这种情况下，仿射变换的对应点的连线是平行的（图 4.36）．实际上，如果 l 是不动直线，并且 A、B 的对应点是A'、B'，那么直线 AB 与不动直线 l 的交点X是不动点．因此，对应直线$A'B'$与直线 AB交于X点，根据仿射变换的定义，有：

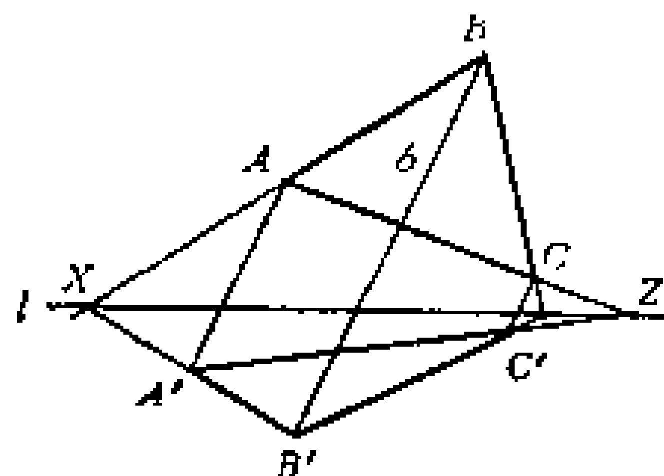


图 4·36

$$(ABX)=(A'B'X)$$

由此我们得到，$\angle AXA'$的边上的线段成比例，因此得到AA'平行于BB'．

定义 平面上每对对应点连线平行的仿射变换叫做透视仿射变换．不动直线 l 叫做透视仿射轴，对应点连线的方向叫做透视方向．

对应点在轴同侧的透视变换，叫做第一种透视仿射变换，对应点在轴异侧的透视仿射变换，叫做第二种透视仿射变换．

定理 4．11 透视仿射变换由轴与一对对应点完全确定．

证明 设已知轴 l 和一对对应点A，A'（图 4．36）．我们可以证明平面上任意点 B 有一个而且只有一个对应点B'．

事实上，点 B 的对应点在直线 AB 的对应直线上，同时也在过点 B 且平行于直线AA'（透视方向）的直线 b 上．作直线 AB，它与 l 交于点X（或平行于 l），直线XA'（或过 A'作 l 的平行线），就是直线AB的对应直线，则直线 XA' 与直线

b的交点B'就是点B的对应点，显然点B'有一个且只有一个。

4．5 仿射变换群的子群

平面上的仿射变换群有几个重要的子群，这些子群里的变换自然都是仿射变换的特殊形式。它们是：

1° 正交变换群。

2° 相似变换群。

1°和2°都是仿射变换群的子群，因为它们都保持共线性和三点的简单比不变。

3° 中心仿射变换群。

定义 保持原点不变的仿射变换叫做**中心仿射变换**，它的坐标表示是

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4.5)$$

前面讲过的向X轴或向Y轴的压缩是中心仿射变换的特例。

定义 向X轴和向Y轴的压缩的积所得到的变换

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases} \qquad (4.6)$$

叫做**伸缩变换**。

显然伸缩变换也是中心仿射变换的特例。

下面给出中心仿射变换的另一个特殊形式，错切变换的定义。

定义 坐标表示式是

$$\begin{cases} x' = x + \lambda y \\ y' = y \end{cases} \qquad (\lambda > 0)$$

和

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \lambda x \end{cases} \qquad (\lambda > 0) \qquad (4.7)$$

的仿射变换，前者叫做平面上沿X轴的错切变换，后者叫做平面上沿Y轴的错切变换。

图4．37表示矩形经过向X轴的错切变换后所得的图形。

容易验证所有中心仿射变换构成群。

4° 等积仿射变换群。

设一个仿射变换：

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases}$$

满足条件

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$$

留给读者验证，所有这种形式的仿射变换也构成仿射变换群的一个子群，叫做等积仿射变换群，因为容易证明在这种变换之下，面积保持不变。例如，第一种透视仿射变换中的特殊情形滑动就是一种等积仿射变换。

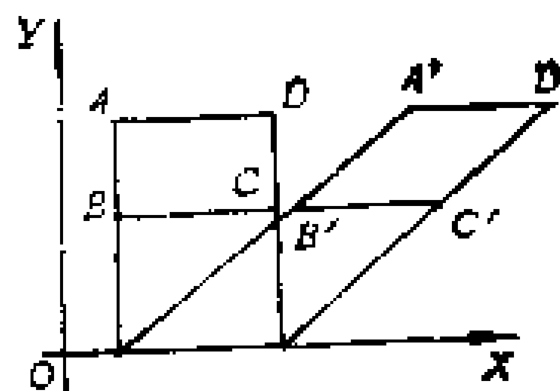


图4·37

定义 对应点A、A'连线平行于透视轴l的第一种透视仿射变换，叫做沿轴l的滑动（图4．38）。

4．6 仿射变换的分解

为了更清楚地认识仿射变换，我们来研究仿射变换与正交变换、相似变换以及透视仿射变换的关系。

仿射变换可以分解成一个正交变换和一个伸缩变换的积。

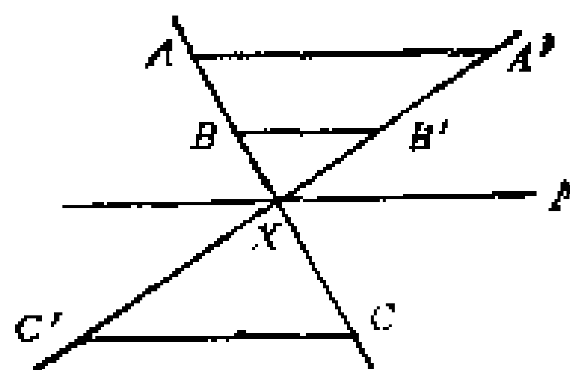


图4·38

我们选定一个直角坐标系，关于这个直角坐标系，设一个仿射变换为

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases}$$

当然，在仿射变换下，一般地长度和角度是要改变的．现在考虑这样一个问题，是否存在这样两个垂直的方向，使得经过变换后仍然保持垂直？为简单起见，先讨论变换

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

如果这样的方向存在，那么应该有数值 λ，使得变换后的直线是$y' = \lambda x'$和$\lambda y' = -x'$，而它们的原象则应该是互相垂直的直线

$$a_{21}x + a_{22}y = \lambda(a_{11}x + a_{12}y)$$

$$\lambda(a_{21}x + a_{22}y) = -(a_{11}x + a_{12}y)$$

或者

$$\begin{aligned} &(a_{21} - \lambda a_{11})x + (a_{22} - \lambda a_{12})y = 0 \\ &(\lambda a_{21} + a_{11})x + (\lambda a_{22} + a_{12})y = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

根据垂直条件，得：

$$(a_{21} - \lambda a_{11})(\lambda a_{21} + a_{11}) + (a_{22} - \lambda a_{12})(\lambda a_{22} + a_{12}) = 0$$

或者

$$\begin{aligned} &\lambda^2(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}) - \lambda(a_{21}^2 + a_{22}^2 - a_{11}^2 - a_{12}^2) - \\ &(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

这是关于 λ 的一个二次方程，当方程的系数不全为零时，它有两个实根而且两个根的积是 -1．因此，一般地说，不是相似变换的仿射变换存在一对且仅有一对垂直直线，它们是由一对垂直直线经仿射变换而得到的．

任给两条带有指向（方向）的相交直线，就规定了平面上的一个方向．如东南西北的方向就由两条垂直的有向直线确定的．一般地两垂直直线在仿射变换下不再是垂直直线，但方才的证明说明，对于任意的仿射变换来说，一定存在一对垂直直线，它们在这个仿射变换下仍然变为垂直直线．

定义 在仿射变换下，垂直直线仍变成垂直直线的这个垂直方向，叫做仿射变换的主方向。

我们已知在仿射变换下，平行线变为平行线，这些平行线的方向相同。平行于主方向的正方形网将变成矩形网（图 4 . 39）。在主方向上建立的直角坐标系，仍变为直角坐标系。选择主方向上的坐标系，将会给讨论问题带来一些方便。

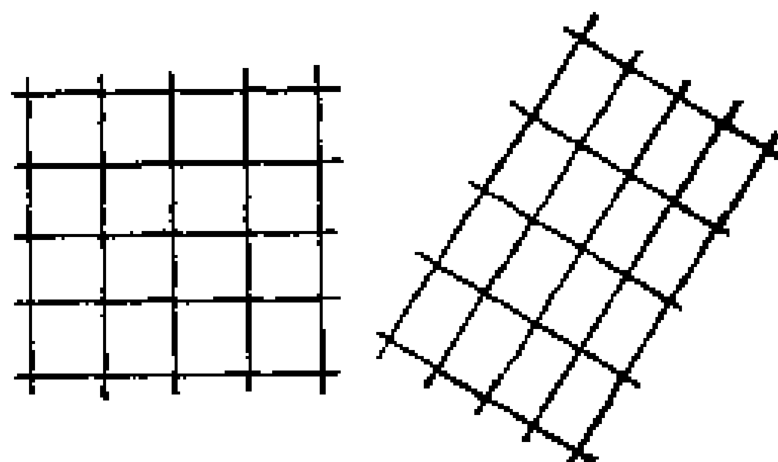


图 4 · 39

我们把对应于主方向的一对垂直直线取作 X 轴和 Y 轴，那么方程（2）的根应该是 0 和∞，而且

$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0,\quad a_{21}^2+a_{22}^2\neq a_{11}^2+a_{12}^2 \tag{3}$$

如果我们记 $-a_{11}/a_{12}=+a_{22}/a_{21}=\operatorname{ctg}\alpha$，此时仿射变换的公式便可写成

$$\begin{cases}x'=a(x\cos\alpha-y\sin\alpha)\\ y'=b(x\sin\alpha+y\cos\alpha)\end{cases} \tag{4}$$

其中$a^2\neq b^2$，$ab\neq 0$。不过，当

$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0,\quad a_{12}^2+a_{22}^2=a_{11}^2+a_{12}^2 \tag{5}$$

时，所有的垂直方向经变换后仍垂直。容易验证，在这种情形或者$a=b$或者$a=-b$。当$a=b$时，这个仿射变换是一个旋转和一个位似变换的乘积。当$a=-b$时，它是一个反射和一个位似的乘积。除这个情况之外，在一般情形，（4）中仿射变换表示一个旋转，一个向着 X 轴的压缩和一个向着 Y 轴压缩的乘积。如果$\alpha=0$，那么仿射变换是

$$\begin{cases}x'=ax\\ y'=by\end{cases}\qquad (a^2\neq b^2,\ ab\neq 0) \tag{6}$$

这就是前面讲过的伸缩变换。

综合上面的讨论，我们得到：

定理4．12 任意一个仿射变换可以分解成一个正交变换和一个伸缩变换的乘积．当仿射变换保持原点不动时即 ($a_1=a_2=0$)，或者有一对垂直直线或者所有垂直直线保持垂直性不变，在后一情形，压缩是一个相似变换．

图4．40说明（4）中具有 $a>0$、$b>0$ 的情形，一个特定的正方形如何经过正交变换和压缩变成一个矩形．自然，对于一般位置的正方形，不见得能变成矩形，而只能变成平行四边形．

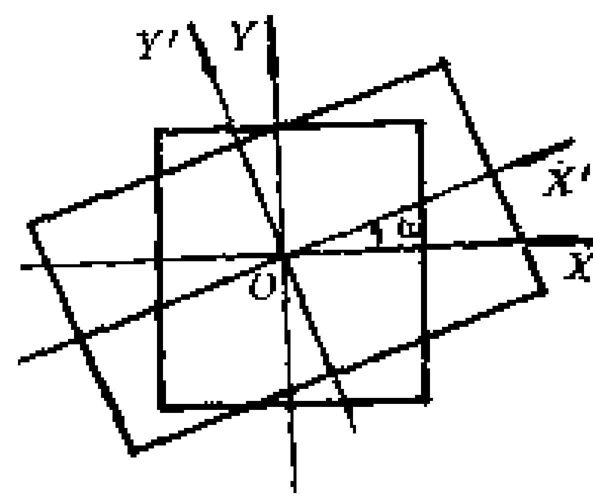


图4・40

作为上面定理的一个推论，不难证明下面的定理：

定理4．13 在仿射变换下，任何一对对应多边形面积之比等于常数，换句话说，任意两个多边形面积之比是仿射不变量．

实际上，仿射变换总可以分解成一个正交变换与伸缩变换的积，而伸缩变换又是压缩变换的积，因此仿射变换可以分解成正交变换与压缩变换的积．正交变换是不改变面积大小的，而压缩显然使面积以压缩系数为比值而改变，实际上这个系数恰好是变换的行列式．

仿射变换与透视仿射变换、相似变换有以下关系：

定理4．14 仿射变换可以表示为两个透视仿射变换的积．

证明 设已知仿射变换 σ 是由任意两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 确定的（图4．41）．

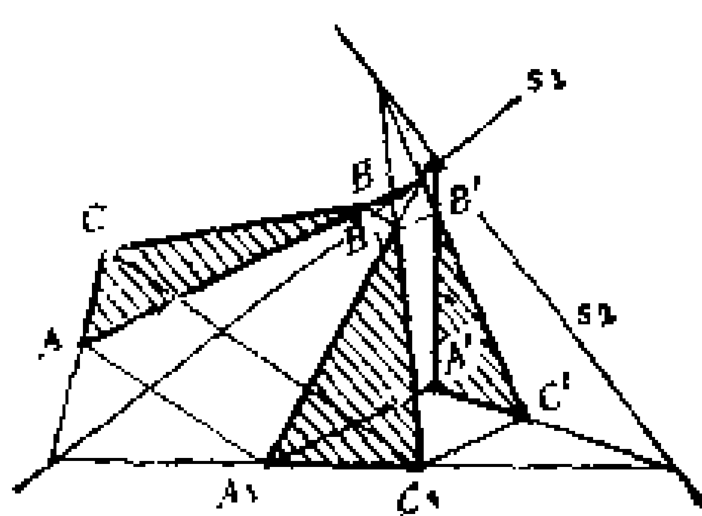


图4・41

通过点 A、B、C 和 A'、B'、C' 任意作两组各三条平

行线，使它们分别相交于不共线三点A_1、B_1、C_1，根据笛沙格（Desargues，1593—1662））定理，三角形ABC和$A_1B_1C_1$透视，三角形$A_1B_1C_1$和$A'B'C'$也透视。它们分别以s_1为轴，A，A_1为一对对应点，和以s_2为轴，A_1、A_1'，为一对对应点。这两个透视仿射变换的积$\tau_2\cdot\tau_1$，把三角形ABC变为$A'B'C'$，因此，$\tau_2\cdot\tau_1$是仿射变换：

$$\sigma=\tau_2\cdot\tau_1$$

从这个定理也可以看出，把三角形变为任意三角形的仿射变换确实存在。

定理4．15 仿射变换是透视仿射变换与相似变换的积。

证明 设已知仿射变换σ是由两个三角形ABC和$A'B'C'$确定（图4．42）。

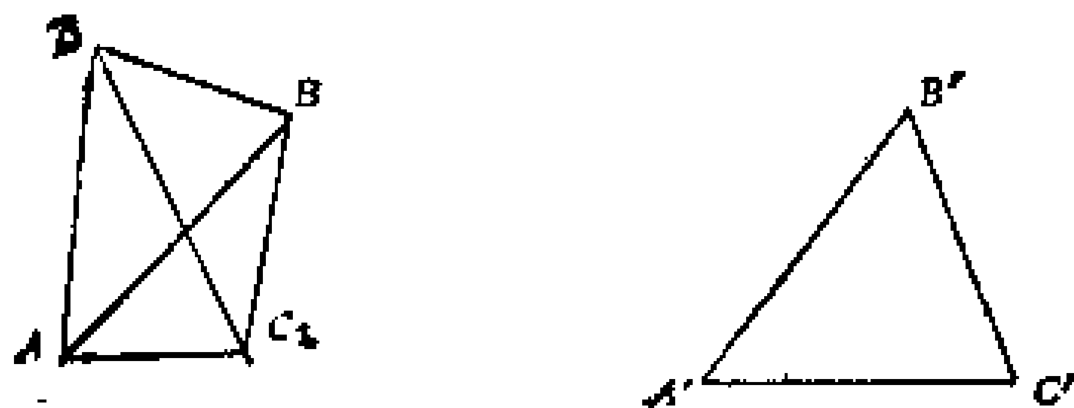


图4·42

以AB为一边作三角形ABC_1与ABC相似，我们以直线AB为轴，C、C_1为一对对应点作透视仿射变换τ，再以三角形ABC_1和$A'B'C'$为对应三角形作相似变换θ。它们的积$\theta\tau$把三角形ABC变为$A'B'C'$。因此，$\theta\tau$是仿射变换，即

$$\sigma=\theta\tau$$

4．7 仿射变换群的几何——仿射几何

在仿射变换下，如果图形F变成图形F'，则说图形F仿射等价于图形F'。由于仿射变换构成群，图形的仿射等价是一个等价关系，利用这个关系可以把图形分成各种等价类，同一类里的一切图形所共有的性质都是仿射变换下的不变

性质和不变量，反过来也成立。例如结合关系、顺序关系、平行关系等都是仿射性质，三点的简单比是基本的不变量，而长度和角度都不是仿射不变量。

因为仿射变换是由三个点的简单比的不变性定义的，所以图形的仿射性质与仿射变换的基本不变量——简单比有关，下面研究几种主要的仿射图形。

（1）三角形　由于在仿射变换下，任意一个三角形都可以变为另一个三角形，因此，任意两个三角形都是仿射等价的。

设三角形ABC与$A'B'C'$仿射等价（图 4 . 43），则三角形ABC各边中点对应三角形$A'B'C'$的对应边中点。例如边AB的中点C_1对应边$A'B'$的中点C_1'，因为

$$(ABC_1)=(A'B'C_1')$$

由此可知，三角形的中线对应中线，重心G对应重心G'。这些都是三角形的仿射性质。

利用仿射性质证明一些问题是很方便的。例如由于正三角形和任意三角形仿射等价，所以要研究任意三角形的仿射性质，只要研究一个正三角形就可以。因为三角形面积比也是仿射变换的不变量，由于正三角形ABC中，六个三角形的面积相等（图 4 . 43），故可以直接得出三角形$A'B'C'$中的六个三角形面积也都相等。

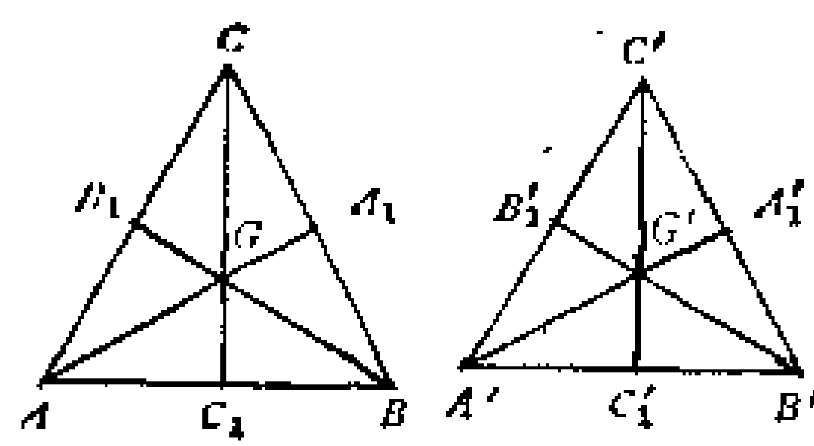


图 4 • 43

（2）四边形　任意两个四边形不一定仿射等价。但是，如果四边形$ABCD$和$A'B'C'D'$有下面关系：

$$(ACP)=(A'C'P')$$

$$(BDP)=(B'D'P')$$

则它们仿射等价（图 4．44）。

梯形的仿射等价图形是梯形，对角线必须满足上面条件。梯形的仿射等价图形所以是梯形，是因为在仿射变换下平行性不变（图 4．45）。此外，梯形中位线也具有仿射性质。

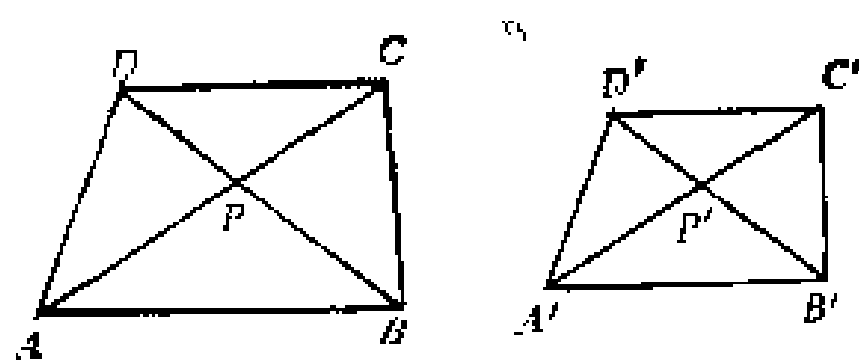


图 4・44

任意两个平行四边形是仿射等价的，因为它们的对角线互相平分，并且对边平行。这样，正方形可以和任意平行四边形仿射等价。



图 4・45

因此，我们要研究平行四边形的仿射性质，只研究正方形就可以了。例如，从正方形中四个三角形面积相等可以直接推出，平行四边形中四个三角形面积也相等（图 4．46）。

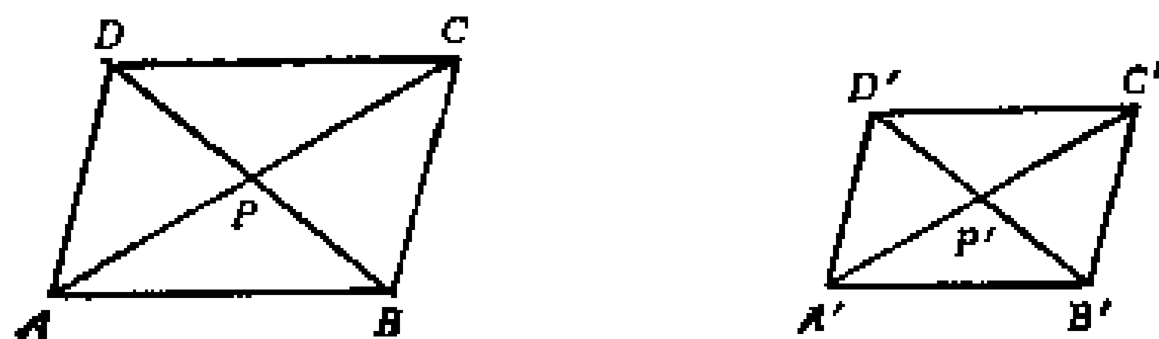


图 4・46

（3）椭圆　在仿射变换下，圆的对应图形叫做椭圆。也就是说，圆的仿射等价图形是椭圆，因此，圆的仿射性质也是椭圆的仿射性质。

首先可以看出圆的中心，在仿射变换下，变为椭圆的中

心．事实上，圆的中心平分通过它的所有弦，也就是平分所有直径的点．因为线段的平分性是仿射性质，所以，它的对应点平分椭圆的所有通过它的弦，因而也是椭圆的中心，这样的弦叫做椭圆的直径．

其次，圆的任意一对互相垂直的直径，其中一个平分另一个平行弦（图 4．47）．具有这样性质的两条直径，叫做圆的**互为共轭的直径**．由于线段的平行性和平分性都是仿射性质，所以圆的共轭直径，在仿射变换下所变成的椭圆的两条直径也有这样的性质．因此，椭圆的这样两条直径也叫做它的**互为共轭的直径**，简称**共轭直径**．

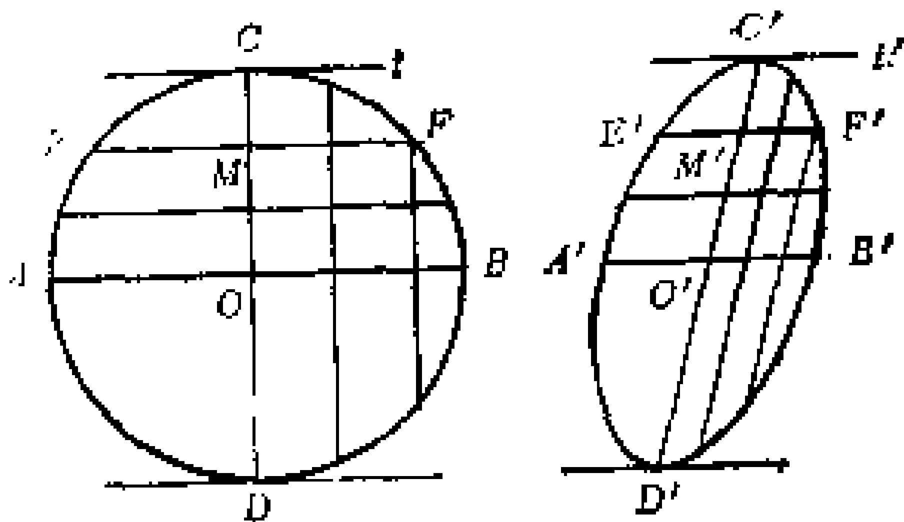


图 4・47

根据共轭直径这种性质，我们容易作已知椭圆的一个直径的共轭直径．例如，作椭圆的直径 $A'B'$ 的共轭直径时，可引直径 $A'B'$ 的任意平行弦 $E'F'$，则连结中心 O' 与弦 $E'F'$ 中点 M' 的弦 $C'D'$ 就是直径 $A'B'$ 的共轭直径（图 4．47）．

如果圆的一对共轭直径在主方向上，则它们对应椭圆的一对共轭直径也在主方向上．因而互相垂直，所以，椭圆有一对垂直的共轭直径，这样的一对直径叫做椭圆的**轴**．

在特殊的仿射变换下，例如斜反射（透视仿射变换的对应点被透视轴平分的变换），这时圆变为圆，根据椭圆的定义，则圆可以看做椭圆的特殊情形，由于反射有无限多对主方向，所以圆有无限多对称轴．

最后，研究圆的切线．我们知道通过点 C 且平行于直径 CD 的共轭直径 AB 的直线 t 是圆上点 C 的**切线**．切线与圆只有一个交点，就是切点．由于平行性是仿射性质，所以，直线 t

的对应直线t'也有这样的性质．因此，这样直线也叫做椭圆的切线．当然椭圆的切线与椭圆也只有一个交点，这个点叫做该切线的切点．（图 4．47）．

如果要过椭圆上一点C'作切线，我们只要引直径 $C'D'$的共轭直径$A'B'$，再过C'引$A'B'$的平行线就可以了．

仿射变换群的几何学就是研究仿射等价图形的仿射性质的几何学．换句话说，就是研究仿射群中所有仿射变换下图形的不变性质和不变量的几何学，这种几何学叫做仿射几何学．

因为相似变换群和正交变换群是仿射变换群的子群．因此，仿射几何的内容都是欧氏几何的内容，最丰富的是欧氏几何学．正是由于这个原因，我们才能在欧氏几何里研究仿射性质，本书就是这样处理的．我们还可以抛开欧氏几何，单独地研究纯粹的仿射几何学，就是只讨论在仿射群下的不变性质和不变量，至于相似性质、度量性质等不是仿射性质的一概不再讨论．这样的仿射几何学才是真正的，或叫做纯正的仿射几何，它可用公理法建立．

4．8　仿射变换的简单应用

仿射变换常用来解决几何问题，特别是解决作图与画法几何问题．

如果我们要解决某个图形F的仿射性质问题，我们常根据已知条件或条件的一部分，作出图形F的比较特殊的仿射等价图形F'，转而研究解决关于这个图形上对应的问题，然后再根据问题的条件，将它变换为所要求的图形的问题．特别是利用这种方法解决作图问题时，则把它叫做仿射作图法．

我们先研究椭圆的仿射作图．为此先证明下面定理．

定理 4．16　椭圆由一对共轭直径完全确定．

证明　设已知椭圆的一对共轭直径为 $A'B'$ 和 $C'D'$（图 4．48）．我们把以线段$A'B'$和$C'D'$为共轭直径的椭圆，看作是一个圆O的仿射对应图形，则存在仿射变换将圆的共轭直

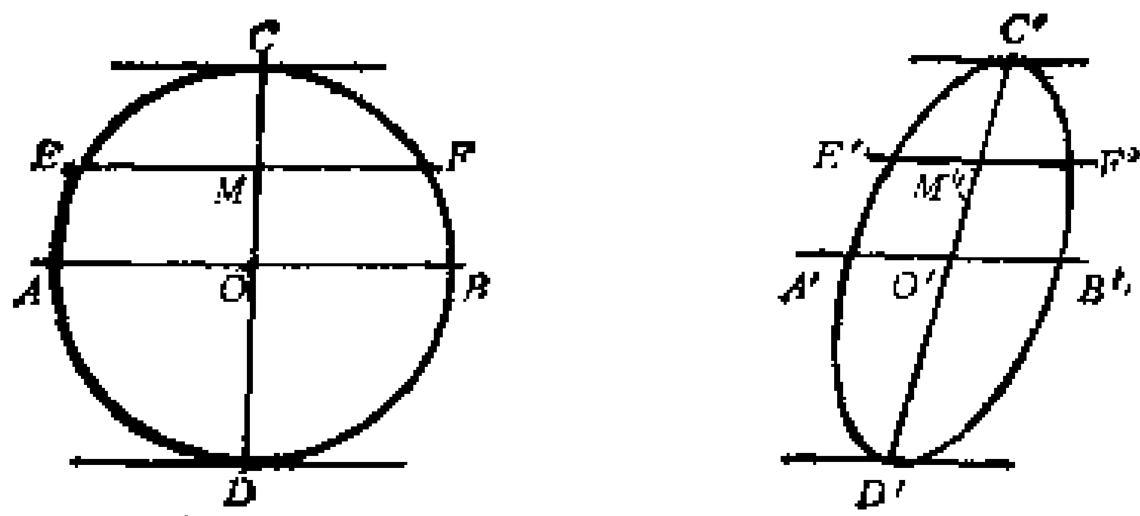


图 4・48

径AB、CD 变为 $A'B'$、$C'D'$. 在圆 O 上任取一个点 E，过点 E 作弦EF平行于直径AB. 设它与AB的共轭直径 CD交于M，用 M'、E'分别表示点M、E的对应点. 由于 $A'B' \parallel E'M'$，

$$(OCM)=(O'C'M')$$

所以，点 E 的对应点只有一个. 如果把椭圆看作另一个圆O_1的仿射 等价图形，A_1B_1、C_1D_1对应$A'B'$、$C'D'$. 两圆由ABC与$A_1B_1C_1$确定了相似关系，则E的对应点E_1也对应点E'. 因此，以 $A'B'$和$C'D'$为共轭直径的椭圆只有一个.

例 1　已知椭圆的一对共轭直径，试作这个椭圆.

方法一（一般的仿射作图法）.

任作一圆 O，再作圆 O 的外切正方形，它的边分别平行于直径AB和CD（图 4. 49）.

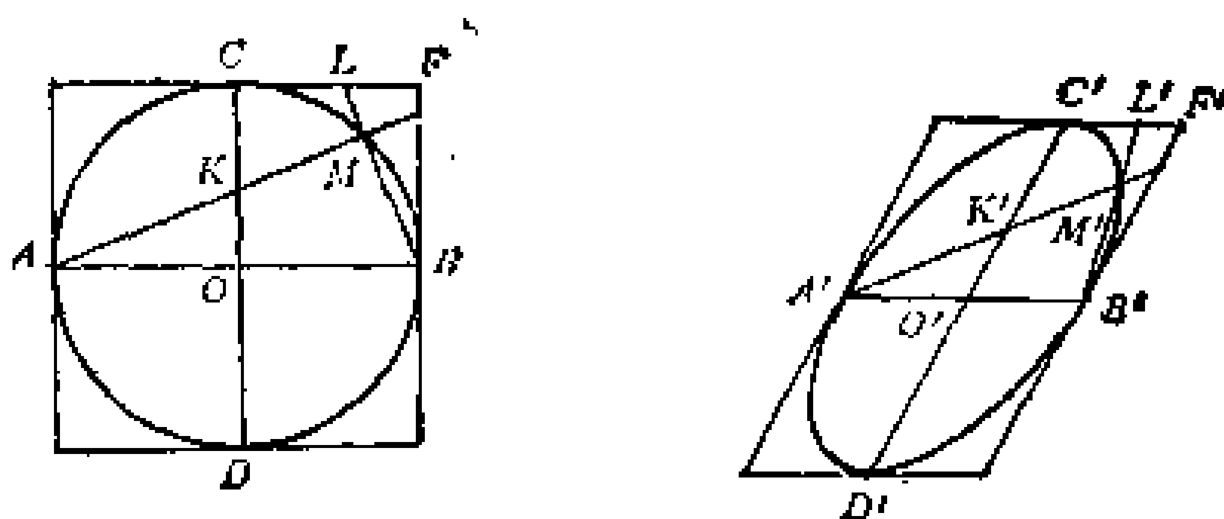


图 4・49

在圆上取任意一点M，连结直线AM和BM. 设AM与CD交于点K，BM与正方形的边CF交于点L. 这时

$$AO=BF\qquad \angle OAK=\angle FBL$$

因此两个直角三角形OAK和FBL相等，由此推出$OK=FL$，$KC=LC$，因而

$$(OCK)=(FCL)$$

在仿射变换下，圆的共轭直径AB、CD对应所求椭圆的共轭直径$A'B'$、$C'D'$，切线对应切线。因此，圆的外切正方形变为椭圆的外切平行四边形，它的边平行于共轭直径，在$C'D'$上取点K'，在$F'C'$边上取点L'，使

$$(O'C'K')=(F'C'L')$$

这时，直线$A'K'$与$B'L'$的交点M'就是点M在椭圆上的对应点。

由此我们得到已知椭圆共轭直径作椭圆上点的方法：

以已知共轭直径$A'B'$、$C'D'$为中线作平行四边形（图4．50），将$O'C'$和$F'C'$等分为同数的线段，以1、2、3、…表示分点，则连结直线$A'I$，与$B'I(I=1,2,\cdots\cdots)$，则$A'I$与$B'I$的交点就是椭圆上的点。

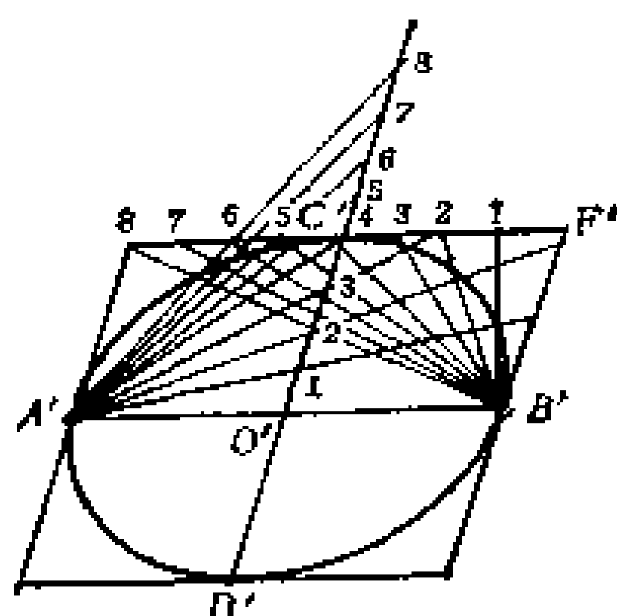


图4·50

以上所研究的图形仿射性质非常重要，因为它们常应用于画法几何里。关于其它图形的仿射性质，可用类似的方法研究。

方法二（用透视仿射变换的作图法）．

设已知椭圆的共轭直径为$A'B'$、$C'D'$（图4．51）它们交于点O'．

以$A'B'$为直径作圆O，把有共轭直径$A'B'$、$C'D'$的椭圆看作是圆O的仿射等价图形，圆的共轭直径AB、CD对应求作椭圆的共轭直径$A'B'$、$C'D'$．因此，以直线$A'B'$为轴，C、C'为

一对对应点的透视仿射变换把圆O变为椭圆O'。我们得到作图方法。

在圆O上任取一点M，连结MD与AB交于一点D_0，则D_0是不动点。这时直线MD_0D对应直线D_0D'，过M作平行于直线CC'的直线MM'与直线D_0D'交于点M'，则M'为M的对应点。因此M'为所求椭圆上的一个点。继续这样作下去，可做出椭圆上的一些点，然后沿点描成光滑的曲线，即为所求的椭圆。

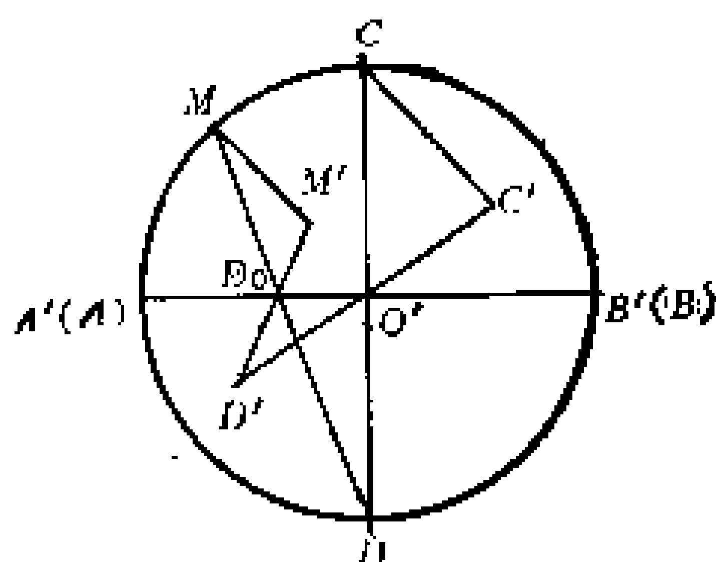


图 4·51

例 2 试证椭圆的外切三角形$A'B'C'$顶点与对边上切点的连线交于一点。

解 我们已知任意三角形顶点与内切圆在对边上切点连线交于一点M。因为存在三角形ABC（图 4．52）与把三角形ABC变为三角形$A'B'C'$的仿射变换，这时，三角形ABC的内切圆变为三角形$A'B'C'$的内切椭圆，切点A_1、B_1、C_1变为切点A_1'、B_1'、C_1'。因此，点M变为M'，也就是$A'A_1'$、$B'B_1'$、$C'C_1'$交于一点M'。

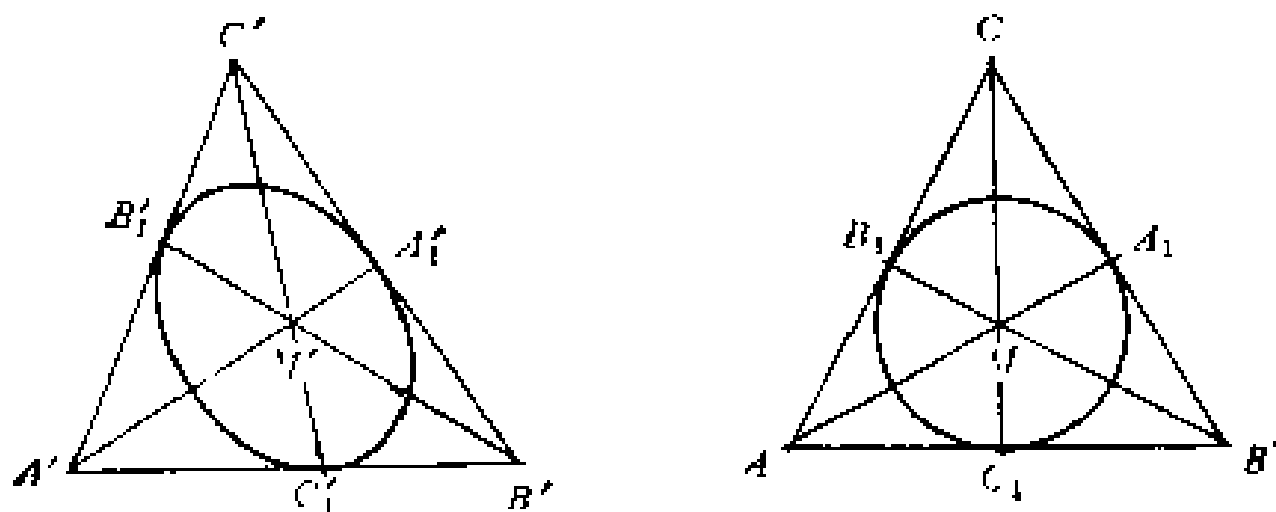


图 4·52

例 3 试证梯形两腰的交点、两底的中点、两对角线交点，这四点共线。

证明 已知如图 4．53（1），作任意等腰三角形ABC，

在AB上取点E，使$(ABE)=(A'B'E')$，过点E作 $ED\parallel BC$与AC交于点D。

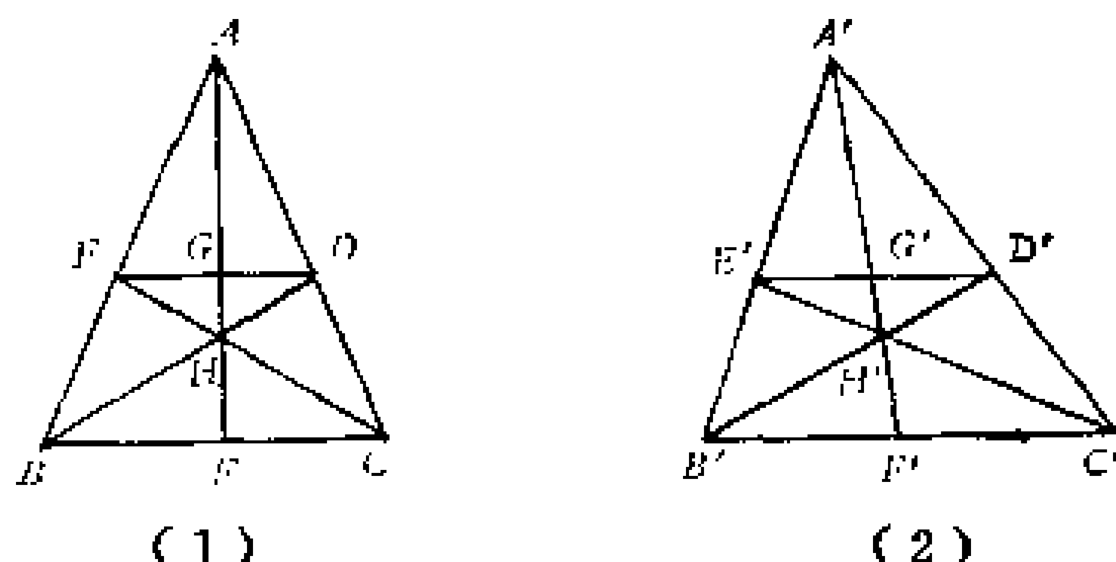
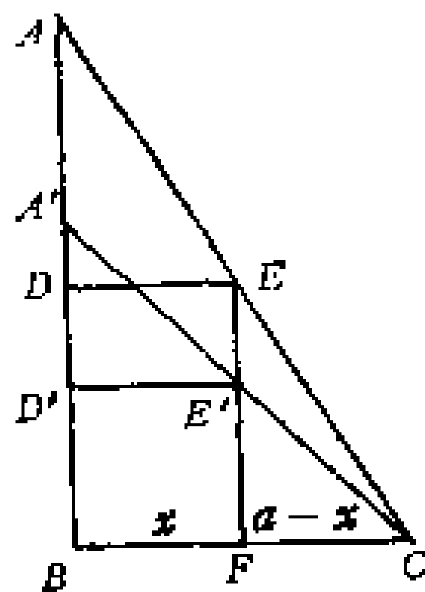


图 4 · 53

因为任意两个三角形都是仿射等价的，令A、A'，B、B'，C、C' 是三对对应点，根据作法，E、E' 也是对应点。又$(ACD)=(A'C'D')$，所以D、D'也是对应点。于是等腰梯形$BCDE$与已知梯形$B'C'D'E'$是仿射等价的。因为A、G、H、F共线，所以它们的对应点A'、G'、H'、F'共线。

例 4　在已知直角 $\triangle ABC$ 内作一内接矩形 $BDEF$ （图 4．54），使其面积为d^2

解　将$\triangle ABC$ 向着 BC 边按压缩比$k=BC/BA$压缩，则此三角形变成等腰三角形$A'BC$，其中$BA'=kBA=(BC/BA)\cdot BA=BC$。而要作的矩形 $BDEF$变成矩形$BD'E'F$，它的而积则为kd^2。因此，现在的问题是在等腰三角形 $A'BC$ 内作一内接矩形 $BD'E'F$，使其面积为kd^2，而这是比较容易作的。实际上，设$BC=a$，$BF=x$，注意三角形$E'FC$也是等腰的，因此 $E'F=FC=a-x$，于是有：



4 · 54

$$x(a-x)=kd^2$$

即

$$x^2-ax-kd^2=0$$

由此得：

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-kd^2}$$

这样，F点即可作出。有了F点，就不难作出矩形$BDEF$。根据d的情况，这个问题可能有两个解，一个解或没有解。

作为练习，请读者把例4中的直角三角形改成任意三角形解同样的问题。

习　　题

§ 1

1．在下列各平面的映射中，哪个是变换？

（1）$\sigma(x,\ y)=(x^2,\ y^2)$

（2）$\sigma(x,\ y)=(x^3,\ y^3)$

（3）$\sigma(x,\ y)=(x,\ -y)$

（4）$\sigma(x,\ y)=(\sin x,\ \cos x)$

2．设α，β是两个变换，证明

$(\alpha\beta)^{-1}=\beta^{-1}\alpha^{-1}$

3．证明：等边双曲线在反演变换下变为双纽线。

4．设φ是集合M与集合M'之间的一一对应，m是M的一个元素．试问$\varphi^{-1}[\varphi(m)]=$？$\varphi[\varphi^{-1}(m)]=$？若$\varphi$是$M$的变换，上述问题的答案如何？

5．证明：直线上的所有形如

$\sigma(x)=ax+b$

的变换构成一个群，其中a、b是常数，且$a\neq0$。这个群是可交换的吗？

§ 2

6．写出下列的正交变换公式：

（1）点（0，1）、(2，0)分别变成点(-1，0)、(0，2)。

（2）点（1，0）、（1，1）分别变成点(2，0)、(1，0)。

7．求出将点（0，0，0）、（0，1，0)、(0，0,1）分别变成点（0，0，0）、（0，0，1）、(1，0，0）的旋转公式。

8．求出将点（2，3）变成（0，－1）的平移变换，在这个平移下，抛物线$y^2-x-8y+18=0$变成什么曲线？

9．求出中心在原点，半轴分别为3和2并以直线$x-2y=0$为长轴的椭圆方程。

10．求出对于平面$Ax+By+Cz+D=0$的反射公式。

11．证明平面上的平移是关于两个平行直线的反射的积，这两个轴垂直于对应点的连线，并且其中的一个轴可以任意选取。

12．证明：平面上的旋转是两个直线反射的积，这两个轴通过旋转中心。

13．证明：平面上的每个运动是不多于三个反射的积。

14．已知四边及一对对边延长线之间的夹角，试作此四边形。

15．设A、B是定直线XY同侧的两定点，在XY上求一点O，使$\angle AOX=2\angle BOY$。

16．给定三条平行线，试作一正三角形，使它的三个顶点分别在三条平行线上。

17．已知五边形各边的中点，作出这个五边形。

18．已知一个圆上的两点P、Q和一条直线s，试在圆上求一点M，使直线PM和QM在直线s上截取线段等于已知长。

19．已知三角形的两边和另一边对应的中线。试作这个三角形。

20．已知一个圆和两个点A、B，试作圆的一个直径，使对径点到A和B的距离相等。

§3

21．试证关于两个不同位似中心的两个位似变换的积是位

似变换或平移。

22．试证：任意两个半径不等的圆都位似，并就各种不同位置求出它们的位似中心。

23．通过已知三角形的一个顶点作一直线，使已知三角形被此直线分成两个有相等内切圆的三角形。

24．在△ABC的AB、AC两边上各求一点D、E，使$BD=DE=EC$。

25．已知两条相交直线和一个点，求作一圆通过已知点且与两条直线相切。

26．已知一半圆，求作它的内接正方形。

27．已知三角形的两个内角及它们的夹边与其上的高的和，求作此三角形。

28．已知一角及内部一点M，在一边上求一点X，使它到另一边的距离等于X与M的距离。

29．已知△ABC，求作它的一个内接平行四边形，使其邻边的比为2:1。

§ 4

30．设σ_1和σ_2分别由下列式子

$$\sigma_1:\begin{cases}x' = x+2y+3\\ y' = 2x+5y-1\end{cases}$$

$$\sigma_2:\begin{cases}x' = x-y\\ y' = x+2\end{cases}$$

表示，求出：

（1）$\sigma_1\sigma_2$；（2）$\sigma_2\sigma_1$；（3）σ_1^{-1}；（4）σ_2^{-1}。

31．平面上是否存在仿射变换，使点（1，2）、（3,6）和（－2，－4）分别变成点（－1，－1）、（0，0）和（2,2），

32．在下列性质中，哪些是仿射性质：

（1）一个四边形有两对相等的邻边；

（2）一直线和椭圆相切；

（3）一四边形是梯形；

（4）一点与另外两点等距。

33. 如果在一三角形ABC中，点P是

（1）中线

（2）高

（3）角平分线

（4）各边中垂线

的交点，那么，经过一个仿射变换后，P点的象对于$\triangle ABC$的象来说是否有相同性质？如果回答是否定的，请给出反例。

34. 试用解析法证明：不共线的三对对应点决定一个仿射变换。

35. 试从仿射变换式说明直线上三点所成的简单比是仿射变换的不变量。

36. 在直线l上的一个坐标系下，坐标为1，2的两点分别对应着坐标为-1，-2的两个点，求所建立的仿射变换式，并求它的二重点的坐标。

37. 求使直线 $x=0$，$y=0$，$x+2y-1=0$ 分别对应直线 $x'+y'=0$，$x'-y'=0$，$x'+2y'-1=0$ 的仿射变换。

38. 求使直线$x+2y-1=0$上的每个点不变，且把点$(1,-1)$变成点$(-1,2)$的仿射变换。

39. 求仿射变换

$$\begin{cases} x'=7x-y+1 \\ y'=4x+2y+4 \end{cases}$$

的二重直线。

40. 证明：使向量内积不变的仿射变换是正交变换。

41. 在仿射变换下，菱形有哪些性质不变？哪些性质改变了？

42. 求一个仿射变换，它把抛物线$y^2=2x$变成自身，把原点$(0,0)$变成点$(2,2)$。

43. 证明：三角形的面积比是仿射变换下的不变量。

44. 试证：在仿射变换下，两个不变点的连线上的每个点都是不动点。

45. 已知透视仿射变换的两个对应三角形，试在两条已知直线上求出一对对应点。

46. 已知椭圆的一对共轭直径，试从已知点作椭圆的切线。

47. 已知椭圆的一对共轭方向与长轴，试作它的短轴。

48. 已知透视仿射变换由轴XY与一对对点A和A'决定，在平面上任取一点，首先把所取的点作为原象点，作出它的对应点；其次把所取的点作为象点，再作出它的对应点。

49. 试证：任取两个互相平分的线段可作为它们所确定的椭圆的共轭直径。

50. 把椭圆看成是圆的仿射对应曲线，试作椭圆的轴和任意多个点。

第五章　射影变换群与射影几何

十七世纪，解析几何出现以后，几何学的研究和发展进入了一个新的阶段．到十八世纪末和十九世纪初，由于绘图和建筑的需要，几何学在应用方面出现研究画法几何的高峰，由于画法几何理论方面的发展，产生了一个新的独立的几何分支——射影几何学．经过不断改进射影几何的研究方法，并且把它应用到其他几何领域，因而得到了发展．例如，克莱因用群论的原则研究几何学，使欧氏几何、仿射几何和射影几何统一起来；同时把关于射影几何的研究和关于初等几何基础的研究紧密地联系起来，将欧氏几何、罗氏几何和黎氏几何以统一的形式联成一个统一的体系等等．

本章讨论射影变换群以及它所对应的射影几何的基础理论和方法．将以克莱因的群论原则为主导，侧重讨论二维空间（平面）的射影几何．

§1　射影平面的结构．齐次坐标．对偶原则

本节从中心射影引进平面上的无穷远元素，从而将欧几里得平面扩充成为射影平面，作为建立平面射影几何的基础，然后相应地引进了齐次坐标；讨论射影平面的简单性质和基本图形以及射影几何中重要的对偶原则；最后介绍一点复射影平面的知识．

1·1　从欧氏平面扩充成射影平面

1　中心射影

我们绘画时一般要遵循透视的原理，透视就是我们在第四章1·1中提到过的中心射影．射影几何的研究开始于“中心射影法”，而我们将要着重讨论的射影对应和射影变换，就是几次中心射影（也叫透视对应）的积；因此有必要先来讨论它．

定义　已知平面上两条直线 a 和 a'，S 是不在这两条直线上的一个定点（图5·1）．如果在直线 a 上取任意点 A_1，连接 SA_1 与直线 a' 交于点 A_1'，则点 A_1' 叫做直线 a 上的点 A_1 在直线 a' 上的射影，点 S 叫做中心，直线 SA_1 叫做投射线，点 A_1 和 A_1' 的这种对应关系叫做从直线 a 到直线 a' 上的中心射影．

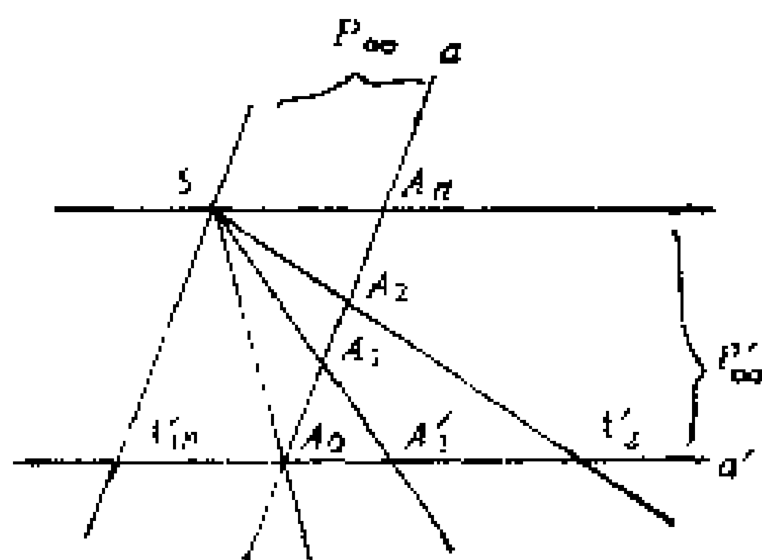


图5·1

在图5·1中，直线 a 与直线 a' 交于点 A_0，直线 a 上的点 A_1、A_2、……，在中心射影下，在直线 a' 上的对应点分别为 A_1'、A_2'、……，点 A_0 和自身对应．

从中心射影的定义，我们看出，如果点 A_1' 是直线 a 上点 A_1 在直线 a' 上的射影，则点 A_1 也是直线 a' 上点 A_1' 在直线 a 上的射影．但是我们将会看到，在欧几里得平面上使用中心射影法遇到了困难．这就是直线 a 上的点在直线 a' 上不一定都有射影，同时直线 a' 上的点也可能不是直线 a 上任何点的射影．换句话说，点与它的射影之间不能建立一一对应．

例如，在直线 a 上取点 A_n 使投射线 SA_n 平行于 a'，由于在欧几里得平面上平行线不相交，所以它在直线 a' 上没有射影．同样，如果在直线 a' 上取点 A_m'，使投射线 SA_m' 平行于直线 a，则 A_m' 也不是直线 a 上任何点的射影．

因此，在欧几里得平面上利用中心射影所建立的点与点之

间的对应不是一一的．如果不消除这个缺点，则应用中心射影法研究问题就有很大的障碍．我们必须对欧几里得平面进行某种改造，使改造后的平面可以应用中心射影法建立点与它的射影之间的一一对应，面没有任何例外．

2　无穷远元素的引入

现在对欧氏平面进行拓广，使它成为一种新的平面．在这个平面上，利用中心射影法，能够使直线和直线之间的点建立一一对应．怎样对欧氏平面加以拓广呢？这就是引进无穷远元素，使它们遵守下面两个约定：

约定1　在同一方向上所有的平行直线（平行线束）相交于同一个点，这个点叫做无穷远点（或理想点），用A_∞、B_∞、…等表示。

根据约定1，在不同方向上的平行线束必然交于不同的无穷远点．否则两组不同的平行线将成为在同一方向上的平行直线，这与已知矛盾．因为平面上的所有直线可有无穷多个平行方向，因此，平面上将有无穷多个无穷远点．

约定2　平面上所有无穷远点的集合组成一条直线．这条直线叫做无穷远直线，（或理想直线）用p_∞表示．原来的点和直线叫做有穷远点和直线．

无穷远直线实际上是三维空间中平行平面的交线．

这样，我们就在每一个欧氏直线上添加了一个无穷远点，面且平行直线的无穷远点完全相同，在每个平面上增加了一条无穷远直线，它是这个平面上所有无穷远点的集合．

定义　在欧氏平面上，增加了无穷远点的直线叫做**射影直线**；增加了无穷远直线的平面叫做**射影平面**．

我们还可以定义三维射影空间．为此需要增加第三个约定：

约定3　空间内一切无穷远点的集合组成一个平面，这个平面叫做无穷远平面，常用π_∞等字母表示．

显然无穷远平面包含所有的无穷远直线。

定义 增加了无穷远平面的三维欧氏空间叫做**三维射影空间**。

注意：严格地讲，前面所定义的射影平面（空间）应该叫做仿射平面（空间）；它们仅仅是射影平面（空间）的具体模型而已。事实上，在射影平面（空间）上，所有的点地位是相同的，不存在无穷远元素和有穷远元素的区别。严格地刻划射影平面（空间）需要借助于公理法，象在第一编里建立欧氏平面那样，我们将在§4里简要的介绍射影几何的公理。这样作的目的，主要是为了直观、具体。因此本书基本上是在欧氏平面基础上讨论射影几何性质的。这会给我们的讨论带来许多方便之处。

现在我们再回过来看图5·1。由于引进了无穷远点，使得平面上任何两条直线都相交，直线 a 上的 A_∞ 点在直线 a' 上的射影就是无穷远点 P'_∞，这是面为直线 SA_∞ 平行于直线 a'，而直线 a 上的无穷远点 P_∞ 在直线 a' 上的射影是点 A'_∞，这是因为直线 a 上的无穷远点 P_∞ 也是直线 SA'_∞ 上的无穷远点，直线 SP_∞ 与直线 a' 交于点 A'_∞。这样，直线 a 与直线 a' 在以 S 为中心的中心射影下建立了点之间的一一对应。不仅如此，这时以点 S 为中心的线束中的直线与直线 a 上的点（或直线 a' 上的点）也建立了一一对应的关系，即直线 SA_i（或直线 SA'_i）对应于点 A_i（或点 A'_i）。这两个对应是我们以后要着重讨论的一维基本形间的一种透视对应。从这个点之间的对应关系中还可以看出，无穷远点可以与有穷远点互相对应。

如果把无穷远点特殊对待，以无穷远点为中心的中心射影就变成了平行射影，这时所有投射线互相平行。

在射影平面上，点与直线有下面的基本结合关系：

（1）属于两个不同的点 A、B，有一条且只有一条直线 a。

（2）属于两条不同的直线 a、b，有一个且只有一个点 A。

这两个关系是显然的．例如，属于两个有穷远点只有一条直线；属于一个有穷远点和一个无穷远点也只有一条直线；属于两个无穷远点只有一条无穷远直线，因而命题（1）成立．其次，属于两条有穷远直线只有一个点（有穷远点或无穷远点）；属于一条有穷远直线和一条无穷远直线上的点只有一个无穷远点，平面上没有两条无穷远直线的情形，因而命题（2）也成立。

关系（2）在欧氏平面上是不成立的，因为两条平行线没有公共交点．在射影平面上"平行"与"相交"之间的差别消失了，点和直线在结合关系上取得了对等的地位．这是在射影平面上存在普遍对偶关系的根据．

现在我们来看看射影平面上点与直线的顺序关系．

首先，射影直线是封闭的．因为当我们沿着通常直线的两个方向无限延长时，最终必相交于无穷远点．这可以通过下面的事实来说明：

如图5·2，根据中心射影法，对于直线 s 上的每个点，例如点 A，有线束 S 的一条直线 a 通过点 A．反之，对于线束 S 的每条直线，例如直线 b，有直线 s 的一个点 B 属于直线 b．因此，直线 s 的点与线束 S 的直线之间成一一对应（其中直线 s 的点 P_∞ 与直线 p 相对应）．

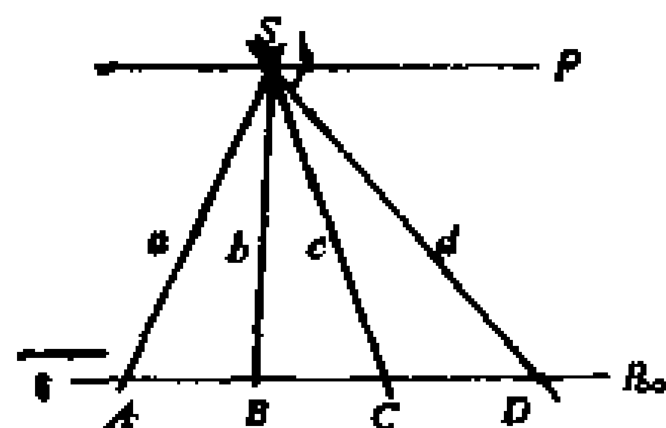


图5·2

当直线 a 绕点 S 沿某个方向旋转时，则和直线 a 相对应的点 A 在直线 s 上沿一定方向移动．如果直线 a 绕点 S 向某个方向旋转180°回到原来位置，则对应点 A 应沿直线 s 按一个确定的方向移动回到原来位置，由此看出射影直线是封闭的．

其次由于射影直线是封闭的，它上面的一点A不能把直线分为两部分，恰象圆上一点不能把圆分为两部分一样。

设A和C是射影直线上的不同二点，则点A和C可以把射影直线分为两部分，也就是分成两个线段，其中一个不含无穷远点P_∞，另一个含有无穷远点P_∞（图5·3）。为了区别两个线段，前一个用AC表示，后一个用$AP_\infty C$表示。

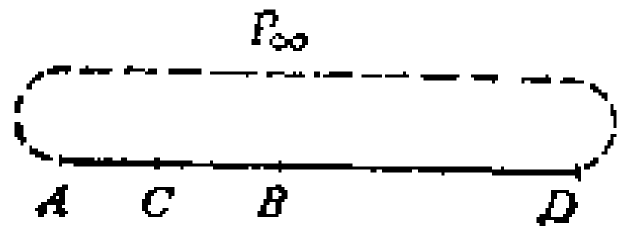


图5·3

在欧几里得几何里，直线上点的顺序关系是用“在……之间”的概念来表示的，如果点M属于线段AB，则说点M在A与B之间。但在射影平面上，直线是封闭的，“在……之间”的概念失掉意义，而用分隔概念来代替它。

定义 设A、B、C、D是一直线上的四个点，如果点对C、D属于点对A、B分直线所成的两个不同线段(图5·3)，我们就说点对C、D分隔点对A、B。并且用下面记号表示：

$$C、D \div A、B$$

如果点对C、D属于点对A、B分直线所成的两个线段中的同一个（图5·4），则说点对C、D不分隔点对A、B。并表示为：



图5·4

$$C、D \mathrel{\overline{\div}} A、B$$

利用分隔点对的概念可以建立每个线段上点的顺序，然后依照线段的顺序首尾相接地建立起直线上点的顺序关系，而且可以有两个不同的顺序关系。参看叶菲莫夫著《高等几何》（裘光明译，高教出版社出版，1954年）。

类似直线上两个点对分隔的概念，可以建立线束里两个直线对的分隔概念：

因为直线s的点和线束S的直线之间可以建立一一对应，所以线束S的直线a和c把线束S也分为两部分，也就是分成

两个角。其中一个含有一确定直线 p，另一个不含直线 p（图5·2）。前一个用 $\angle(a,c)$ 表示，后一个用 $\angle(a,p,c)$ 表示。

设 a 、 b 、 c 、 d 是一个线束里的四条不同的直线。如果直线对 c 、 d 分别属于直线对 a 、 b 分线束的两个不同的角里（图5·5），则说直线对 c 、 d 分隔直线对 a 、 b 并表示为：

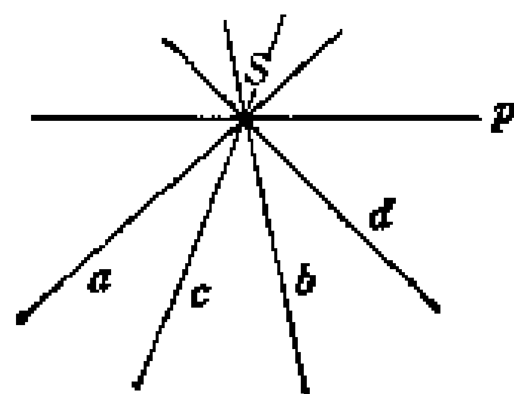


图5·5

$$c、d \div a、b$$

如果直线对 c 、 d 同时属于直线对 a 、 b 分线束所成两个角中的一个，则说直线对 c 、 d 不分隔直线对 a 、 b，并表示为：

$$c、d \,\ddot{-}\, a、b$$

点对与直线对的分隔性都是相互的，也就是如果

$$C、D \div A、B$$

则也有

$$A、B \div C、D$$

同样，如果

$$c、d \div a、b$$

则也有

$$a、b \div c、d$$

由此可以看出：如果从一点 S 向分隔点对投射直线，则得到分隔直线对；如果用直线截分隔直线对，则得到分隔点对。也就是说，在射影平面内，可以根据直线上点的顺序关系来建立对应线束里直线的顺序关系。

射影平面上点的位置关系又怎样呢？

我们已知一条直线 a 可以把欧几里得平面分成两个区域，同一区域里的任意两个点 A 、 C 连结的线段与直线 a 不相交，不同区域里的任意两个点 A 、 B 连结的线段与直线 a 相交（图5·6）。但在射影平面上的一条直线 a 就不能把这个平面分成

两个区域。因为对于任何两点A、B，都可以连结一条线段不与直线a相交。事实上，直线AB与直线a只有一个交点X(图5·7)，所以连结A、B的两个线段AB和$AP_\infty B$中总有一个与直线a不相交，例如$AP_\infty B$就是。

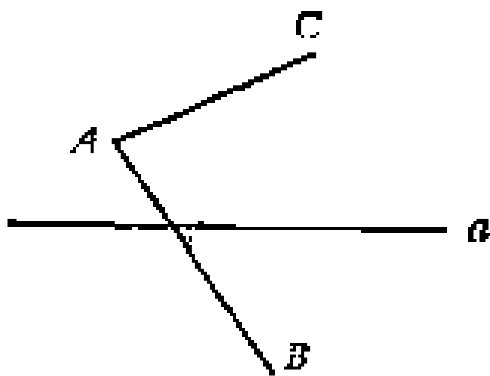


图5·6

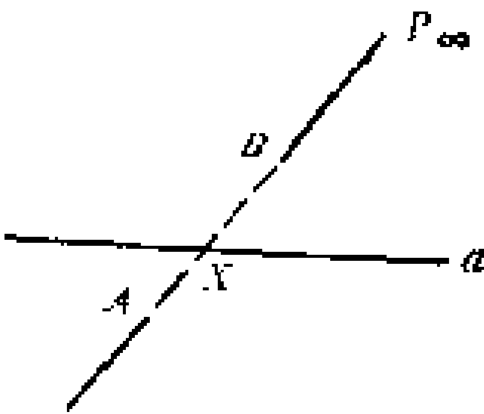


图5·7

两条相交直线可以把欧氏平面分为四个区域。但两条射影直线只能把射影平面分成两个区域。如图5·8里，1和1是一个区域，2和2是另一个区域。因为1和1或2和2中的任何两点A、B都可连结线段不与界限a、b相交，但如果A点在1和1区域，B点在2和2区域，则两点A、B连线必与a或b相交。

三条不交于同一点也不平行的直线可以把欧几里得平面分成七个区域；但不交于同一点的三条射影直线只能把射影平面分成四个区域。例如图5·9中的1和1，2和2，3和3，4，四个区域，每个区域的任意二点A、B都能连结线段不与分界直

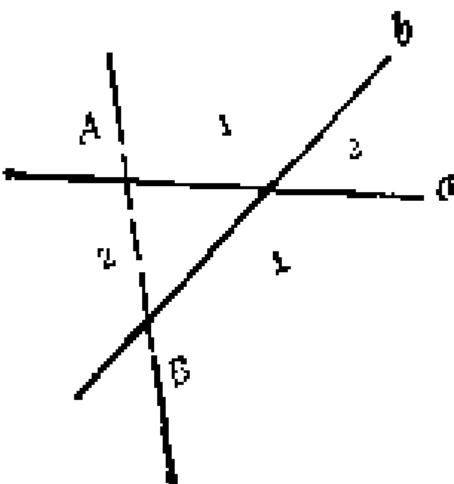


图5·8

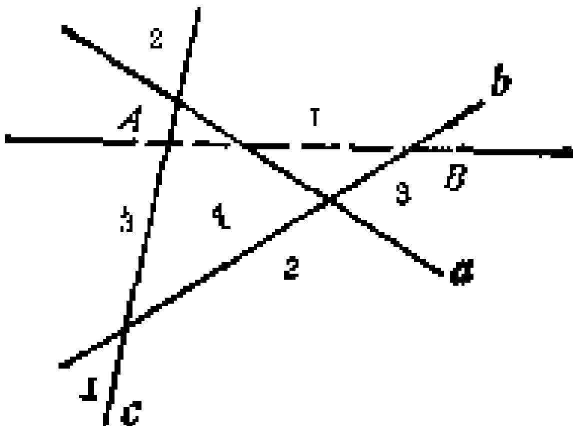


图5·9

线a、b、c相交，而不同区域的两点连结线段至少与a、b、c当中的一条相交。

1·2 齐次点坐标

点和直线的概念已经推广了，点和直线的代数表示也要随着推广才能适应需要，推广的关键是能够把无穷远点和普通点一样用坐标表示出来，并象解析几何那样进行代数运算。为此我们引进齐次坐标。首先讨论齐次点坐标。

1 直线上点的齐次坐标

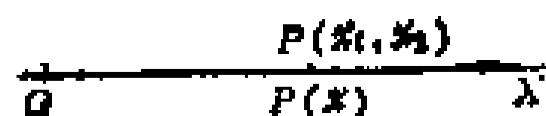


图5·10

定义 设直线上已建立了笛卡儿坐标系（图5·10），则它上面的任意一个有穷点 P 的坐标是

$$x=\overline{op}$$

现在任取两个数 x_1、x_2，使

$$\frac{x_1}{x_2}=x, \qquad x_2\neq 0$$

则有序数对 (x_1, x_2) 叫做点 P 的一维齐次（笛氏）坐标，记作 $P(x_1,x_2)$。规定 $(x_1, 0), x_1\neq 0$，为直线上无穷远点 P_∞ 的齐次坐标。而原来的坐标 x 则叫做点 P 的一维非齐次坐标。

根据上述定义，可以看出：

不同时等于零的任何两个数 x_1，x_2 在轴上确定而且只确定一个点。（0，0）不能确定任何点，原点 O 的齐次坐标为 $(0, x_2)$ 或 $(0,1)$。

当 ρ 是不等于零的任意实数时，则 $(\rho x_1, \rho x_2)$ 与 (x_1, x_2) 表示同一个点，因为

$$\frac{\rho x_1}{\rho x_2}=\frac{x_1}{x_2}=x$$

这就是说一个点的齐次坐标可有无穷多种表示形式。

2 平面上点的齐次坐标

定义 设平面上点 P 的笛卡儿坐标为 (x,y)，任取不同时等于零的三个数，使

$$\frac{x_1}{x_3}=x,\quad \frac{x_2}{x_3}=y,\ x_3\neq 0$$

则有序数组(x_1,x_2,x_3)叫做点P的二维（笛氏）齐次坐标，记作$P(x_1,x_2,x_3)$，而(x,y)叫做点P的二维非齐次坐标。

规定$(x_1,x_2,0)$为以$\frac{x_2}{x_1}=\lambda$为方向系数的直线上无穷远点的齐次坐标。

我们来看看这样规定的合理性和意义：

设有与y轴不平行的直线c（图5·11），其方程为

$$y=\lambda x+b \qquad (1)$$

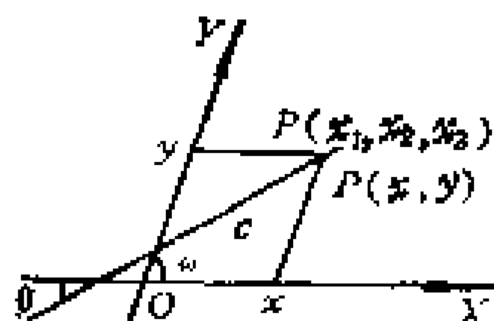


图5·11

其中在直角坐标系中$\lambda=tg\theta$是直线c的斜率，在斜角坐标系中$\lambda=\frac{\sin\theta}{\sin(\omega-\theta)}$是直线$c$的方向系数。

其中θ表示倾斜角，ω表示两坐标轴的交角。

当θ不变而b变动时，方程(1)表示一族平行线。取族中一定直线c，其上一点P的非齐次坐标为$(x,\lambda x+b)$，齐次坐标取$(x,\lambda x+b,1)$或$(1,\lambda+\frac{b}{x},\frac{1}{x})$。当$P$点在直线$c$上两方趋于无穷远时，$x$应当趋于正、负无穷大，这时点$P$的极限是$(1,\lambda,0)$，是一个与$b$无关的定数组，因此可规定它是以

$$\lambda=\frac{x_2}{x_1}$$

为方向系数的直线上无穷远点的齐次坐标。

y轴上无穷远点的齐次坐标为$(0,x_2,0)$或$(0,1,0)$；x轴上无穷远点的齐次坐标为$(x_1,0,0)$或$(1,0,0)$；坐标原点的坐标为$(0,0,1)$。

当ρ为不等于零的实数时，$(\rho x_1,\rho x_2,\rho x_3)$与$(x_1,x_2,x_3)$表

示同一个点。就是说一点的齐次坐标可以有无限多种表示形式。

3 直线和曲线的齐次坐标方程

定义 在齐次坐标系中，一已知直线的方程是以(x_1,x_2,x_3)为流动点的齐次坐标所成的方程，此方程能够且仅能够被该直线上所有点的齐次坐标所适合。则这个方程叫做**直线的齐次坐标方程**。

可以证明，如果直线的非齐次坐标方程是

$$u_1x+u_2y+u_3=0 \qquad (u_1^2+u_2^2\neq 0)$$

则它的齐次坐标方程是

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

这个方程不含常数项，因而是齐次的。过原点的直线的齐次坐标方程是

$$u_1x_1+u_2x_2=0$$

由无穷远点的特征可知无穷远直线的齐次坐标方程是

$$x_3=0$$

类似直线的齐次坐标方程求法，如果圆锥曲线的非齐次坐标方程是

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

则齐次坐标方程是

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3$$
$$+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0$$

从上面的讨论中，由直线的非齐次坐标求它的齐次坐标方程时，只要用$x=\frac{x_1}{x_3}$， $y=\frac{x_2}{x_3}$代换方程中的x,y即得。反过来，从有穷远直线的齐次坐标方程也同样可以求出其非齐次坐标方程，这只要用第三个坐标x_3去除x_1和x_2就行了。

例如，一点的齐次坐标为(3,2,3)，则$(1,\frac{2}{3})$是其非齐次坐标。已知直线的非齐次坐标方程为

$$2x+5y-1=0$$

则齐次坐标方程为

$$2\cdot\frac{x_1}{x_3}+5\frac{x_2}{x_3}-1=0$$

即 $$2x_1+5x_2-x_3=0$$

如果直线的齐次坐标方程为

$$3x_1+6x_2+5x_3=0$$

则它的非齐次坐标方程可写成下式：

$$3\frac{x_1}{x_3}+6\frac{x_2}{x_3}+5=0$$

即 $$3x+6y+5=0$$

4　齐次坐标的简单记法和应用

为了使用方便，今后常将点(x_1,x_2,x_3)、(a_1,a_2,a_3)、……简记作$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{A}$、……，即

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3),\quad \boldsymbol{A}=(a_1,a_2,a_3),\ \cdots\cdots$$

（注意：有的书里也将点(x_1,x_2,x_3)、(a_1,a_2,a_3)、……简记作$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{a}$、……，即 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，……，本书有时也采用这种记法。）这种记法有许多好处，我们可以类似向量的运算给出下面的一些定义。

（1）类似向量数量积，定义$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$（或$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$）为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$$

显然

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\text{（满足交换律）}$$

根据这个定义，直线的齐次坐标方程为

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$$

可以简记作

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=0$$

（2）类似向量积，定义

$$A\times B=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

$$=-(B\times A) \tag{5·1}$$

容易看出，$A\times B$ 正好是直线

l_1：$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$

l_2：$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$

（即$A\cdot X=0$，$B\cdot X=0$）的交点坐标。

（3）定义

$$|A,B,C|=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \tag{5·2}$$

容易推出下式

$$|X,A,B|=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0$$

正好是过两点A、B的直线方程。

（4）定义

$$lA+mB=(la_1+mb_1,\ la_2+mb_2,\ la_3+mb_3)$$

（其中l,m为实数，且不同时等于零）．

我们来证明，点$C=lA+mB$是两点A、B的连线AB上的点，即A、B、C共线。反过来，如果C是直线AB上任一点，则必有$C=lA+mB$的形式。

证明如下：

如果点C可以表示为$lA+mB$的形式，即点C的坐标为

$$C=(la_1+mb_1,\ la_2+mb_2,\ la_3+mb_3)$$

由此可以算出

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ la_1+mb_1 & la_2+mb_2 & la_3+mb_3\end{vmatrix}=0$$

这说明点C在点A、B连结的直线 AB 上。

反过来，设C为A、B 连线上的一点，则

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

由行列式理论必有 l'、m'、n' 三个不都为零的数存在，而使

$$l'a_i + m'b_i + n'c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

首先证明$n' \neq 0$。否则必有$l' = 0, m' \neq 0$；或$l' \neq 0, m' = 0$；或$l' \neq 0$，$m' \neq 0$。但此三种情形都不可能存在，因此 $n' \neq 0$。其次可同理证明 $l' \neq 0$，$m' \neq 0$，故有

$$c_i = \frac{-l'}{n'}a_i - \frac{m'}{n'}b_i$$

令

$$l = -\frac{l'}{n'}, \qquad m = -\frac{m'}{n'}$$

最后得

$$c_i = la_i + mb_i$$

因此点C可以写作$lA + mB$，其中l、m不同时为零。

这一事实说明$lA + mB$当 l、m 是不同时等于零的实数时，它表示直线 AB 上任意点的坐标，也就是我们下面将要讲的点列的代数表示。

从上面的推导中还可以得出：三个不同点A、B、C共线的充要条件是

$$|A, B, C| = 0$$

例 1　求直线 $x - 3y + 4 = 0$上无穷远点的坐标。

解　首先将已知直线方程化成齐次坐标方程

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$$

这条直线与无穷远直线$x_3 = 0$的交点即为所求的无穷远点。因此解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

其交点坐标为

$$\left(\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\right)$$

即所求的无穷远点的坐标为$(-3, -1, 0)$。

例 2　已知不共线的三点A、B、C，求证平面上不同三点，$l_iA + m_iB + n_iC$（$i = 1, 2, 3, l_i, m_i, n_i$ 不同时等于零．）共线的充要条件为

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0$$

解　如果平面上三个不同点 $l_iA + m_iB + n_iC$ 共线，则必存在三个不全为零的实数p、q、r 使

$$p(l_1A + m_1B + n_1C) + q(l_2A + m_2B + n_2C) + r(l_3A + m_3B + n_3C) = 0 \quad (1)$$

即

$$(pl_1 + ql_2 + rl_3)A + (pm_1 + qm_2 + rm_3)B + (pn_1 + qn_2 + rn_3)C = 0$$

因为三点A、B、C不共线，所以必有

$$\begin{cases} pl_1 + ql_2 + rl_3 = 0 \\ pm_1 + qm_2 + rm_3 = 0 \\ pn_1 + qn_2 + rn_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

但p、q、r不全为零，因此

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

反过来，如果已知上述行列式（3）等于零，则方程组

（2）有非零解，即存在三个不全为零的数p、q、r满足（1），从而三点$l_iA+m_iB+n_iC(i=1,2,3)$共线。

5　射影平面的模型

为了理解齐次坐标和上面定义的一些符号，我们给出射影平面的一个空间模型：

给定一空间直角坐标系〔$O;X_1X_2X_3$〕（图5·12）。

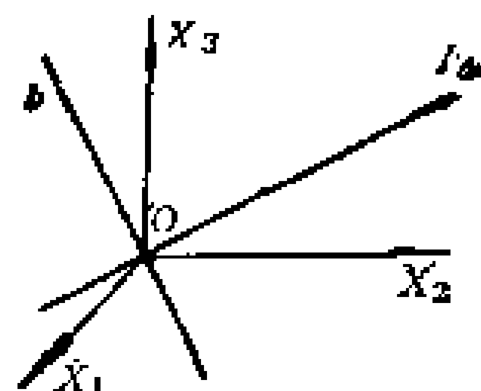


图5·12

规定：过原点O的每条直线叫做"射影点"，过原点O的每个平面叫做"射影直线"，这样的"直线"与"点"全体构成的集合叫做"射影平面"。

可以验证这是一个射影平面的模型：

（1）命题："两'点'决定一条'直线'"；"两'直线'交于一'点'"都成立。

实际上，在空间里过原点O的每两条直线决定一个过原点O的平面；以及过原点O的两个平面必交于过原点O的一条直线。

（2）在射影平面内每一点的齐次坐标有无数种表示形式，它们可以写成$(\rho x_1,\rho x_2,\rho x_3)$，其中$\rho$的取值范围是不为零的所有实数。而在空间里，每一个确定的数ρ，$(\rho x_1,\rho x_2,\rho x_3)$都表示一个点（除掉$0=(0,0,0)$），这些点的集合正好是以$(x_1,x_2,x_3)$为系数且过原点$O$的一条直线。

（3）射影平面上齐次坐标方程

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

表示一条直线。而在空间坐标系〔$O;X_1X_2X_3$〕中，它正好表示过原点O的一个平面，其法向量是$u=(u_1,u_2,u_3)$。

根据上述理由，上面所建立的模型满足齐次坐标所表示的射影平面上点和直线所具有的结合关系。

我们再进一步看以下两个问题的解释：

（4）在射影平面上，过两个齐次坐标的点 $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$的直线方程为

$$|X,A,B|=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}x_1$$

$$+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}x_2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}x_3=0$$

它在空间坐标系〔$O;X_1X_2X_3$〕中表示一个过原点O的平面，其法向量为

$$n=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)=A\times B$$

（5）在射影平面上用齐次坐标表示的两直线方程为

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$$

它们的交点 C的坐标为

$$C=\left(\rho\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ \rho\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\ \rho\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

而在空间坐标系〔$O;X_1X_2X_3$〕里，两个方程表示过原点 O 的平面，其法向量分别为

$$A=(a_1,a_2,a_3),\ B=(b_1,b_2,b_3)$$

面
$$A\times B=C'=\frac{1}{\rho}C$$

当ρ取任意不为零的实数时，$\frac{1}{\rho}C=\left(\frac{1}{\rho}c_1,\ \frac{1}{\rho}c_2,\ \frac{1}{\rho}c_3\right)$表示过原点以 $C=(c_1,c_2,c_3)$为方向向量的一条直线。

（4）、（5）用模型中的“点”和“直线”对射影平面上的点和直线的两个基本结合关系给出了解释。

综上所述，我们给出了射影平面的一个空间模型，同时对

齐次坐标和符号 $A\cdot B$，$A\times B$ 的意义也通过模型给出解释。齐次坐标的点 $X=(x_1, x_2, x_3)$ 可以看成三维空间里的一个向量，而 $A\cdot B$和$A\times B$ 可以看成三维空间里的两个向量的数量积和向量积。今后我们在不致混淆的情况下就这样来理解齐次坐标和向量的关系，这将给我们带来很大的方便。

现在以原点O为中心，以定长 r 为半径作一半球。然后以球心O为射影中心，将空间过原点O的所有直线和平面，中心射影到半球面上去。除了半球底圆面所在的平面，过点O的直线在半球面得出两个投影点 A和 A'，它们成对径点（直径的两个端点)外，其余过点O的直线在半球面都得出唯一一个投影点；而每个过原点O的平面在半球面上的投影，除半球圆面所在平面的投影是一个大圆外，其余平面的投影都是半大圆，其端点为半球圆面上的对径点（图5．13）。如果我们把半球圆面上的每一对对径点A、A'都看成同一个点，则半球面上的点与过原点O的直线就成一一对应，半球面上的半大圆弧与过原点O的平面成一一对应。因此可以把半球面上这种点（其中对径点看成同一点）当作射影平面的"点"，把半球面上这样的半大圆弧当作"射影直线"，这样我们就得到射影平面的第二个模型(图5·13)。从这个模型出发，可得到在拓扑学中常用的模型，即把半球面上的点垂直投影到圆面 OAB上（图5．13），在这个圆面上把直径的端点看成一个点，则这些点和圆内的点构成射影平面。结合前面的模型请读者想象一下射影直线是什么样子。

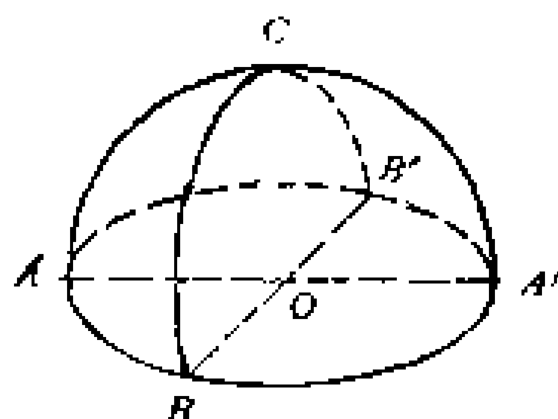


图5．13

注：由齐次坐标的启发，我们可以按下面的方式建立射影平面。设F是所有三元实数组 (x_1, x_2, x_3)构成的集合。在F中引进一个关系：$(x_1, x_2, x_3)\sim(y_1, y_2, y_3)$当且仅当$x_1=\lambda y_1$，$x_2=\lambda y_2$，$x_3=\lambda y_3$，其中$\lambda$为非零实数。显然这是一个等价关系，

现在用$[(x_1, x_2, x_3)]$表示(x_1, x_2, x_3)所在的等价类，则我们把除了$(0, 0, 0)$所在的等价类以外的等价类集合叫做**射影平面**，而每个等价类叫做**点**．射影平面上的直线是满足方程

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

的点集合，其中u_i不全为零．

这样，我们就全然不依赖于欧氏平面而建立起射影平面．在这样定义的射影平面上，诸如点与点之间的距离、角度、图形的面积、平行性等等都变成没有意义的了．

1．3　线坐标

过去我们学过的初等几何及解析几何是属于点几何的范围．点几何的主要观点是把点看成基本的元素，把直线、曲线等图形都看成是点的集合（轨迹）．在点几何里对于点引进坐标，直线、曲线等都看成点的轨迹而建立它们的方程．

同样地，也可以把直线看成是几何的基本元素来建立直线几何学，而把点看成是由一束直线构成的图形，把曲线看成是一族直线的包络．在线几何里，对于直线引进坐标，点、曲线则看成是直线的包络而建立它们的方程．为此我们首先讨论对于直线引进坐标的问题．

1　平面上直线的非齐次线坐标和齐次线坐标

在平面解析几何里，直线的方程一般可以写成

$$l：Ax + By + C = 0$$

若l不过原点O，则$C \neq 0$，方程可以化成常数项为1的形式，即：

$$ux + vy + 1 = 0$$

其中$u = \frac{A}{C}$，　$v = \frac{B}{C}$．这种形式可以建立不过原点O的直线与有序数组(u, v)之间的一一对应．

定义　一直线$ux + vy + 1 = 0$的流动坐标系数组(u, v)，叫做这一直线的**非齐次线坐标**．记作$l(u, v)$．

按这一定义，过原点O的直线方程常数项为0，所以这类直线没有线坐标。

在射影几何里为了充分利用对偶原则，以及简化论述的过程，常常同时使用点坐标和线坐标。点坐标与线坐标有如下的关系：

定理5.1 点(x_0, y_0)在直线(u, v)上的充要条件是

$$ux_0 + vy_0 + 1 = 0$$

定理成立是显然的。

定义 已知点的线坐标方程是以(u, v)为流动坐标所构成的方程，此方程能够且仅能够被过该点的直线坐标所适合。

这个定义的几何意义是：在线几何里，一点被看成是一束直线的集合，这与点几何里一直线被看成是一系列点的集合，形成对偶关系（对偶原则后面讲）。

根据定义和定理5.1，如果(x_0, y_0)不是原点，则这一点的方程是

$$x_0u + y_0v + 1 = 0$$

显然，以(u, v)为坐标的直线适合这个方程。反过来，适合这一方程的直线其线坐标为(u, v)。（实际上，该方程表示一个过点(x_0, y_0)的线束）。

过原点O的直线没有非齐次线坐标，这是一个缺欠，为此我们引进齐次线坐标来加以弥补。

定义 设平面上任意一直线l的齐次线坐标为(u, v)，任取三个不同时为零的数u_1、u_2、u_3，使

$$\frac{u_1}{u_3} = u,\quad \frac{u_2}{u_3} = v,\quad u_3 \neq 0$$

则有序数组(u_1, u_2, u_3)叫做该直线的齐次线坐标。记作$l(u_1, u_2, u_3)$或$u = (u_1, u_2, u_3)$。

显然，当ρ是不等于零的任意实数时，数组$(\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3)$仍表示直线$(u_1, u_2, u_3)$。

(0, 0, 0)不是任何直线的坐标。

因为以(u, v)为线坐标的直线其点坐标方程为

$$ux+vy+1=0$$

或齐次坐标方程为

$$ux_1+vx_2+x_3=0$$

所以，以齐次线坐标(u_1, u_2, u_3)为坐标的直线，其点坐标的方程为

$$u_1x+u_2y+u_3=0$$

或齐次坐标方程为

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

我们看出，当 $u_3=0$时，这条直线必通过原点O。因此，规定$(u_1, u_2, 0)$ 是过原点O且以$\frac{u_2}{u_1}$为方向系数的直线的齐次线坐标。

因为无穷远直线的点坐标方程是 $x_3=0$，它可以写成

$$0x_1+0x_2+x_3=0$$

因此，规定(0, 0, 1)是无穷远直线的齐次线坐标. 同理，(1, 0, 0)和(0, 1, 0)分别是y轴和x轴的齐次线坐标。

2　一点的齐次线坐标方程

定义　一已知点的齐次线坐标方程是以(u_1, u_2, u_3)为流动坐标所构成的方程，此式能够且仅能够被通过该点的直线的线坐标所满足。

根据定义，一点$A=(a_1, a_2, a_3)$的线坐标方程为

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0 \qquad (5.3)$$

反过来，以流动坐标u_1、u_2、u_3所组成的一次方程

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0$$

必表示一个点，其点坐标为(a_1, a_2, a_3)。

例如，直线 $3x_1+2x_2-3x_3=0$的齐次线坐标为$(3, 2, -3)$。一点$(3, 2, -3)$的线坐标方程为

$$3u_1+2u_2-3u_3=0$$

其中 u_1,u_2,u_3是流动坐标.

例 1 求点$A=(a_1,a_2,a_3)$和 $B=(b_1,b_2,b_3)$连线的线坐标.

解 过两点 A、B 的直线方程为

$$|X,A,B|=0$$

其中 $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$. 也就是

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} x_2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3=0$$

所以其线坐标为

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

或写成 $u=A\times B$.

例 2 求连结一点$(1,2,-1)$与二直线$(2,1,3)$和$(1,-1,0)$交点的直线.

解 直线$(2,1,3)$及$(1,-1,0)$的点坐标方程分别为

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$$

解方程组求出交点的点坐标为$(1,1,-1)$.

然后求出两点$(1,2,-1)$与$(1,1,-1)$所连结的直线方程为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0, \text{ 即 } x_1+x_3=0$$

其线坐标为$(1,0,1)$.

例 3 求方向是λ的直线上无穷远点的线坐标方程.

解 方向系数是λ的直线上，其无穷远点的齐次点坐标为$(1,\lambda,0)$. 因此，这个点的齐次线坐标方程是

$$u_1+\lambda u_2=0$$

当 $u_3\neq 0$时，即不取过原点O且方向系数是λ的直线作流动直线，则这一点的非齐次线坐标方程是

$$u+\lambda v=0$$

1·4 复射影平面

在射影平面上引入复元素后，就扩充成为复射影平面。在这个平面上不仅消除了有穷和无穷的差别（这是因为引入无穷远元素和齐次坐标），而且也消除了虚与实的差别。例如，当我们求直线与二次曲线的交点时，代数上用消元法解出单一变数的二次方程。这个方程若有两个不等实根，便标志直线与二次曲线相交；有等根时，便标志直线切于曲线；无实根（即有两个共轭虚根）时，便标志两者无公共点。

1 复点、复直线

定义 设有一对有序复数

$$x=x'+ix'',\ y=y'+iy''$$

如果 x 和 y 都是实数，则称 (x,y) 为实点的坐标。若 x 和 y 中至少有一个是虚数，则称 (x,y) 为虚点的坐标。实点与虚点统称复点。同样可以引进复点的齐次坐标，即如果

$$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3},\qquad x_3\neq 0$$

则称 (x_1,x_2,x_3) 为一复点的齐次坐标。

运用非齐次坐标表示点时，坐标为虚数，该点就是虚点，运用齐次坐标表示一点时，重要的不是这些坐标本身，而是它们相互的比值，因此，当坐标为虚数时，仍可表示实点。例如 $(2i,0,4i)$ 和 $(2-2i,0,4-4i)$，前者用 $2i$ 除，后者用 $2-2i$ 除都可简化成 $(1,0,2)$，它们表示同一个实点。因此，用齐次坐标来表示点，应当看 x_1、x_2、x_3 的比值

$$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3},\ x_3\neq 0$$

是实数还是虚数来确定该点是实点还是虚点。

若 $x_3=0$，则 $(x_1,x_2,0)$ 为一无穷远复点，其虚实性取决于前两个坐标 x_1 和 x_2 之比是虚还是实。

类似地，可以用线坐标来定义复直线。

定义 设有一对有序复数

$$u=u'+iu'',\quad v=v'+iv''$$

如果 u 和 v 都是实数，则称 (u,v) **为一实直线**

$$ux+vy+1=0$$

的非齐次线坐标．若 u 和 v 至少有一个是虚数，则称 (u,v) **为形如(1)式的虚直线的非齐次线坐标**．实直线和虚直线统称**复直线**．用齐次线坐标表示复直线时，规定 (u_1,u_2,u_3) 为直线

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

的线坐标，其虚实性由比值

$$u=\frac{u_1}{u_3},\quad v=\frac{u_2}{u_3},\qquad u_3\neq 0$$

中 u 和 v 至少有一为虚数或全为实数来决定．

引进了复点和复直线的射影平面称为**复射影平面**．在复射影平面上，虚元素和实元素处于同等的地位．

同样可以在复射影平面上建立直线的线坐标和点的线坐标方程．

例 1 求直线$(2,i,3-4i)$上的实点．

解 根据线坐标的定义，这一直线的点坐标方程是

$$2x_1+ix_2+(3-4i)x_3=0 \tag{1}$$

设其上实点为(a_1,a_2,a_3)，则它满足方程(1)，有

$$2a_1+ia_2+(3-4i)a_3=0$$

即
$$2a_1+3a_3+(a_2-4a_3)i=0$$

因此
$$\begin{cases}2a_1+3a_3=0\\ a_2-4a_3=0\end{cases}$$

解之，令 $a_3=2$，则$a_2=8$，$a_1=-3$．所求的实点为$(-3,8,2)$．

例 2 求过点$(1,-i,0)$的实直线．

解 根据定义，这一点的线坐标方程为

$$u_1-iu_2=0$$

过该点的实直线坐标应为 $(0,0,u_3)$，化成点坐标方程即为

$x_3=0$。

2　共轭复元素

定义　如果(a_1, a_2, a_3)为一点（或直线）的齐次坐标，$(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$为另一点（或直线）的齐次坐标，而$\overline{a_1}$、$\overline{a_2}$、$\overline{a_3}$分别是$a_1$、$a_2$、$a_3$的共轭复数，则此二点（或直线）叫做**共轭复点**（或直线）。

共轭元素之间有下面的关系：

定理5.2　若复点x在复直线u上，则x的共轭复点$\overline{x}$也在u的共轭复直线$\overline{u}$上。

证明　由于假设点x与直线u结合，即$u \cdot x=0$或

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

两端取共轭复数，则

$$\overline{u_1x_1}+\overline{u_2x_2}+\overline{u_3x_3}=0$$

即
$$\overline{u_1}\cdot\overline{x_1}+\overline{u_2}\cdot\overline{x_2}+\overline{u_3}\cdot\overline{x_3}=0$$

此式表明点$\overline{x}$在直线$\overline{u}$上。

定理5·3　一对共轭复点的连线是实直线。

证明　设A和$\overline{A}$是一对共轭复点，且其连线为u。根据定理5·2，因为点A在直线u上，则点A的共轭复点$\overline{A}$必在u的共轭复直线$\overline{u}$上。又因为$\overline{A}$在直线u上，又得出点$\overline{A}$的共轭复点A在直线$\overline{u}$上，可见直线$\overline{u}$与直线u是同一条直线。一条复直线与它的共轭复直线重合时，必是一条实直线；因为两直线u和$\overline{u}$重合，它们的齐次坐标成比例，即

$$\frac{u_1}{\overline{u_1}}=\frac{u_2}{\overline{u_2}}=\frac{u_3}{\overline{u_3}}$$

由此推出

$$\frac{u_1}{u_3}=\frac{\overline{u_1}}{\overline{u_3}}=\overline{\left(\frac{u_1}{u_3}\right)},\quad \frac{u_2}{u_3}=\frac{\overline{u_2}}{\overline{u_3}}=\overline{\left(\frac{u_2}{u_3}\right)}$$

当一复数等于其共轭复数时，必为实数，所以直线 u 的非齐次坐标 $\frac{u_1}{u_3}$ 和 $\frac{u_2}{u_3}$ 为实数，即 u 是实直线。

例 3 求连结两共轭点 $(1+i, 2-i, 1)$，$(1-i, 2+i, 1)$ 的直线方程。

解 所求方程为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1+i & 2-i & 1 \\ 1-i & 2+i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

即 $$x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

这是一条实直线。

定理5.4 在一条虚直线上仅有一个实点，过一虚点仅有一条实直线。

证明 因为一条虚直线上的实点即为此直线与其共轭虚直线的交点，而每一条虚直线都有一条共轭直线，所以实点是存在的。假如此虚直线上还有另一个实点，则两实点连结的直线为实直线，这与已知矛盾，所以每一条虚直线上仅有一个实点。

每一个虚点必有一个共轭虚点，这两点连线为一实直线，它通过已知虚点。假设过这个虚点有两条实直线，则它们的交点为一实点，这与已知点是虚点矛盾。

1.5 射影平面上的对偶原则

对偶原则是射影几何里所具有的重要原理和方法。

1 对偶图形

定义 "点"与"直线"叫做平面上的对偶元素。

定义 "过一点作一直线"与"在一直线上取一点"叫做对偶运算。

根据定义，"过一点作两直线"与"在一直线上取两点"

或"两直线交于一点"与"两点连结一直线"等都是对偶运算.

定义 设有点、直线所组成的一个图形，将此图形中的各元素改为它的对偶元素，各运算改为它的对偶运算，其结果则得到另一图形，把这两个图形叫做**对偶图形**.

下面举一些对偶图形的例子.

在射影几何里，所有的几何图形都是由所谓基本形构成的，这些基本形按它们所含元素的所在范围不同分为以下几种：

（1）点列——属于一条直线 s 的所有点 A、B、C、……的集合，直线 s 叫做**点列的底**. 点列用下面的记号表示：

$s(A, B, C, \cdots\cdots)$

（2）线束——一个平面上属于一个点 S 的所有直线 a、b、c、……的集合，点 S 叫做**线束的中心**. 线束用下面的记号表示：

$S(a, b, c, \cdots\cdots)$

（3）点场——属于一个平面 ω 的所有点 A、B、C、……的集合，平面 ω 叫做**点场的底**. 点场表示为：

$\omega(A, B, C, \cdots\cdots)$

（4）线场——属于一个平面 ω 的所有直线 a、b、c、……的集合，平面 ω 叫做**线场的底**. 线场表示为：

$\omega(a, b, c, \cdots\cdots)$

点列与线束叫做**一维基本形**，点场与线场叫做**二维基本形**.

根据对偶图形的定义可知，（1）与（2），（3）与（4）是对偶图形.

由点和直线组成的图形叫做**平面形**，平面形有"简单"和"完全"之分. 其定义如下：

简单平面形（左右是对偶的）

由 n 个无三个共线的点及它们两两依次的连线所成的平面形叫做简单 n 点形（n 角形）．这 n 个点叫做顶点，n 条连线叫做边．

由 n 条无三条共点的直线及它们两两依次的交点所成的平面形叫做简单 n 线形（n 边形）．这 n 条直线叫做边，n 个交点叫做顶点．

完全平面形

由 n 个无三个共线的点及它们所有两个点的连线所成的平面形叫做完全 n 点形．这 n 个点叫做顶点，$\frac{n(n-1)}{2}$ 条直线叫做边．

由 n 条无三条共点的直线及它们所有两条直线的交点所成的平面形叫做完全 n 线形．这 n 条直线叫做边，$\frac{n(n-1)}{2}$ 个交点叫做顶点．

图5．14是简单三点形和简单三线形，它们与完全三点形和完全三线形的形状完全相同．

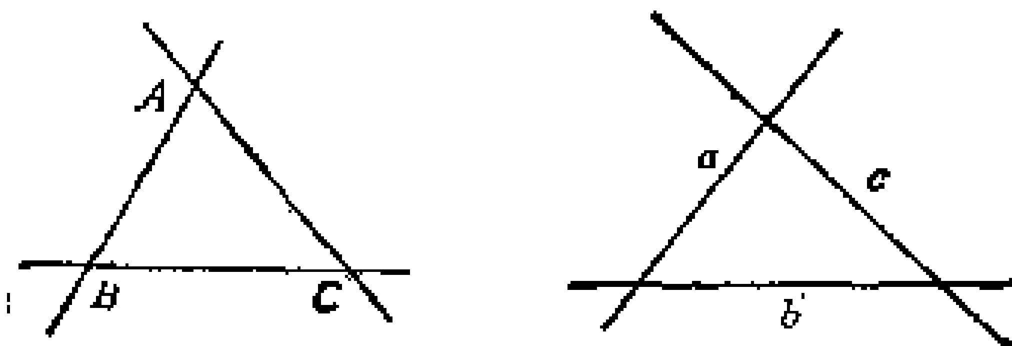


图5．14

图5．15是简单四点形 $ABCD$ 与简单四线形 $abcd$，图形上的各名称是：

四个顶点：A、B、C、D．

四条边：AB、BC、CD、DA．

连线 AC、BD 叫做对顶线（或对角线）．

四条边：a、b、c、d．

四个顶点：(ab)、(bc)、(cd)、(da)．

交点 (ac)、(bd) 叫做对边点〔(ab)表示 a 与 b 的交点〕．

图5．16是完全四点形$ABCD$ 和完全四线形 $abcd$．图形上各名称是：

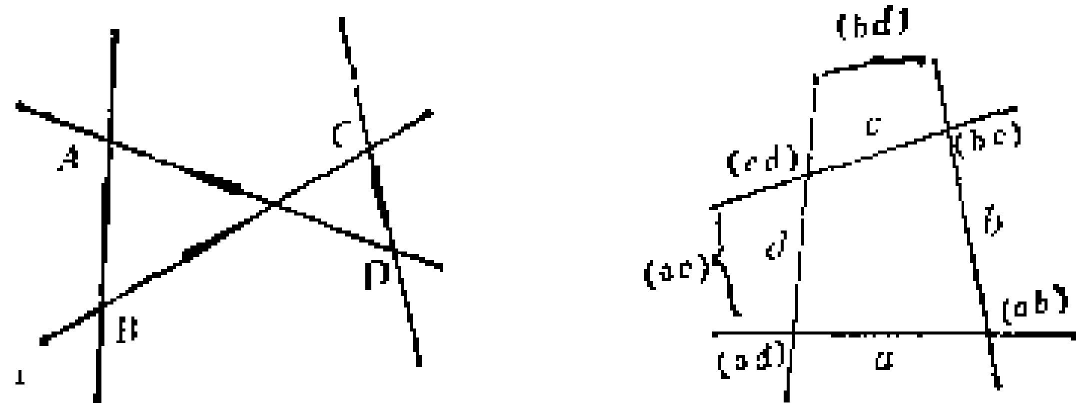


图5.15

四个顶点：A、B、C、D。

六条边：AB、AC、AD、BC、BD、CD。

没有公共顶点的两条边叫做对边，有三对：AB与CD、AD与BC、AC与BD。

三对对边的交点叫做对边点。有三个：L、M、N。LMN是对边三点形。

对边点的连线叫做对角线。有三条：LM、MN、NL。

四条边：a、b、c、d。

六个顶点：(ab)、(ac)、(ad)、(bc)、(bd)、(cd)。

没有公共边的两个顶点叫做对顶点，有三对：(ab)与(cd)、(ad)与(bc)、(ac)与(bd)。

三对对顶点的连线叫做对顶线。有三条：l、m、n。lmn是对顶三线形。

对顶线的交点叫做对角点。有三个：(lm)、(mn)、(nl)。

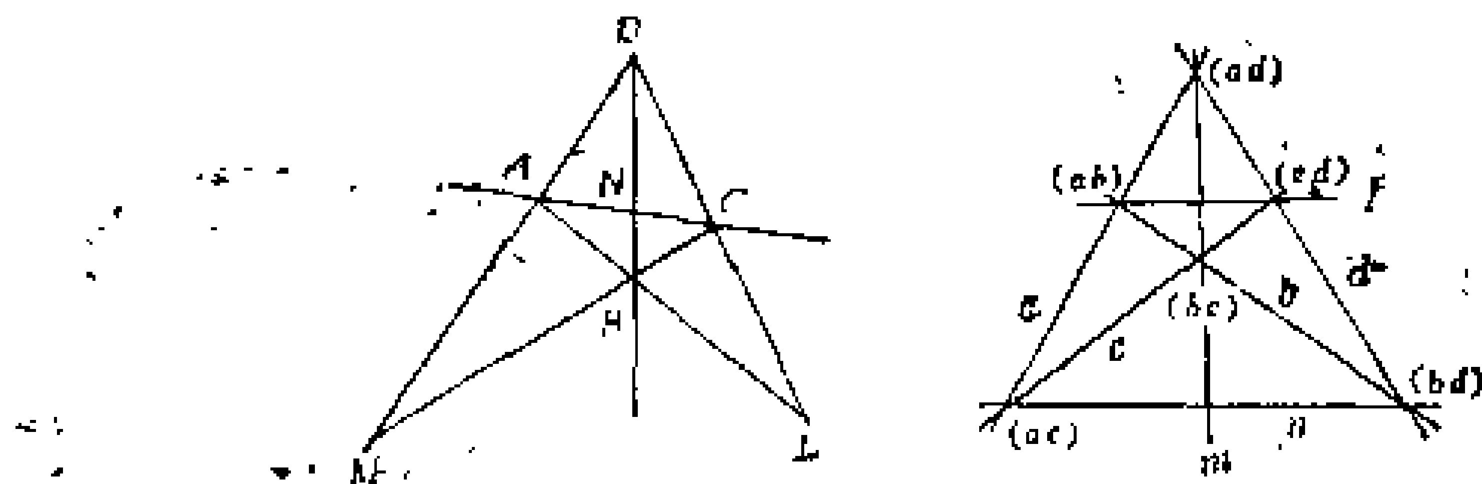


图5.16

.2 对偶命题

定义 设由点、直线所构成的一个命题，如果命题中的各元素改为它的对偶元素，各运算改为它的对偶运算，结果形成

另一个命题，则这两个命题叫做对偶命题。

例如命题：

“两点连结唯一直线。”

“两直线交于唯一点。”

是对偶命题。

我们在第四章§3中讲过的笛沙格定理和它的逆定理也是对偶的命题，在射影几何里可以写成：

笛沙格第一定理 如果两个三点形ABC和$A'B'C'$的对应顶点连线AA'、BB'、CC'共点，则它们的对应边BC和$B'C'$，CA和$C'A'$、AB和$A'B'$的交点共线。

其对偶定理为：

笛沙格第二定理 如果两个三线形abc和$a'b'c'$的对应边交点(aa')、(bb')、(cc')共线，则它们的对应顶点(bc)和$(b'c')$，(ca)和$(c'a')$，(ab)和$(a'b')$的连线共点。

笛沙格定理在研究射影对应的问题上有重要的应用，这个定理在二维空间里，只用纯射影方法（不涉及度量关系）是不能证明的，因而在平面射影几何里常把它列入公理系统之中。

在射影几何里，对偶命题是非常多的，今后将不断地提出来。

3 对偶原理

在射影几何中，下述的重要定理成立。

平面射影几何的对偶原理：在平面上由点和直线组成的命题，必对应一个与它对偶的命题，而且这两个对偶命题中的一个成立，则另一个也成立。

上面举出的两组对偶命题就说明了这一事实．这一原理使许多问题的研究简单化了，因为我们只要研究对偶命题的一面，另一面也就迎刃而解了．例如研究了点几何的一些内容也就明白了和它对偶的线几何的内容，这就是射影几何方法上的一大优点。

顺便提一下三维空间的对偶关系，在三维空间里对偶元素是：

点⟷平面

直线⟷直线

这就是说，它与二维空间的对偶关系有很大的不同，应当特别注意。

4　点和直线间的代数对偶

由于我们引进了点坐标和线坐标，使直线在点坐标下有方程，点在线坐标下也有方程，从而体现了它们的对偶关系在代数上的对偶形式，这给解决对偶问题带来许多方便。下面举出一些重要的代数对偶的例子。

点坐标 (x_1, x_2, x_3)。

点坐标的一次方程 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ 表示一条直线，其坐标为 (u_1, u_2, u_3)。

点 A、B 所决定的直线方程为

$$|X, A, B|=0$$

其坐标为 $A\times B$。

三点 $A(a_1, a_2, a_3)$，$B(b_1, b_2, b_3)$，$C(c_1, c_2, c_3)$ 共线的条件为

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

即 $|A, B, C|=0$。或存在不都为零的三数 l、m、n 使

$$lA+mB+nc=0$$

线坐标 (u_1, u_2, u_3)。

线坐标的一次方程 $x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0$ 表示一个点，其坐标为 (x_1, x_2, x_3)。

直线 a、b 的交点方程为

$$|u, a, b|=0$$

其坐标为 $a\times b$。

三直线 $a(a_1, a_2, a_3)$，$b(b_1, b_2, b_3)$，$c(c_1, c_2, c_3)$ 共点的条件为

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

即 $|a, b, c|=0$。或存在不都为零的三数 l、m、n 使

$$la+mb+nc=0$$

例　写出命题"设 A、B、C 三点在一直线 m 上，A'、B'、C'

三点在另一直线n上，则交点$BC'\times B'C$，$CA'\times C'A$，$AB'\times A'B$共线于 s”的对偶命题，并画出对偶图形。

解 对偶命题为："设a、b、c三直线通过一点M，a'、b'、c'三直线通过另一点N，则连线$(bc')\times(b'c)$，$(ca')\times(c'a)$，$(ab')\times(a'b)$共点于S”。

它们的对偶图形如图5·17和图5·18。

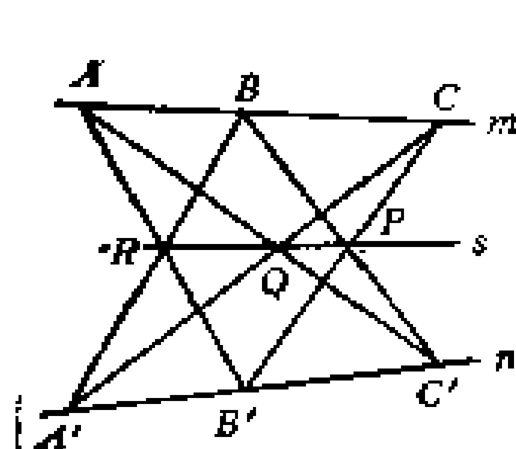


图5.17

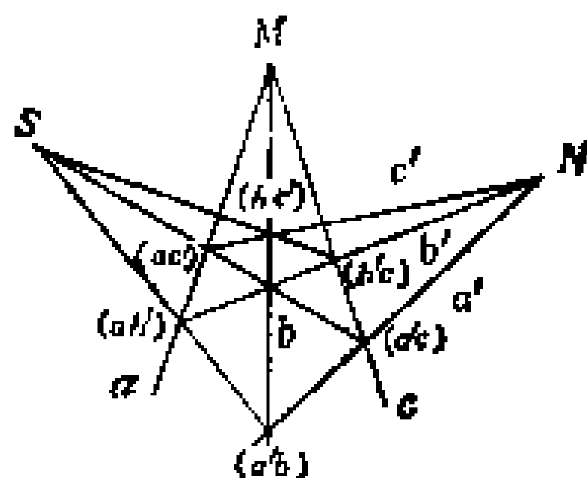


图5.18

§ 2 点列及线束的交比和调和比·完全四点形的调和性

首先在欧氏几何的基础上建立交比的概念及其简单的性质，然后讨论图形的调和性。交比是射影变换下的基本不变量，应给以特别重视。

2·1 同一直线上四点的交比和调和比

简单比是仿射变换的基本不变量，但对中心射影来说简单比不再是不变量。例如，线段的中点在中心射影下不再是对应线段的中点，如图5.19所示。因此

$$(ABM)\neq(A'B'M').$$

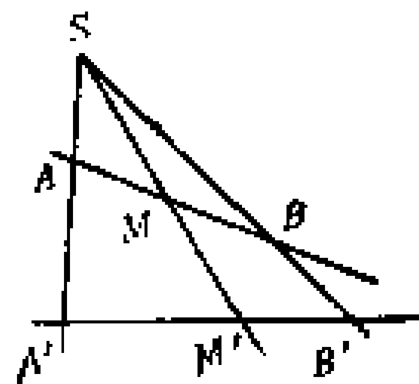


图5.19

在中心射影下的不变量是四点的交比。

1 交比的定义及简单性质

定义 设直线上四个点A、B、C、D，把简单比(ABC)和

(ABD) 的比叫做这四点的交比。用下面记号表示：

$$(AB,CD)=\frac{(ABC)}{(ABD)} \qquad (5\cdot4)$$

点 A、B 叫做交比的基础点对，点 C、D 叫做分点对。

进一步计算就可得出下面的公式：

$$(AB,CD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}=\frac{\dfrac{AC}{BC}}{\dfrac{AD}{BD}}=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$$

四个点 A、B、C、D 的交比有下面的性质：

（1）基础点对与分点对交换，交比的值不变，即

$$(AB,CD)=(CD,AB)$$

事实上，

$$(CD,\ AB)=\frac{(CDA)}{(CDB)}=\frac{CA\cdot DB}{DA\cdot CB}=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$$

$$=\frac{(ABC)}{(ABD)}=(AB,CD)$$

（2）基础点对的两个字母，或分点对的两个字母交换，交比的值为原交比值的倒数：

$$(BA,CD)=(AB,DC)=\frac{1}{(AB,CD)}$$

事实上，

$$(AB,DC)=\frac{(ABD)}{(ABC)}=\frac{1}{\dfrac{(ABC)}{(ABD)}}=\frac{1}{(AB,CD)}$$

（3）同时交换两对点对的字母，交比值不变。

事实上，

$$(BA,DC)=(DC,BA)=\frac{1}{(DC,AB)}=\frac{1}{(AB,DC)}$$

$$=(AB,CD)$$

（4）交换中间的两个字母，或两端的两个字母，交比的

值等于1减原有交比的值：

$$(AC, BD)=(DB, CA)=1-(AB, CD)$$

事实上，

$$(AC, BD)=\frac{AB\cdot CD}{CB\cdot AD}=\frac{(AC+CB)(CB+BD)}{AD\cdot CB}$$

$$=\frac{AC\cdot BD+CB(AC+CB+BD)}{AD\cdot CB}$$

$$=\frac{BC\cdot AD}{BC\cdot AD}-\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}$$

$$=1-(AB, CD)$$

再根据性质（1）、（2），则得到：

$$(DB, CA)=(CA, DB)=(AC, BD)=1-(AB, CD)$$

设交比 $(AB, CD)=r$，简记作$(12, 34)=r$，则根据上述四个性质可以推出以下六类24个交比：

$$r=(12, 34)=(34, 12)=(21, 43)=(43, 21)$$

$$\frac{1}{r}=(21, 34)=(34, 21)=(12, 43)=(43, 12)$$

$$1-r=(13, 24)=(24, 13)=(31, 42)=(42, 31)$$

$$\frac{1}{1-r}=(13, 42)=(42, 13)=(31, 24)=(24, 31)$$

$$1-\frac{1}{r}=(14, 23)=(23, 14)=(41, 32)=(32, 41)$$

$$\frac{r}{r-1}=(41, 23)=(23, 41)=(14, 32)=(32, 14)$$

2　交比的代数表示

我们先来看一看简单比和分点的关系。

已知基础点对 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$和分点 $P(x, y)$，简单比$(P_1P_2P)=\lambda$，则由定比分点公式可知：

$$x=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda},\quad y=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda} \qquad (1)$$

由（1）式知点P的齐次坐标是$(x_1-\lambda x_2, y_1-\lambda y_2, 1-\lambda)$，

当$\lambda=1$时，则$(x_1-x_2, y_1-y_2, 0)$是直线P_1P_2上的无穷远点。由此推出

$$(P_1P_2P_\infty)=1$$

用齐次坐标来表示简单比时有下面的定理：

定理5·5 已知基础点对$A=(a_1, a_2, a_3)$和$B=(b_1, b_2, b_3)$是不同的有穷远点，分点是 $C=A+\mu B$，且$(ABC)=\lambda$，则

$$(ABC)=\lambda=-\mu\frac{b_3}{a_3} \qquad (5·5)$$

证明 （1）若点$A+\mu B$是点A、B所在直线的有穷远点，则λ可由（1）式来确定：

设三点的非齐次坐标为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x, y)$，则有

$$x_1=\frac{a_1}{a_3}, \quad y_1=\frac{a_2}{a_3}$$

$$x_2=\frac{b_1}{b_3}, \quad y_2=\frac{b_2}{b_3}$$

及

$$x=\frac{a_1+\mu b_1}{a_3+\mu b_3}, \quad y=\frac{a_2+\mu b_2}{a_3+\mu b_3}$$

再代入（1）式即得：

$$(a_3b_1-a_1b_3)(a_3\lambda+\mu b_3)=0$$

$$(a_3b_2-a_2b_3)(a_3\lambda+\mu b_3)=0$$

若 $a_3b_1-a_1b_3$ 和$a_3b_2-a_2b_3$都等于零，则

$$\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_3}{b_3}=\frac{a_2}{b_2}$$

这时，点(x_1, y_1)与点(x_2, y_2)必重合，与已知矛盾，所以只能有

$$a_3\lambda+\mu b_3=0$$

即

$$(ABC)=\lambda=-\mu\frac{b_3}{a_3}$$

（2）若$A+\mu B$为直线 AB 上的无穷远点，则

$$a_3+\mu b_3=0$$

即

$$1+\mu\frac{b_3}{a_3}=0$$

故有

$$-\mu\frac{b_3}{a_3}=1=(ABC)=\lambda$$

现在我们讨论交比的代数表示。

定理5·6 已知 A、B、C、D 是同一直线上的四个不同点，其坐标分别是$A(a_1,a_2,a_3)$、$B(b_1,b_2,b_3)$，$A+\lambda_1 B$，$A+\lambda_2 B$，其中 A、B 是有穷点，则

$$(AB,CD)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ ,\quad [\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0] \qquad (5\cdot 6)$$

证明 由（5·5）式得

$$(ABC)=-\lambda_1\frac{b_3}{a_3}$$

$$(ABD)=-\lambda_2\frac{b_3}{a_3}$$

因为四点不同，λ_1与λ_2不能相等或等于零，即 $\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$，所以得出：

$$(AB,CD)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

由定理5·6还可推出下面更一般的定理：

定理5·7 已知 P_1、P_2、P_3、P_4 为共线的不同四点，其坐标分别为$A+\lambda_1 B$，$A+\lambda_2 B$，$A+\lambda_3 B$，$A+\lambda_4 B$，（A、B 是直线上任意二点）则

$$(P_1P_2,P_3P_4)=\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)} \qquad (5\cdot 7)$$

注意：若共线四点A、B、C、D中C、D之一是无穷远点，则

可直接用(5·6)式来求交比或应用$(ABD_\infty)=1$，可知

$$(AB,CD_\infty)=\frac{(ABC)}{(ABD_\infty)}=(ABC)$$

若共线四点中有两点为无穷远点，则四点都是无穷远点，就以(5·6)式作为这四点交比的定义。

例1　已知$A(1,2,3)$、$B(5,-1,2)$、$C(11,0,7)$、$D(6,1,5)$是共线的四点，求(ABC)，(ABD)和(AB,CD)。

解　因为C、D在直线AB上，所以应有

$$C=A+\lambda_1 B,\quad D=A+\lambda_2 B$$

由$11=1+\lambda_1\cdot 5$得$\lambda_1=2$，而且恰好使得$0=2+2\cdot(-1)$，$7=3+2\times 2$，所以

$$C=A+2B$$

同样可求出

$$D=A+B$$

因此

$$(ABC)=-2\cdot\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$$

$$(ABD)=-\frac{2}{3}$$

$$(AB,CD)=\frac{2}{1}=2$$

定理5·8　如果已知直线上四个不同点中的三个点及这四点的交比($\neq 0,1$)，则第四点必将唯一存在。

证明　设四点中三个已知点的坐标分别是

$$a+\lambda_1 b,\quad a+\lambda_2 b,\quad a+\lambda_3 b$$

四个点的交比为λ，则由(5·7)式可知

$$\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_4)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_1)}=\lambda$$

求出λ_4，则第四点为$a+\lambda_4 b$，且是唯一的。

3　**四点的调和比**

定义　如果同一直线上的四点满足$(AB,CD)=-1$，则称

点对C、D调和分隔点对A、B；或称点对A、B与点对C、D调和共轭．其中点D称为点A、B、C的第四调和点．交比-1称为调和比。

根据交比的性质，如果$(AB,CD)=-1$，则

$$(DB,CA)=1-(AB,CD)=2$$

$$(DB,AC)=\frac{1}{(DB,CA)}=\frac{1}{2}$$

因此，当四个点的交比等于2或$\frac{1}{2}$时，只要适当改变点的顺序，就能使其中两点调和分隔其它两点。

定理5·9 如果点C是线段AB的中点，则A、B、C的第四调和点是无穷远点．反过来，成调和共轭的四点中，有一点为无穷远点，则A、B、D_∞的第四调和点C是AB的中点。

事实上，

$$(AB,D_\infty C)=(AB,CD_\infty)=(ABC)=-1$$

所以C是AB的中点。

例2 求证 共线四点$P_1(3,1)$，$P_2(7,5)$与$Q_1(6,4)$，$Q_2(9,7)$成调和共轭。

解 因为

$$(P_1P_2,Q_1Q_2)=\frac{P_1Q_1}{P_2Q_1}\Big/\frac{P_1Q_2}{P_2Q_2}$$

$$\frac{P_1Q_1}{P_2Q_1}=\frac{6-3}{6-7}=-3,\quad \frac{P_1Q_2}{P_2Q_2}=\frac{9-3}{9-7}=3$$

所以$(P_1P_2,Q_1Q_2)=-1$。

例3 设点P_1、P_2、P_4的齐次坐标分别为$(1,1,1)$、$(1,-1,1)$、$(1,0,1)$，且$(P_1P_2,P_3P_4)=2$，求点P_3的坐标。

解 P_1、P_2、P_4的非齐次坐标为$(1,1)$、$(1,-1)$、$(1,0)$，它们在直线$x=1$上．设P_3的坐标为(x_3,y_3)，则

$$(P_1P_2,P_3P_4)=\frac{P_1P_3\cdot P_2P_4}{P_2P_3\cdot P_1P_4}=\frac{(y_3-1)(0+1)}{(y_3+1)(0-1)}=2$$

即 $(y_3-1)=-2(y_3+1)$， $y_3=-\dfrac{1}{3}$。

又因为点P_3在$x=1$上，所以$x_3=1$。因此所求点 P_3 的非齐次坐标为$\left(1,\ -\dfrac{1}{3}\right)$，而齐次坐标为$(3,-1,3)$。

2·2 线束里四直线的交比和调和比

线束中四直线的交比问题与点列中四点的交比问题是对偶的。

1 线束中三条直线的简单比

与点列里四点的交比类似，我们可以定义线束里四条直线的交比，为此首先说明共点的三条直线的简单比。

设a、b、c 是一个线束 S 中的三条直线（图5·20），过顶点S任意作一直线 u，我们规定，二直线 a 与 b 所构成的$\angle(a,b)$ 是它们所构成的两个角中不含直线 u 的一个。这样，明确了角的唯一性，再规定依边的顺序与逆时针的方向或顺时针的方向一致时，而附以符号（+）或（－）。例如在图5·20里，$\angle(a,b)$ 是正的，而 $\angle(b,a)$是负的。

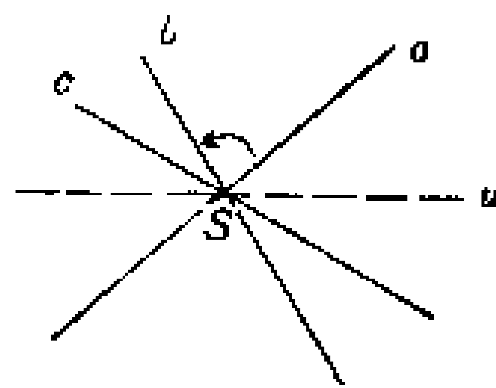


图5·20

定义 如果 a、b、c 是线束 S 的三条直线，则

$$(abc)=\sin(\widehat{a,c})/\sin(\widehat{b,c})$$

叫做a、b、c三条直线的简单比。其中$(\widehat{a,c})$，$(\widehat{b,c})$ 分别表示直线a、b和直线 c 所构成的角。

如果固定二直线 a 与 b，则线束 S 里每一条直线 c 对应一个简单比(abc)；反之，每个简单比(abc) 对应线束里一条直线 c。

不难看出，如果直线 c 在$\angle(aub)$里，则简单比(abc)有正值；如果直线 c 在$\angle(a、b)$里，则简单比(abc) 有负值。特别是当m是$\angle(a、b)$的平分线时，简单比 $(abm)=-1$。

2　线束中四条直线的交比

类似于点列里四点的交比，利用三条直线的简单比可以定义线束里四条直线的交比。

定义　设a、b、c、d是四条共点的直线，则

$$(ab,cd)=\frac{(abc)}{(abd)}=\frac{\sin(\widehat{a,c})\sin(\widehat{b,d})}{\sin(\widehat{b,c})\sin(\widehat{a,d})} \qquad (5\cdot 8)$$

叫做a、b、c、d的交比，其中直线对a、b叫做交比的基础直线对，而直线对c、d叫做分直线对。

应该注意，四条直线的交比值与直线u的取法无关。事实上，四条直线的交比是用角的正弦表示的，把这些角换为它的邻补角，正弦的绝对值不变，因而交比的绝对值也不变。至于交比的符号，虽然依赖于简单比(abc)和(abd)的符号，但如果c、d 属于同一个角（含直线u或不含直线u的角），则这两个简单比的符号相同；如果属于不同的角，则它们的符号相反。由此得到结论：

如果第二个直线对c、d不分隔第一个直线对a、b，则交比值$(ab、cd)$是正的，反之则为负的。

3　线束的交比与点列的交比之间的关系

定理5·10　如果线束里四条直线a、b、c、d被任意一条直线s截得四个点A、B、C、D，则

$$(AB,CD)=(ab、cd)$$

证明　用$\overline{a}$、$\overline{b}$、$\overline{c}$、$\overline{d}$表示线段SA、SB、SC、SD的长度，用h表示自点S向直线s所作的垂线SH的长度（图5·21）。

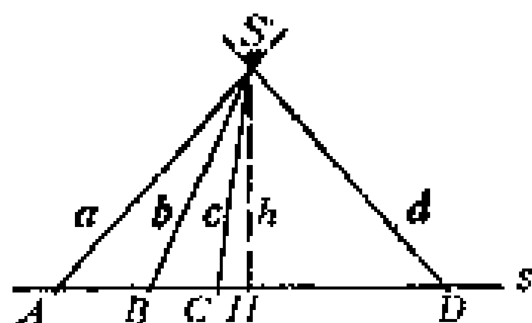


图5·21

则三角形ABS的面积可表示为

$$2\triangle ABS=AB\cdot h=\overline{a}\cdot\overline{b}\ \sin(\widehat{a,b})$$

因此

$$AB = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{h}\sin(\widehat{a,b})$$

利用这个公式，则得：

$$(AB,CD) = \frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$$

$$= \frac{\overline{a}\cdot\overline{c}\sin(\widehat{a,c})\cdot\overline{b}\cdot\overline{d}\sin(\widehat{b,d})}{\overline{b}\cdot\overline{c}\sin(\widehat{b,c})\cdot\overline{a}\cdot\overline{d}\sin(\widehat{a,d})}$$

$$= \frac{\sin(\widehat{a,c})\cdot\sin(\widehat{b,d})}{\sin(\widehat{b,c})\cdot\sin(\widehat{a,d})} = (ab,cd)$$

根据定理5·10，线束中四条直线a、b、c、d的交比可以定义为用直线 s 截出四个对应点 A、B、C、D的交比. 即定义$(ab、cd)$为（AB、CD）的值. 因为直线 s 是任意取的，而截出的四点总满足

$$(AB,CD) = \frac{\sin(\widehat{a,c})\cdot\sin(\widehat{b,d})}{\sin(\widehat{b,c})\cdot\sin(\widehat{a,d})}$$

所以必有：

定理5·11 如果线束中四条直线a、b、c、d被直线 s 和 s' 截得A、B、C、D点和A'、B'、C'、D'点，则

$$(AB,CD) = (A'B',C'D')$$

由定理5·10还可以导出与点列交比的四个性质成对偶的关于线束交比的四个性质，因此也可以推出四条共点直线可能构成的六类24个交比.

定义 当直线 a、b、c、d满足 $(ab,cd) = -1$时，则称直线对c，d调和分隔直线对a、b，或称直线对a、b与c、d 调和共轭，称直线 d 为三直线a、b、c的第四调和直线，称交比值-1为调和比.

从定理5·11可以看出，不通过线束中心的两条直线截同一线束时，如果同一直线上的两个截点看作是对应点，则所得对应

四点的交比相等（图5·22），即

$$(AB, CD) = (A'B', C'D')$$

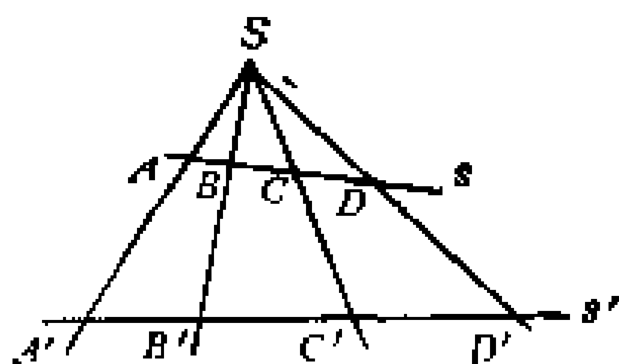


图5·22

对偶地，顶点不在点列底上的两个线束投射到这一点列上，如果投射到同一点的两条直线看作是对应直线，则所得对应四条直线的交比相等（图5·23），即

$$(ab, cd) = (a'b', c'd')$$

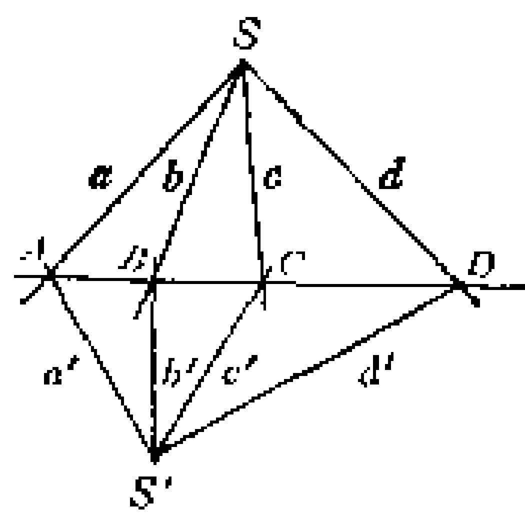


图5·23

定理5·12 交比是中心射影下的不变量。

4 代数表示

关于共点四直线交比的代数表示与共线四点的交比类似，我们只写出结果，证明从略。

定理5·13 设 a、b、$a+\lambda_1 b$、$a+\lambda_2 b$ 是四条有穷的不同的共点线l_1、l_2、l_3、l_4的齐次坐标，则

$$(l_1 l_2, l_3 l_4) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{5·9}$$

这里 $\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$。

推论 设$a+\lambda_1 b$、$a+\lambda_2 b$、$a+\lambda_3 b$、$a+\lambda_4 b$是四条有穷的不同的共点线 l_1、l_2、l_3、l_4的齐次坐标，则

$$(l_1 l_2, l_3 l_4) = \frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)} \tag{5·10}$$

若四条直线 l_1、l_2、l_3、l_4 中 l_1 或 l_2，有一条是无穷远直线，其交比可用（5·10）式求出。

例1 求证一角的两条夹边和这个角的内外角平分线成调和

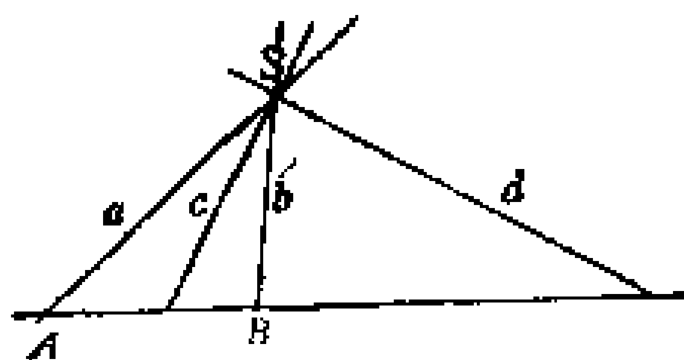


图5·24

共轭。

解 如图5·24，角的两边为a、b，其内外角平分线分别为c、d，则

$$(ab,cd)=\frac{\sin(\widehat{a,c})}{\sin(\widehat{b,c})}\Big/\frac{\sin(\widehat{a,d})}{\sin(\widehat{b,d})}$$

但
$$\frac{\sin(\widehat{a,c})}{\sin(\widehat{b,c})}=-1$$

$$\frac{\sin(\widehat{a,d})}{\sin(\widehat{b,d})}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+(\widehat{a,c})\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\widehat{c,b})\right)}=\frac{\cos(\widehat{a,c})}{\cos(\widehat{c,b})}=1$$

所以

$$(ab,cd)=-1/1=-1$$

另法：取直线a、b为仿射坐标轴（图5·25），则四条直线的方程为

a：$y=0$

b：$x=0$

c：$x-y=0$

d：$x+y=0$

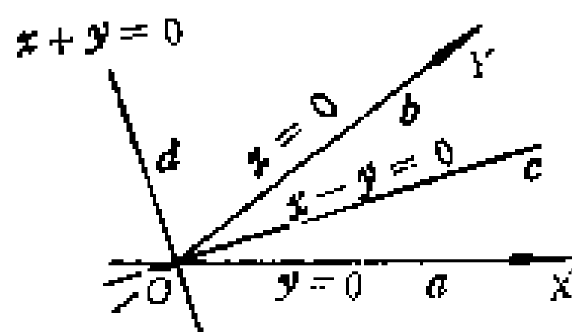


图5·25

又由于 $c=a+(-1)b,\lambda_1=-1$

$d=a+b,\ \ \lambda_2=1$

所以

$$(ab,cd)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=-1$$

例2 设P_1、P_2分别为坐标轴上的无穷远点，P_3是过原点O且方向系数为1的直线上的无穷远点，又知

$$(P_1P_2,P_3P_4)=k$$

求P_4点的坐标。

解 根据已知P_1、P_2、P_3分别是直线

l_1: $x=0$

l_2: $y=0$

l_3: $x-y=0$ （方向系数为 1 ）

上的无穷远点。又设P_4点为

l_4: $x+\lambda y=0$

上的无穷远点。则

$$(l_1l_2, l_3l_4)=(P_1P_2, P_3P_4)=k$$

因为

$l_3=l_1-l_2$，即 $\lambda_1=-1$

$l_4=l_1+\lambda l_2$，即 $\lambda_2=\lambda$

所以

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{-1}{\lambda}=k,\ 即\lambda=-\frac{1}{k}$$

因此l_4的方程为：

$$x-\frac{1}{k}y=0,\ 或\ y=kx$$

因为 P_4是 l_4上的一点，所以P_4点的齐次坐标为$(1, k, 0)$。

2·3　完全四点形与完全四线形的调和性

定理5·14　设 s、s' 是完全四点形$ABCD$ 的一对对边，它们的交点是对边点X，点X与其它二对边点的连线是 t、t' （如图5·26）则

$$(tt', ss')=-1$$

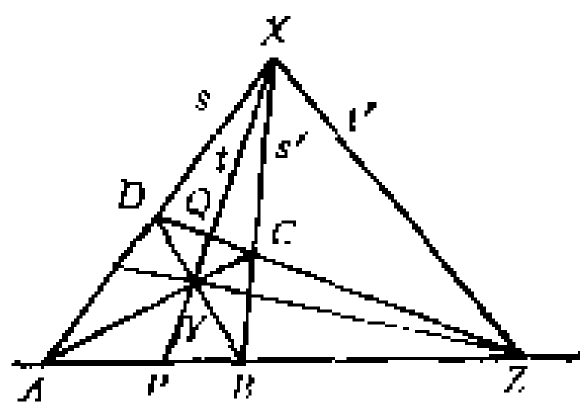


图5·26

证明　令 t 交 AB、CD于P、Q。以点X为射影中心，将四点A、B、P、Z投射到直线 DC上得四点D、C、Q、Z，有：

$$(AB, PZ)=(DC, QZ)$$

同理，以点Y为射影中心，将四点 D、C、Q、Z 投射到直线AB上，得 B、A、P、Z，则有：

$(DC,QZ)=(BA,PZ)$

所以　$(BA,PZ)=(BA,PZ)$

又因为

$$(BA,PZ)=\frac{1}{(AB,PZ)}$$

于是　$(AB,PZ)^2=1$

但　$(AB,PZ)\neq 1$

所以　$(AB,PZ)=-1$

由此得到$(tt',ss')=-1$

对于其它两对对边有同样性质，例如二边AC、BD与YX、YZ调和共轭。

推论1　在完全四点形里，对边三点形的每条边上有一组调和共轭点，其中两个点是对边点，另两个点是这条边与通过第三个对边点的一对对边的交点。

推论2　在完全四点形的每条边上，有一组调和共轭点，其中两个点是顶点，另一对点对里，一个点是对边点，另一个点是这条边与对边三点形的边的交点。

对偶地，可以得出完全四线形的调和性质。即有如下性质定理：

定理5·14′（与定理5·14对偶）设S、S'是完全四线形的一对对顶点，它们的连线是对顶线x，x与其它二对顶线的交点是T、T'，则

$$(TT',SS')=-1$$

与推论1、2对偶地有推论1′、2′。

根据完全四点形的调和性质，可以得出一种作图方法：由已知直线上三点K、L、F，如何求出第四点G，使点对K、L与F、G成调和共轭。作法如下（图5·27）：

图5·27

过点K、L各任作一直线，它们交于A点，在LA上任取一

点 B，连结 BF 交 KA 与 C 点，再连结 L 与 C，K 与 B，这两条连线交于 D 点，连 AD 与已知直线交于 G 点，则 G 点就是所求的第四调和点。

这个作图法告诉我们，若点对 P_1、P_2 与 Q_1、Q_2 成调和共轭，则存在一个完全四点形 $ABCD$，两对对边分别通过点 P_1、P_2；另一对对边分别通过点 Q_1、Q_2；反过来，两对点对对于一个完全四点形有以上这种关系时，必为调和共轭点。因此我们可以说：一直线 l 上的点对 P_1、P_2 与 O_1、Q_2 为调和共轭的充要条件是 P_1、P_2 是一个完全四点形的对顶点，Q_1、Q_2 是通过第三个对顶点的两条对边与直线 l 的交点。

注意：这个事实可以作为调和共轭点对的定义，这是综合地纯射影的定义。当然在这样的定义里，P_1、P_2 与 Q_1、Q_2 调和共轭同 Q_1、Q_2 与 P_1、P_2 调和共轭的意义不一样，即需要证明调和共轭点对的平等性。

例 利用完全四点形的调和性或笛沙格定理，分别证明初等几何命题："三角形的三条中线共点。"

解法一 设 AA'、BB'、CC' 分别为 $\triangle ABC$ 的中线（图5·28），$BB' \times CC' = O$。

连结 AO 与边 BC 交于 A'' 点。在以 A、C'、O、B' 为顶点的完全四点形中，两对对边的交点为 B、C，边 $C'B'$ 与对角线 BC 交于点 P_∞（因为 $C'B' \parallel BC$）。根据调和性必有：

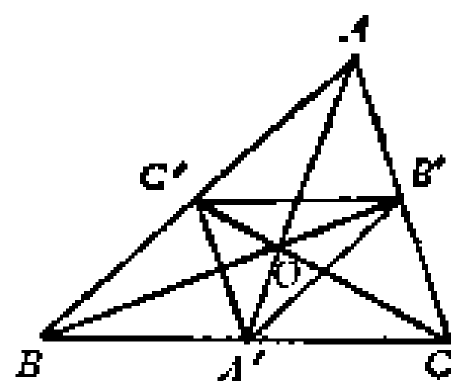


图5·28

$$(BC, A''P_\infty) = -1$$

因此 A'' 是 BC 边的中点，从两 A'' 与 A' 重合，即三条中线交于点 O。

解法二 根据中位线定理，有 $C'B' \times BC = P_\infty$，$A'B' \times BA = Q_\infty$，$A'C' \times CA = R_\infty$，这三点在同一条直线（无穷远直线）上。在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中建立了 A 与 A'，B 与 B'，C

与 C' 的对应关系。这样，根据笛沙格定理的逆定理可知，对应顶点连结的直线 AA'、BB'、CC' 必交于一点。

§3 射影变换· 射影坐标

本节主要研究平面到自身的射影变换。先从一维基本形间的射影对应开始，然后扩大到平面上的射影变换，最后建立射影坐标，讨论射影变换的坐标表示及基本性质。

3·1 一维基本形间的射影对应和透视对应

1 一维基本形之间的射影对应

定义 如果两个一维基本形的元素之间成一一对应，并且任意四对对应元素的交比都相等，则这种对应叫做**一维基本形之间的射影对应**。射影对应用记号"$\overline{\wedge}$"表示。例如：

$$s(A,B,C,\cdots)\overline{\wedge}s'(A',B',C',\cdots)$$

$$S(a,b,c,\cdots)\overline{\wedge}S'(a',b',c',\cdots)$$

$$s(A,B,C,\cdots)\overline{\wedge}S'(a',b',c',\cdots)$$

分别表示点列 s 和 s'；线束 S 和 S'；点列 s 和线束 S' 之间的射影对应关系。

射影对应的这种定义，首先见于斯丹诺（S, Steiner）的著作中，因此常叫做斯丹诺定义。利用斯丹诺的射影定义，则可以证明下面的基本定理：

定理5·15 两个一维基本形的射影对应，由三对对应元素完全确定。

证明 设点列 s 和 s' 成射影对应：

$$s(A,B,C,\cdots)\overline{\wedge}s'(A',B',C',\cdots)$$

并且已知三对对应点 A、A'，B、B'，C、C'，（图5·29）在点列 s 里取任意一点 D，按定义，对于点 D 的对应

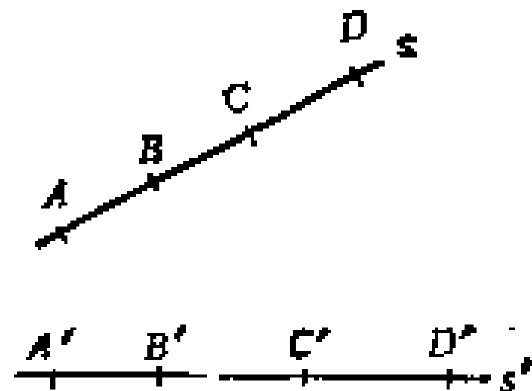


图5·29

点 D'，有

$$(AB,CD)=(A'B',C'D')$$

所以点D'完全确定，也就是点D'是唯一的。

对于线束与线束或点列与线束之间，可同样证明。

定理5·16 一维基本形间的射影对应的逆对应还是射影对应；两个射影对应的积是射影对应。

由定义可直接得出这个定理的结论。

2 一维基本形之间的透视对应

一般来说，点列与线束之间成射影对应时，线束的每条直线不一定通过它的对应点，如图5·30所示。如果每条直线都通过它的对应点，就构成了透视对应。

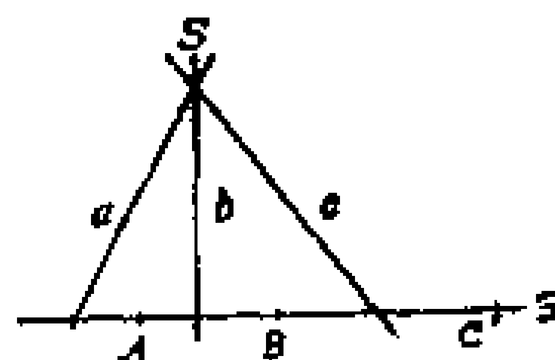


图5·30

定义 如果点列和线束成射影对应，且线束中的每条直线都通过它的对应点，则把这种特殊的射影对应叫做点列和线束之间的透视对应，简称透视（图5·31）。记作

$$s(A,B,C,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}S(a,b,c,\cdots)$$

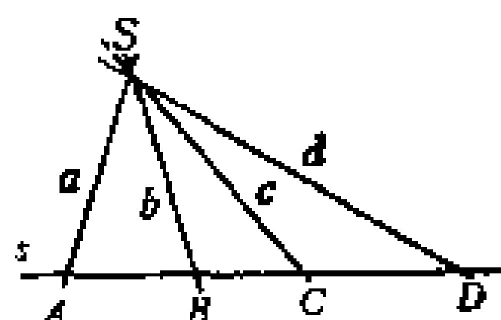


图5·31

定义 如果两个点列与同一线束成透视对应，并且对应点在线束中的同一直线上，则这两点列间的射影对应叫做透视对应。记作

$$s(A,B,C,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}s'(A',B',C',\cdots)$$

这时对应点连线通过线束中心 S，S 叫做透视中心（图5·32）。

这里所讲的两点列之间的透视对应，就是本章开头讲过的中心射影。

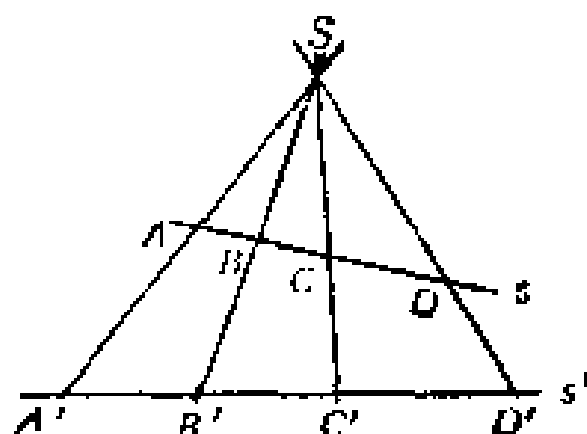


图5·32

定义 如果两个线束与同一点列成透视对应，并且对应直线通过点列中的同一点，则这两个

线束之间的射影对应叫做透视对应（图5·33）。记作

$$S(a,b,c,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}S'(a',b',c',\cdots)$$

每对对应直线的交点在同一直线上，这条直线叫做透视轴。

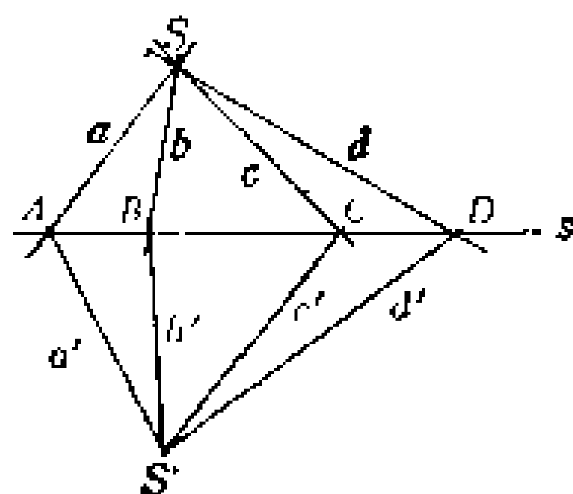


图5·33

关于决定透视对应的条件，有：

定理5·17 两个射影点列或线束成透视对应的必要且充分的条件是它们的公共元素自对应。

证明 必要性：设点列 s 和 s' 成透视对应

$$s(A,B,C,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}s'(A',B',C',\cdots)$$

则点列 s 和 s' 的公共点 X 显然自对应（图5·34）。

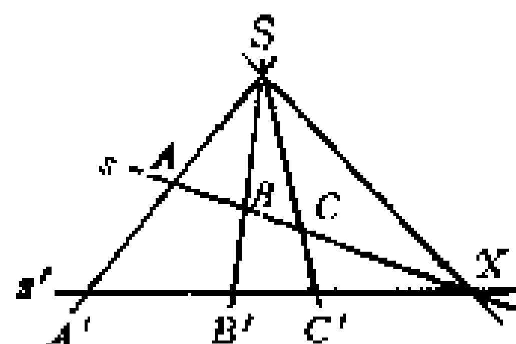


图5·34

充分性：如果点列 s 和 s' 的公共点 X 自对应．设点列 s 的点 A、B 在点列 s' 里的对应点为 A'、B'，用 S 表示直线 AA' 和 BB' 的交点，则在直线 s 和 s' 截断线束 S 所构成的两个透视点列里，有三对对应点 A、A'，B、B'，X、X'，但这些点也是已知射影点列 s 和 s' 的三对对应点，因为两个点列的射影对应由三对对应点唯一确定，因此，已知射影点列成透视对应。

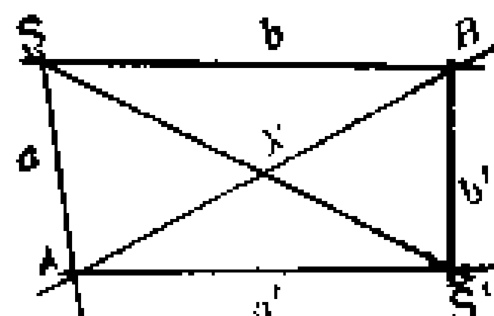


图5·35

对于线束 S 和 S'（图5·35），可以完全类似地证明．显然，关于线束的定理是关于点列定理的对偶命题，因此定理得证。

3 一维基本形的射影对应与透视对应的关系

定理5·18 两个不同底点列的射影对应，可由两次透视对应合成。

证明 设已知点列

$$s(A,B,C,\cdots)\overline{\wedge}s'(A',B',C',\cdots)$$

连结一对对应点，例如：A、A'的直线 AA'，在直线AA'上取任意二点S和S'（图5·36）。以S和S'为中心分别向点列s和s'投射直线，得到两个线束S和S'，因为已知点列s和s'是射影的，它们任意四条对应直线的交比相等。另外，因为这两个线束的公共直线SS'自对应，所以它们也是透视线束，对应直线的交点A_0、B_0、C_0……在透视轴s_0上。因此

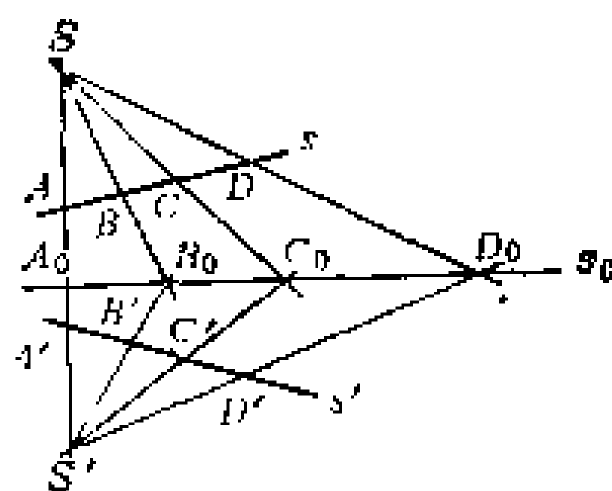


图5·36

$$s(A,B,C,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}s_0(A_0,B_0,C_0,\cdots)$$

$$s_0(A_0,B_0,C_0,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}s'(A',B',C',\cdots)$$

利用这个定理可以完成下面作图：

已知两个射影点列s和s'的三对对应点A、A'，B、B'，C、C'试作其它对应点。

显然，按图5·36，我们首先作出透视轴 $s_0=B_0C_0$

$$SB\times S'B'=B_0$$

$$SC\times S'C'=C_0$$

则任意点D的对应点D'就是直线$S'D_0$与s'的交点。

定理5·19 两个不共中心线束的射影对应，可由两次透视对应合成。

证明 设已知线束

$$S(a,b,c,\cdots)\overline{\wedge}S'(a',b',c',\cdots)$$

作一对对应直线，例如：a、a'的交点(aa')，通过点(aa')作任意两条直线s和s'（图5·37），以直线s和s'为底分别将线束S和S'截断，得到

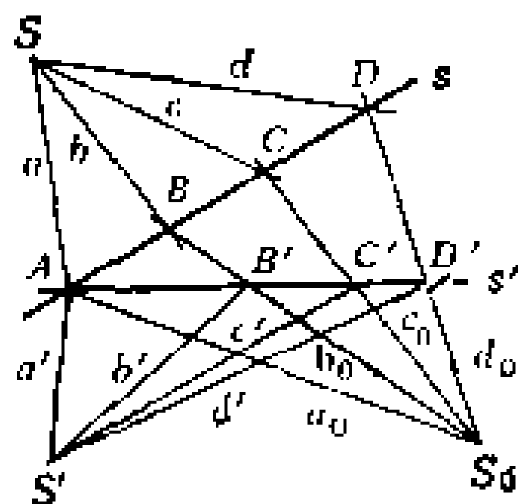


图5·37

两个点列 s 和 s'. 因为已知线束 S 和 S' 是射影的，所以点列 s 和 s' 也是射影的，它们的四对对应点的交比相等. 又因为这两个点列的公共点(aa') 自对应，所以它们也是透视点列，对应点的连线通过透视中心S_0。因此

$$S(a,b,c,\ \cdots)\overline{\overline{\wedge}}S_0(a_0,b_0,c_0,\cdots)$$

$$S_0(a_0,b_0,c_0,\ \cdots)\overline{\overline{\wedge}}S'(a',b',c',\cdots)$$

利用这个定理可以完成下面的作图：

已知两个射影线束 S 和 S' 的三对对应直线 a、a'，b、b'，c、c'，试作其它对应直线。

显然，按图5·37，首先作出透视中心$S_0=(b_0c_0)$。其中

$$b_0=BB'$$

$$c_0=CC'$$

则任意直线 d 的对应直线d'就是点$D'=(s'd_0)$与S'的连线。

容易看出，上面两个定理和两个作图都是对偶关系。

例1 已知三角形ABC的边BC,CA,AB绕同一直线m上三个定点P、Q、R旋转，顶点B、C在两条定直线s_1、s_2上滑动，试证顶点A也在一条定直线 s_0上滑动（图5·38）.

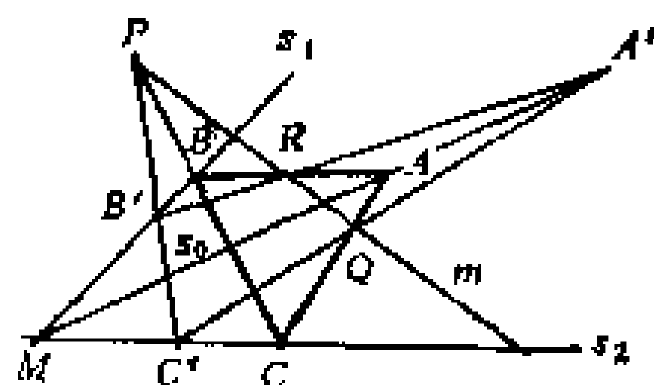


图5·38

解 由题设可知三角形ABC的边BC、CA、AB绕定点P、Q、R旋转，因为动直线画出透视线束：

$$P(BC,B'C',\cdots)\overline{\overline{\wedge}}Q(CA,C'A',\cdots)$$

$$P(BC,\ B'C',\ \cdots)\overline{\overline{\wedge}}R(AB,A'B',\cdots)$$

所以 $$Q(CA,C'A',\cdots)\overline{\wedge}R(AB,A'B',\cdots)$$

又因为这两个线束的公共直线 QR自对应，所以

$$Q(CA,C'A',\ \cdots)\overline{\overline{\wedge}}R(AB,A'B',\cdots)$$

因此，对应直线的交点A、A'、……在一条直线 s_0上，这条直线

s_0通过已知直线s_1和s_2的交点M。

例2 巴卜斯（Pappus）定理。设A_1、B_1、C_1和A_2、B_2、C_2为同一平面上的两组共线点，$B_1C_2\times B_2C_1=L$，$C_1A_2\times C_2A_1=M$，$A_1B_2\times A_2B_1=N$，则三点 L、M、N共线（图5・39）。

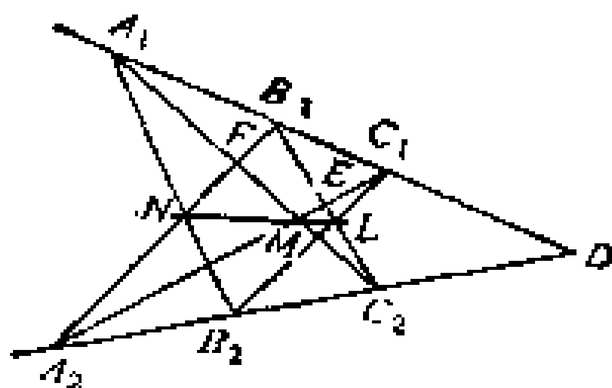


图5・39

解 在图里$(B_1,F,N,A_2)\overset{=}{\wedge}(D,C_2,B_2,A_2)$，$(D,C_2,B_2,A_2)\overset{=}{\wedge}(B_1,C_2,L,E)$，所以$(B_1,F,N,A_2)\overline{\wedge}(B_1,C_2,L,B)$，但这个射影对应中 B_1 点自对应。由定理5・17有：

$$(B_1,F,N,A_2)\overset{=}{\wedge}(B_1,C_2,L,E)$$

因此，对应点连线FC_2，NL，A_2E通过透视中心M，所以点M、L、N 共线。

4 点列之间射影对应的代数表示

设在已知二直线s与s'上，由三对对应点P_i、P'_i $(i=1,2,3)$决定了一个射影对应

$$P'=\sigma(P)$$

则由射影对应定义有

$$(P_1P_2,P_3P)=(P'_1P'_2,P'_3P') \qquad (1)$$

在直线s及s'上分别引进笛氏一维齐次坐标，设点 P_1、P_2、P_3及 P的坐标依次为(a_1,a_2)、(b_1,b_2)、$(a_1+\lambda_0b_1,a_2+\lambda_0b_2)$ 及$(a_1+\lambda b_1,a_2+\lambda b_2)$且点$P_1'$、$P_2'$、$P_3'$及$P'$的坐标依次为$(a'_1,a'_2)$、$(b'_1,b'_2)$、$(a'_1+\lambda'_0b'_1,a'_2+\lambda'_0b'_2)$与$(a'_1+\lambda'b'_1,a'_2+\lambda'b'_2)$。

根据§2定理5・6和（1）式必有

$$\frac{\lambda_0}{\lambda}=\frac{\lambda'_0}{\lambda'} \qquad (2)$$

若用(x_1,x_2)、(x'_1,x'_2)表示点P与P'的齐次坐标，则有：

$$\frac{x_1}{a_1+\lambda b_1}=\frac{x_2}{a_2+\lambda b_2},\quad \frac{x'_1}{a'_1+\lambda'b'_1}=\frac{x_2'}{a'_2+\lambda'b'_2}$$

所以

$$\lambda=\frac{a_2x_1-a_1x_2}{-b_2x_1+b_1x_2}$$

$$\lambda'=\frac{a_2'x_1'-a_1'x_2'}{-b_2'x_1'+b_1'x_2'}$$

将λ、λ'代入（2）式得

$$\frac{\lambda_0(-b_2x_1+b_1x_2)}{a_2x_1-a_1x_2}=\frac{\lambda_0'(-b_2'x_1'+b_1'x_2')}{a_2'x_1'-a_1'x_2'}$$

所以有：

$$\lambda_0(-b_2x_1+b_1x_2)=\rho\lambda_0'(-b_2'x_1'+b_1'x_2')$$

$$a_2x_1-a_1x_2=\rho(a_2'x_1'-a_1'x_2')$$

其中ρ为比例常数。

解x_1'、x_2'即得：

$$\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{cases}\tag{5·11}$$

其中 $\rho\neq0$，a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 都是常数。并且行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq0$$

（否则直线s上的点都对应直线 s' 上一个定点，因此不是一一对应，故不可能）。

如果仅讨论二直线上的有穷远点，则可将（5·11）式中点P及P'的齐次坐标化为非齐次坐标则得：

$$x'=\frac{a_{11}x+a_{12}}{a_{21}x+a_{22}},\quad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq0\tag{5·12}$$

定义 形如(5·11)或(5·12)式且系数行列式不是零的对应叫做非奇线性对应。因此得到下列定理：

定理5·20 在二直线上各建立笛氏坐标系，则以这二直线为底的点列之间的射影对应必是非奇线性对应（5·11）或(5·12)式。

这个定理的逆命题也成立，即有：

定理5·21 在二直线上各建立笛氏坐标系，则以这二直线为底的点列之间的非奇线性对应（5·11)式必是射影对应。

证明 设

$$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

是直线 l 到直线 l' 上的一个非奇线性对应。对于 l 上的一个确定点 $P(x_1,x_2)$，由这个变换必能确定两个不都是零的数对 $(\rho x_1',\rho x_2')$，否则由 $D\neq 0$和

$$\begin{cases} 0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ 0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

将推出 $x_1 = x_2 = 0$，这不可能，因此点 P在直线 l' 上有唯一确定的对应点 P'。

因为$D\neq 0$，由（5·11）式可求逆对应为

$$\begin{cases} \sigma x_1 = A_{11}x_1' + A_{21}x_2' \\ \sigma x_2 = A_{12}x_1' + A_{22}x_2' \end{cases} \tag{5·13}$$

这里 $\sigma = \dfrac{D}{\rho}$，A_{ij}是 D 中 a_{ij} 的代数余因式。而由上面可知直线l'上一点仅能是直线 l 上唯一一点的象，所以直线 l 与 l' 上的点建立了一一对应。

下面再来证明，这样的一一对应保持四点的交比不变。

设 P_1、P_2、P_3、P是直线 l 上四个点，在（5·11）式的对应下与直线l'上的 P_1'、P_2'、P_3'、P' 四点对应，其坐标为

(a_1,a_2)，(b_1,b_2)，$(a_1+\lambda_0 b_1,a_2+\lambda_0 b_2)$，$(a_1+\lambda b_1,a_2+\lambda b_2)$

(a_1',a_2')，(b_1',b_2')，$(a_1'+\lambda_0' b_1',a_2'+\lambda_0' b_2')$，$(a_1'+\lambda' b_1',a_2'+\lambda' b_2')$。

由（5·11）第一式可得点P_1'、P_2'、P_3'的第一个坐标为

$$\begin{cases} \rho_1 a_1' = a_{11}a_1 + a_{12}a_2 \\ \rho_2 b_1' = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ \rho_3(a_1' + \lambda_0' b_1') = a_{11}(a_1 + \lambda_0 b_1) + a_{12}(a_2 + \lambda_0 b_2) \end{cases}$$

将前两式代入第三式并整理，得

$$(\rho_3-\rho_1)a_1'=(\lambda_0\rho_2-\lambda_0'\rho_3)b_1'$$

同样，根据（5·11）第二式点P_1'、P_2'、P_3'的第二个坐标为：

$$(\rho_3-\rho_1)a_2'=(\lambda_0\rho_2-\lambda_0'\rho_3)b_2'$$

由于$P_1'\neq P_2'$，得出$\rho_3\neq\rho_1$；又由于 b_1'、b_2'不全为零，得出

$$\lambda_0\rho_2-\lambda_0'\rho_3=0$$

从而得

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_0'}=\frac{\rho_3}{\rho_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

考查第一、二和第四对点，依同理可得

$$\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

于是得

$$\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{\lambda_0}{\lambda_0'}$$

根据定理5·6得

$$(p_1p_2,p_3p)=\frac{\lambda_0}{\lambda}=\frac{\lambda_0'}{\lambda'}=(p_1'p_2',p_3'p')$$

利用对偶关系和线坐标可以推导出两个线束之间成射影对应的代数表示。

一维基本形的方程可以统一写成

$$f+\lambda g=0 \qquad (5\cdot14)$$

其中 f、g是点坐标或线坐标的一次齐次函数。

对于点坐标来说，f、g可以是

$$f=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$$

$$g=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$$

这时（1）式表示线束，对于每一个参数都确定线束里的一条直线，而这条直线的线坐标是

$$f+\lambda g=(a_1+\lambda b_1, a_2+\lambda b_2, a_3+\lambda b_3)$$

对于线坐标来说，f、g 可以是

$$f=a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3$$

$$g=b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3$$

这时（1）式表示点列，对于每一个参数λ都确定点列里的一个点，而这个点的坐标是

$$f+\lambda g=(a_1+\lambda b_1, a_2+\lambda b_2, a_3+\lambda b_3)$$

下面给出用一维基本形方程的参数来判定两个一维基本形成射影对应的条件。

定理5·22 两个一维基本形

$$f+\lambda g=0$$

$$f'+\lambda' g'=0$$

成射影对应的充要条件是存在 α、β、γ、δ四个数，使

$$\lambda'=\frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta} \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$$

证明 设两个基本形由不同的三对对应元素

$$f+\lambda_i g \longleftrightarrow f'+\lambda_i' g' \quad (i=1,2,3)$$

决定的。任意的第四对对应元素为

$$f+\lambda g \longleftrightarrow f'+\lambda' g'$$

则由交比的不变性质，必有

$$\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda-\lambda_1)}=\frac{(\lambda_1'-\lambda_3')(\lambda'-\lambda_2')}{(\lambda_2'-\lambda_3')(\lambda'-\lambda_1')}$$

整理后即得：

$$\lambda'=\frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta} \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0) \qquad (5\cdot 15)$$

因此必要性证完。

充分性的证明只要把必要性的证明过程返回去就可以了。

例 3 将直线 l 上以 2 、 4 为坐标的点及无穷远点顺次对应着直线l'上以 -1、1为坐标的点及无穷远点，求射影对应

式。

解 设所求的射影对应式为

$$\begin{cases} \rho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \rho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad (1)$$

将各对应点化成齐次坐标，然后代入公式（1）。由于无穷远点变成无穷远点，所以 $a_{21}=0$。又

$$\begin{cases} -\rho_1 = 2a_{11} + a_{12} \\ \rho_1 = 2a_{21} + a_{22} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_2 = 4a_{11} + a_{12} \\ \rho_2 = 4a_{21} + a_{22} \end{cases}$$

解出 $a_{11}=a_{22}$，$a_{12}=-3a_{22}$，$a_{21}=0$，代入（1）式得

$$\begin{cases} \rho x'_1 = x_1 - 3x_2 \\ \rho x'_2 = \qquad x_2 \end{cases}$$

为所求的射影对应式。

3·2 一维射影变换和射影坐标

1 有公共底的点列或线束的射影变换

在一维基本形的射影对应中，点列到自身或线束到自身的射影对应（变换）占有重要的地位，它可以构成变换群，从而可以建立一维射影几何。

定义 点列（或线束）到自身的射影对应叫做点列（或线束）上的射影变换。

我们知道，不共底（或中心）的两个点列（或线束）间的射影对应可由两次透视对应合成。同一底上的射影对应也可由透视对应合成如图5·40，而透视对应不仅保持结合关系，而且保持分隔性不变，所以射影对应也保持顺序关系。

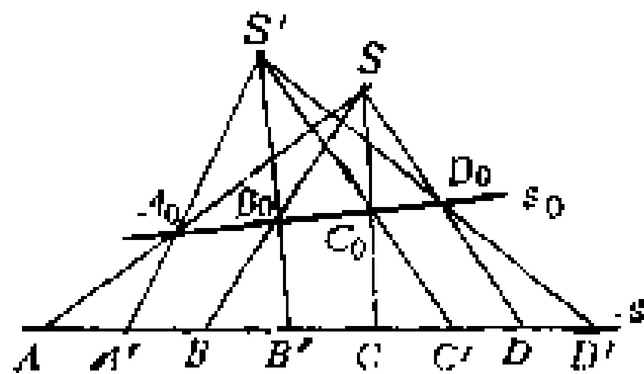


图5·40

设点列 s 与它的透视线束 S，我们已知它们的对应元素的顺序，也就是如果点列 s 的四个点组成两对分隔点对，则线束 S 的对应直线也组成两对分隔直线对；如果点列的点 M 沿某个

方向A、B、C、…画出点列 s，则对应直线m也沿一定方向a、b、c、…画出线束 S。

对于两个点列 s 和s'，或两个线束 S 和S'，因为它们都可由透视对应合成。所以，如果点列 s 的点M沿某个方向A、B、C、…画出点列 s，则对应点M'也沿确定方向 A'、B'、C'、…画出点列s'。

同样，如果线束S的直线m沿某个方向 a、b、c、…画出线束S，则对应直线m'也沿一定方向a'、b'、c'、…画出线束S'。

具有这种有顺序的对应，叫做有序对应。射影对应是有序对应。

因为，顺序关系是射影对应下的不变性质。所以，对于直线上的射影变换也有这种性质。

定理5·23 在同一底上的射影变换里，如果有三对对应元素重合，则所有对应元素重合。

证明 设底 s 上的两个点列 s_1和 s_2成射影对应，其中有三对对应点$A_1=A_2$，$B_1=B_2$，$C_1=C_2$，而D_1和D_2是任意第四对对应点。因为

$$(A_1B_1,C_1D_1)=(A_2B_2,C_2D_2)$$

所以 $D_1=D_2$。

对于同一中心的两个线束，可以同样地证明。

由这一定理可知，有三对对应点重合的射影变换是恒等变换。

根据上一定理可以证明，一维基本形里不是恒等的射影变换，可以有一个、两个或没有二重点（或二重直线）。

定义 一维基本形的射影变换，由于有两个，一个，没有二重元素，分别叫做双曲型、抛物型、椭圆型的射影变换。

2　一维射影坐标系

以前我们讲过的笛卡儿直角坐标系，仿射坐标系以及在仿射坐标基础上扩充的笛氏齐次坐标，都是建立在距离和简单比

的基础上，但距离和简单比都不是射影变换下的不变量，因而不是射影几何研究的对象。为此需要一种新的坐标系，使它建立在交比的基础上，成为研究纯射影几何的工具。我们将会看到，在一、二维射影坐标系下的坐标及表达式（方程等）和用笛氏坐标来表达，在形式上是一致的，（其中的关键是两种坐标的转换关系。）但在定义上，它们又有着原则的区别。

定义 在射影直线上，取三个不同的点 A_1、A_2、E。设 P 是该直线上任意一点，则点对 A_1 和 A_2、E 和 P 的交比唯一确定，即

$$x=(A_1A_2,EP) \qquad (1)$$

反过来，对于任一实数 x，也有唯一一点 P 满足（1）式。这样，点 P 与实数之间建立了一一对应关系。我们称 x 是点 P 在坐标系 $[A_1,A_2,E]$ 下的非齐次射影坐标。

E 点的坐标是：

$$x_E=(A_1A_2,EE)=\frac{A_1E\cdot A_2E}{A_1E\cdot A_2E}=1$$

A_1 点的坐标是：

$$x_{A_1}=(A_1A_2,EA_1)=\frac{A_1E\cdot A_2A_1}{A_1A_1\cdot A_2E}=\infty \text{（无坐标）}$$

A_2 点的坐标是：

$$x_{A_2}=(A_1A_2,EA_2)=\frac{A_1E\cdot A_2A_2}{A_1A_2\cdot A_2E}=0$$

点 A_1、A_2、E 叫做基点；点 A_2 又叫做原点；点 E 又叫做单位点。

为了规定 A_1 点的坐标，我们引进齐次射影坐标，而且今后也主要使用齐次射影坐标。

定义 非齐次射影坐标为 x 的点 p，如果取

$$x=\frac{x_1}{x_2}, \qquad x_2\neq 0$$

的两个数，则有序数组 (x_1,x_2) 称为点 P 的齐次射影坐标。当

$x_2=0$时，规定$(x_1,0)$为A_1点的齐次射影坐标。

显然，如果$\rho\neq0$，$(\rho x_1,\rho x_2)$与(x_1,x_2)表示同一点。$(0,0)$不是任何点的坐标。

基点的齐次射影坐标是$A_1(1,0)$，$A_2(0,1)$，$E(1,1)$。

利用对偶关系，可以建立一维直线的射影坐标系：

定义 通过一点取彼此不重合的三条直线a_1、a_2、e，设 p 为该线束中任一直线，则直线 p 和a_1、a_2、e确定一个交比

$$u=(a_1a_2,ep)=\frac{u_1}{u_2}$$

称 u 为直线 p 在坐标系$[a_1,a_2,e]$下的非齐次射影坐标，$(u_1、u_2)$为直线 p 的齐次射影坐标。

对于任意数 $\rho(\neq0)$，坐标 $(\rho u_1,\rho u_2)$和(u_1,u_2)表示同一直线；$(0,0)$不表示任何直线。

由于

$$u=(a_1a_2,ep)=\frac{\sin(\widehat{a_1,e})\cdot\sin(\widehat{a_2,p})}{\sin(\widehat{a_1,p})\cdot\sin(\widehat{a_2,e})}$$

直线e、a_1、a_2的坐标分别是

$$u_{a_1}=\infty=1:0$$

$$u_{a_2}=0=0:1$$

$$u_e=1=1:1$$

直线 $a_1(1,0)$，$a_2(0,1)$和$e(1,1)$叫做基线；a_2 又叫做原线，e又叫做单位线。

一维点射影坐标的特例是仿射坐标和笛氏坐标：

（1）仿射坐标　取 A_1 为直线 l 上的无穷远点P_∞，A_2为原点O，则

$$x=(A_1A_2,EP)=(P_\infty A_2,EP)=(PE,A_2P_\infty)$$

$$=(PEA_2)=\frac{A_2P}{A_2E}=\frac{OP}{OE}$$

这时，点 P 的射影坐标是仿射坐标，即为原点到该点与原点到

单位点的有向距离之比。

（2）笛氏坐标　取A_1为直线 l 上的无穷远点 P_∞，A_2 为原点O，且设 A_2E等于单位长度，则

$$x = OP$$

为点 P 的笛氏坐标。因此，笛氏坐标是射影坐标的一种特例。

3　一维射影坐标与笛氏坐标的转换

我们以直线上的点坐标为例来说明，至于线坐标可以根据对偶关系推出。

设射影坐标系的基点A_1、A_2、E的笛氏坐标分别为x_1、x_2、x_E，直线上任一点 P 的射影坐标为x'，笛氏坐标为 x，则

$$x' = (A_1A_2, EP) = \frac{(x_E - x_1)(x - x_2)}{(x_E - x_2)(x - x_1)}$$

令

$$\frac{x_E - x_1}{x_E - x_2} = k$$

则

$$x' = \frac{kx - kx_2}{x - x_1} \qquad (1)$$

且

$$\begin{vmatrix} k & -kx_2 \\ 1 & -x_1 \end{vmatrix} = k(x_2 - x_1) = \frac{(x_E - x_1)}{(x_E - x_2)}(x_2 - x_1) \neq 0$$

令　$k = a_{11}$，$-kx_2 = a_{12}$，$1 = a_{21}$，$-x_1 = a_{22}$，则（1）式可写成：

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

这就是前面讲过的射影变换公式（5·12），是一个非奇线性变换，说明一直线上点 P 的笛氏坐标和射影坐标之间的变换就是射影变换，用定理的形式可以叙述为：

定理5·24　一直线上，点的笛氏坐标与射影坐标的变换是非奇线性变换。

由定理5·23可以得出，一直线上四点的交比用射影坐标表示和用笛氏坐标表示完全相同。而且还可推出：

定理5·25 直线上两种不同的射影坐标系之间的坐标变换是非奇线性变换。

证明 设x和x'是直线上一点在两种射影坐标系里的坐标，$\overline{x}$是该点的笛氏坐标，则由x变成$\overline{x}$是非奇线性变换，再由$\overline{x}$变成x'也是非奇线性变换，于是两个变换的积使x变成x'也是非奇线性变换。

定理5·26 一个点的射影坐标经过非奇线性变换必得出该点的另一种射影坐标。

证明 设一点的射影坐标为x，经过非奇线性变换(5·12)后得到x'，我们要证明x'是它的另一种射影坐标。

设$\overline{x_1}$、$\overline{x_2}$、$\overline{x_E}$是三个不同点的射影坐标，经过公式(5·12)变换成为$\overline{x'_1}$、$\overline{x'_2}$、$\overline{x'_E}$，于是交比为

$$\frac{(\overline{x'_1}-\overline{x'_E})(\overline{x'_2}-x')}{(\overline{x'_2}-\overline{x'_E})(\overline{x'_1}-x')}=\frac{(\overline{x_1}-\overline{x_E})(\overline{x_2}-x)}{(\overline{x_2}-\overline{x_E})(\overline{x_1}-x)} \qquad (1)$$

取 $\overline{x'_2}=0$、$\overline{x'_E}=1$，（1）式变成：

$$\frac{(\overline{x'_1}-1)x'}{\overline{x'_1}-x'}=\frac{(\overline{x_1}-\overline{x_E})(\overline{x_2}-x)}{(\overline{x_2}-\overline{x_E})(\overline{x_1}-x)} \qquad (2)$$

当$\overline{x'_1}$趋于无穷大时，则有：

$$x'=\frac{(\overline{x_1}-\overline{x_E})(\overline{x_2}-x)}{(\overline{x_2}-\overline{x_E})(\overline{x_1}-x)} \qquad (3)$$

等号右端表示$\overline{x_1}$、$\overline{x_2}$、$\overline{x_E}$、x四点的交比，（3）式正好说明x'是一种射影坐标，它的基点在坐标系中的坐标分别是$\overline{x_1}$、$\overline{x_2}$、$\overline{x_E}$。

定理5·27 用射影坐标表示两个点列之间的射影对应是

非奇线性对应。

定理成立是显然的，因为用射影坐标表示射影变换和用笛氏坐标表示是一致的。

例 非奇线性变换

$$\begin{cases} \rho x'_1 = 2x_1 - 4x_2 \\ \rho x'_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \quad (1)$$

表示点之间两种齐次射影坐标的变换，求每种一维坐标系的三个基点在另一种坐标系中的坐标。

解 将旧坐标系中三个基点$A_1(1,0)$、$A_2(0,1)$、$A_E(1,1)$的坐标分别代入（1）式，则得到它们在新坐标系中的坐标分别为$(2,1)$、$(-4,-1)$、$(-2,0)$。

根据公式（5·14）可求出（1）式的逆变换为

$$\begin{cases} \sigma x_1 = -x'_1 + 4x'_2 \\ \sigma x_2 = -x'_1 + 2x'_2 \end{cases} \quad (2)$$

将新坐标系的三个基点$A'_1(1,0)$，$A'_2(0,1)$，$A'_E(1,1)$的坐标分别代入（2）式，则得到它们在旧坐标系中的坐标分别为$(-1,-1)$、$(2,1)$、$(3,1)$。

3·3 平面上的射影变换

现在把前一段讲过的一维基本形的射影变换推广到二维基本形，并且重点地研究点场的情况。

1 平面上的射影变换及简单性质

定义 如果平面上点场的点建立了一个一一对应，并且满足：

（1）任何共线三点的象仍是共线三点；

（2）共线四点的交比不变。

则这个一一对应叫做点场的射影变换，简称射影变换。

对偶地可以叙述线场的射影变换的定义。

以上两类射影变换统称同素变换。

类似地可以叙述平面上点场和线场之间的射影变换，这种

变换称为异素变换．今后主要研究点场的射影变换．

平面上的射影变换显然有以下简单性质：

（1）一维基本形仍变成一维基本形；

（2）两个成射影对应的一维基本形变换后仍成射影对应；

（3）射影变换的逆变换仍是射影变换；

（4）两个射影变换的积是射影变换．

平面上使每一点保持不动的射影变换是恒等变换．由恒等变换和（3）、（4）一起可以推得平面上全体点场的射影变换构成群，叫做**射影变换群**，简称**射影群**．

2　平面上的透射变换

定义　如果射影平面内点场的射影变换，又使每对对应点的连线都通过一个定点，则这个变换叫做**透射（或中心透视）变换**，简称**透射**．定点叫**透射中心**．

根据笛沙格定理，透射使不过中心的两条对应直线的交点在同一直线上，该直线叫**透射轴**．图5·41是两个成透射对应的三角形，它满足平面笛沙格定理．透射轴 s 上的每一点都是二重点，通过透射中心 S 的每条直线都是二重直线．显然，如果把 S 看成无穷远点，则 AA'、BB'、CC' 等互相平行，透射就变成透视仿射对应．

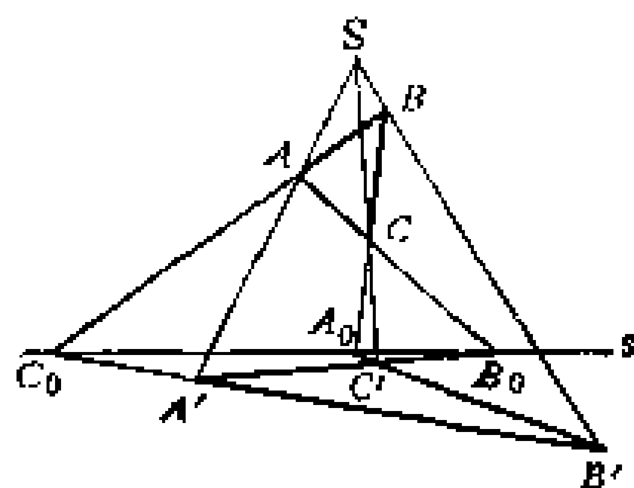


图5·41

3·4　平面上的射影坐标

1　平面上射影坐标系

现在在一维射影坐标系的基础上，建立二维射影坐标系．

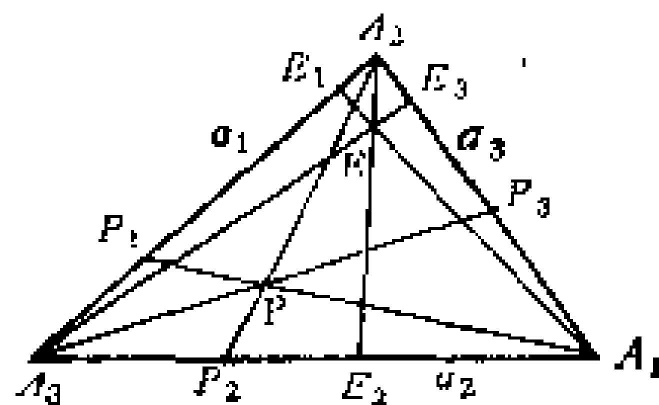


图5·42

在射影平面内取每三点都不共线的四个点 A_1、A_2、A_3、E，三点

形$A_1A_2A_3$的三条边分别是a_1、a_2、a_3（图5·42）。分别以A_1、A_2点为射影中心，将点E中心射影到a_1、a_2上，得投影点为E_1、E_2，则在直线a_1和a_2上分别决定了坐标系〔A_2,A_3,E_1〕和〔A_1,A_3,E_2〕，其中A_3是坐标原点，E_1、E_2分别是单位点。

在平面上任取一点P，仍以点A_1、A_2为中心，将点P中心射影到直线a_1、a_2上，得投影点P_1、P_2。设点P_1在坐标系〔A_2,A_3,E_1〕中的坐标为y；点P_2在坐标系〔A_1,A_3,E_2〕中的坐标为x。这样，平面上除了A_1、A_2以外的每一个点P与实数对(x,y)建立了一一对应。因此给出下面的定义：

定义 三点形$A_1A_2A_3$和点E确定一个二维射影坐标系〔A_1,A_2,A_3,E〕，这四个点叫做基点，$A_1A_2A_3$叫做**坐标三点形**，A_3叫做**原点**，E叫做**单位点**。点P所对应的(x,y)叫做点P在坐标系〔A_1,A_2,A_3,E〕的**二维非齐次射影坐标**。

显然，点A_3的坐标是$(0,0)$，点E的坐标是$(1,1)$，点A_1、A_2无坐标。另外直线a_2上点的坐标是$(x,0)$，直线a_1上点的坐标是$(0,y)$。

为了使点A_1、A_2也有坐标，引进齐次射影坐标如下：

以点A_3为射影中心将点P、E射影到直线a_3上，得P_3、E_3。令

$$(A_3A_2,E_1P_1)=\lambda_1$$
$$(A_1A_3,E_2P_2)=\lambda_2$$
$$(A_2A_1,E_3P_3)=\lambda_3$$

定义 如果三数x_1、x_2、x_3满足

$$\frac{x_3}{x_2}=\lambda_1,\quad \frac{x_1}{x_3}=\lambda_2,\quad \frac{x_2}{x_1}=\lambda_3$$

则称(x_1,x_2,x_3)为点P的**齐次射影坐标**。

由定义可知，当点P在直线a_1上时，则点P_2重合于点A_3，有$x_1=0$；当点P在直线a_2上时，则点P_3重合于点A_1，有$x_2=0$；当点P在直线a_3上时，点P_1重合于点A_2，点P_2重合于A_1，由此

必有$x_3=0$。点A_1、A_2的坐标分别为(1,0,0)和（0,1,0)，而原点A_3的坐标是（0,0,1），点E的坐标为（1,1,1）。

点P的齐次射影坐标(x_1,x_2,x_3)与非齐次射影坐标(x,y)有什么关系呢？事实上

$$x=(A_1A_3,E_2P_2)=\lambda_2=\frac{x_1}{x_3}$$

$$y=(A_2A_3,E_1P_1)=\frac{1}{\lambda_1}=\frac{x_2}{x_3}$$

因此，这样定义的齐次坐标与我们以前讲过的是一致的。只不过是为了规定a_3上点的坐标，我们引进了$\lambda_3=\frac{x_2}{x_1}$的条件，它是直线$a_3$上$P$点的坐标$(x_1,x_2,0)$前两个坐标之比，$\lambda_3$是直线$A_3P_3$的方向系数。

下面给出点P齐次坐标的度量解释。

我们暂时把射影平面沿无穷远直线切开，还原成欧氏平面。设点P、E到坐标三点形三边的距离分别记为d_1、d_2、d_3和e_1、e_2、e_3，注意这里的距离是有向距离。规定e_1、e_2、e_3都为正。d_i的正负则作如下的规定：当点P和E在边的同侧为正，在边的不同侧为负（图5·43）。直线A_2E_2、A_2P_2分别记为c_2、p_2。则

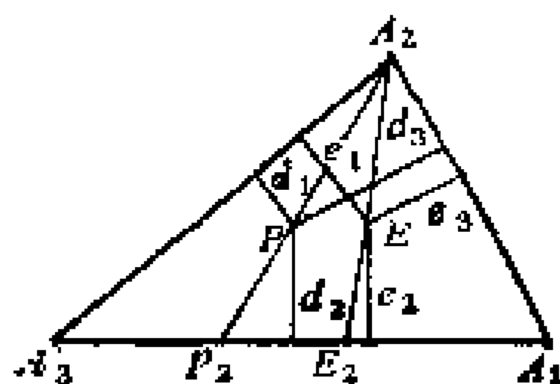


图5·43

$$\frac{x_1}{x_3}=\lambda_2=(A_1A_3,E_2P_2)$$

$$=(a_3a_1,c_2p_2)$$

$$=\frac{\sin(\widehat{a_3,c_2})\cdot\sin(\widehat{a_1,p_2})}{\sin(\widehat{a_1,c_2})\cdot\sin(\widehat{a_3,p_2})}$$

$$=\frac{\frac{e_3}{A_2E}\cdot\frac{d_1}{A_2P}}{\frac{e_1}{A_2E}\cdot\frac{d_3}{A_2P}}=\frac{e_3d_1}{e_1d_3}=\frac{d_1}{e_1}:\frac{d_3}{e_3}$$

同理可以推出

$$\frac{x_2}{x_3}=\frac{1}{\lambda_1}=(A_2A_3,E_1P_1)=\frac{d_2}{e_2}:\frac{d_3}{e_3}$$

所以 $x_1:x_2:x_3=\frac{d_1}{e_1}:\frac{d_2}{e_2}:\frac{d_3}{e_3}$　（图5·42和5·43）.

就是说，点 P 的齐次射影坐标等于点 P 和 E 到坐标三点形三边 a_1、a_2、a_3的距离之比。

2　二维射影坐标的特例

（1）仿射坐标

在上述讨论中，视直线 A_1A_2 为无穷远直线时，则

$$\frac{d_3}{e_3}\longrightarrow 1$$

这时平面上点 P 的齐次坐标是

$$\rho x_1=\frac{d_1}{e_1},\quad \rho x_2=\frac{d_2}{e_2},\quad \rho x_3=1$$

写成非齐次坐标，则为

$$x=\frac{x_1}{x_3}=\frac{d_1}{e_1}=\frac{d'_1}{e'_1}$$

$$y=\frac{x_2}{x_3}=\frac{d_2}{e_2}=\frac{d'_2}{e'_2}$$

其中d'_1、d'_2和e'_1、e'_2分别表示：通过点 P、E 作A_3A_1、A_3A_2 的平行线时，点P、E 与平行线和 A_3A_2、A_3A_1 交点的距离(图5·44)。这显然是仿射坐标系，A_3A_1是X轴，A_3A_2是Y轴，A_3是原点，E 是单位点，e'_1、e'_2是两轴上的单位长。

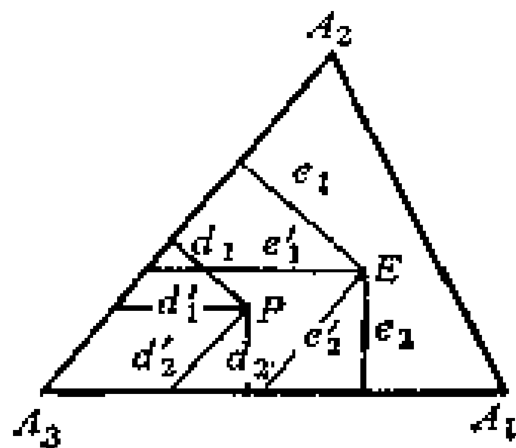


图5·44

（2）笛氏坐标系

在仿射坐标系中，取$e'_1=e'_2$，即 $e_1=e_2$，则得笛氏（斜）坐标系，$e'_1=e'_2$ 是单位长。

3　二维射影坐标与笛氏坐标的转换

设在平面上引进一个笛氏坐标系，其上一点P的坐标为(x,y)。又引进一射影坐标系，其坐标三点形的三条边A_2A_3、A_3A_1、A_1A_2 在笛氏坐标系里的方程分别为

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases} \tag{1}$$

三边到点 $P(x,y)$的有向距离为

$$d_i=\frac{a_ix+b_iy+c_i}{\pm\sqrt{a_i^2+b_i^2}} \qquad (i=1,2,3)$$

设点P的射影坐标为(x'_1,x'_2,x'_3)，则

$$\rho x'_i=\frac{d_i}{e_i}=\frac{a_ix+b_iy+c_i}{\pm e_i\sqrt{a_i^2+b_i^2}} \qquad (i=1,2,3)$$

设 $k_i=(\pm e_i\sqrt{a_i^2+b_i^2})^{-1}$，则$k_i$为常数，这时

$$\begin{cases} \rho x'_1=k_1(a_1x+b_1y+c_1) \\ \rho x'_2=k_2(a_2x+b_2y+c_2) \\ \rho x'_3=k_3(a_3x+b_3y+c_3) \end{cases}$$

因为三点形的三边不共点，所以$|a,b,c|\neq 0$。

设 $k_ia_i=a_{i1}$，$k_ib_i=a_{i2}$，$k_ic_i=a_{i3}$，上式可写成

$$\begin{cases} \rho x'_1=a_{11}x+a_{12}y+a_{13} \\ \rho x'_2=a_{21}x+a_{22}y+a_{23} \\ \rho x'_3=a_{31}x+a_{32}y+a_{33} \end{cases} \qquad |a_{ij}|\neq 0,\ \rho\neq 0$$

这就是齐次射影坐标 (x'_1,x'_2,x'_3) 与笛氏坐标(x,y) 之间的关系。

若将(x,y)换成齐次坐标(x_1,x_2,x_3)则上式成为

$$\rho x'_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j \quad (i=1,2,3),\ |a_{ij}|\neq 0 \qquad (5\cdot16)$$

这就是两种齐次坐标的转换关系。这是一个非奇线性函数，因而可得如下定理：

定理5·28 平面上一个点的笛氏坐标与射影坐标的转换

关系是非奇线性变换。

类似于直线坐标的情形可推出：

定理5·29 平面上点的射影坐标与另一种射影坐标的变换是非奇线性变换。

下面证明，用射影坐标表示的交比，在形式上和笛氏坐标是一样的。

我们在射影平面上选定一个射影坐标系和一个笛氏坐标系，它们之间的变换式由（5·16）式决定。

设 A、B、C、D 是直线 l 上的四个不同点，它们的射影坐标分别为 x'、y'、$x'+\lambda_1 y'$、$x'+\lambda_2 y'$。利用（5·16）式的逆变换式可知，A、B、C、D 的笛氏坐标分别为 x、y、$\sigma_1 x+\lambda_1\sigma_2 y$、$\sigma_1 x+\lambda_2\sigma_2 y$。由此可见，在射影坐标里

$$(AB,CD)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

详细证明过程留给读者。

4 直线和曲线的射影坐标方程

设在笛氏齐次坐标系里，直线 l 的方程是

$$ax_1+bx_2+cx_3=0 \qquad (1)$$

若(x_1,x_2,x_3)在另一射影齐次坐标系里的坐标是 (x'_1,x'_2,x'_3)，由坐标转换公式有：

$$\rho x'_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j, \quad |a_{ij}|\neq 0 \qquad (i=1,2,3)$$

由此可解出

$$\sigma x_i=\sum_{j=1}^{3}b_{ij}x'_j, \quad |b_{ij}|\neq 0 \qquad (i=1,2,3)$$

代入方程（1）整理后即得：

$$a'x'_1+b'x'_2+c'x'_3=0$$

这就是直线 l 在齐次射影坐标系里的方程。

反过来，在齐次射影坐标系里的一次方程必是直线，这可

用同样的道理来证明。

同理可以知道，二次曲线的射影坐标方程仍是二次方程（非退化的）等等。

我们看出，直线方程在齐次笛氏坐标系里和在齐次射影坐标系里是完全一致的，因此在射影坐标系里可以完全同样地建立线坐标，点方程。

例1 从坐标变换式

$$\begin{cases} \rho x'_1 = -x_1 + x_2 + x_3 \\ \rho x'_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \rho x'_3 = x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \quad (1)$$

求出每一坐标三点形的三边关于另一坐标三点形所建立的坐标系下的方程。

解 设两个坐标三点形所建立的坐标系如图5·45.

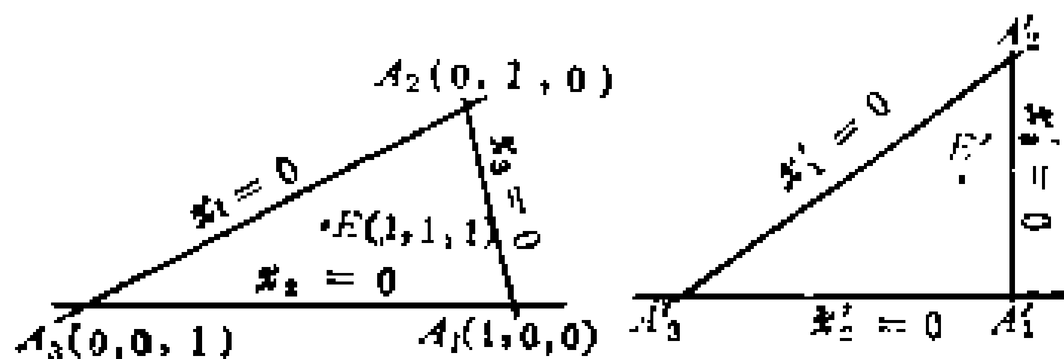


图5·45

首先求（1）式的逆变换，令$\rho' = \dfrac{1}{\rho}$遍乘（1）式两端得

$$\begin{cases} x'_1 = -(\rho' x_1) + (\rho' x_2) + (\rho' x_3) \\ x'_2 = (\rho' x_1) - (\rho' x_2) + (\rho' x_3) \\ x'_3 = (\rho' x_1) + (\rho' x_2) - (\rho' x_3) \end{cases}$$

就$\rho' x_i$解方程组得：

$$\begin{cases} \rho' x_1 = \dfrac{1}{2}(x'_2 + x'_3) \\ \rho' x_2 = \dfrac{1}{2}(x'_1 + x'_3) \\ \rho' x_3 = \dfrac{1}{2}(x'_1 + x'_2) \end{cases}$$

或写成

$$\begin{cases} \sigma x_1 = x'_2 + x'_3 \\ \sigma x_2 = x'_1 + x'_3 \\ \sigma x_3 = x'_1 + x'_2 \end{cases} \qquad (2)$$

在坐标系〔A_1, A_2, A_3, E〕和坐标系〔A'_1, A'_2, A'_3, E'〕下，每一三点形的三条边关于另一坐标系的方程分别是：

在〔A_1, A_2, A_3, E〕中	在〔A'_1, A'_2, A'_3, E〕中
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x'_2 + x'_3 = 0 \\ x'_1 + x'_3 = 0 \\ x'_1 + x'_2 = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x'_1 = 0 \\ x'_2 = 0 \\ x'_3 = 0 \end{cases}$

例 2　如果两个坐标系的坐标三点形相同但单位点不同，那么两种坐标之间的变换关系如何？

解　根据坐标变换公式（5・16）

$$\rho x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j, \quad |a_{ij}| \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

又已知

$$A_1(1,0,0) \longrightarrow A'_1(1,0,0)$$
$$A_2(0,1,0) \longrightarrow A'_2(0,1,0)$$
$$A_3(0,0,1) \longrightarrow A'_3(0,0,1)$$
$$E(1,1,1) \longrightarrow E'(p_1, p_2, p_3)$$

可以得出：

$$\begin{cases} \rho_1 = a_{11} \\ a = a_{21} \\ 0 = a_{31} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = a_{12} \\ \rho_2 = a_{22} \\ 0 = a_{32} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = a_{13} \\ 0 - a_{23} \\ \rho_3 = a_{33} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_4 p_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ \rho_4 p_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ \rho_4 p_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{cases}$$

令 $\rho_4 = 1$，则 $\rho_1 = p_1$，$\rho_2 = p_2$，$\rho_3 = p_3$，所以可求出：

$$\begin{cases} a_{11} = p_1 \\ a_{22} = p_2 \\ a_{33} = p_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{12} = a_{13} = 0 \\ a_{21} = a_{23} = 0 \\ a_{31} = a_{32} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

将（1）代入（5·16）有：

$$(5\cdot17)\begin{cases} \sigma x'_1 = p_1 x_1 \\ \sigma x'_2 = p_2 x_2 \\ \sigma x'_3 = p_3 x_3 \end{cases}, \qquad D = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

这就是说每一对对应点在三个轴上的相应坐标各是另一坐标的倍数。

5　射影变换的坐标表示

为得到射影变换的坐标表示，我们先研究射影变换和射影坐标系的关系。

定理5·30　在射影变换下，射影坐标系变成一个新的射影坐标系，而且每个点 M 变成这样的点 M'，它关于新坐标系的坐标与点 M 关于原坐标系的坐标相同；反之，具有这种性质的每一变换是射影变换。

证明　容易证明射影变换把不共线的三点变成不共线的三点。设〔A_1, A_2, A_3, E〕是一个射影坐标系，于是经过射影变换后，它变成一个新的射影坐标系〔A'_1, A'_2, A'_3, E'〕，其中 A'_1、A'_2、A'_3、E' 分别为点 A_1、A_2、A_3、E 的象（图5·46）。设 P 是平面上的任一点，它关于坐标系〔A_1, A_2, A_3, E〕的坐标为(x_1, x_2, x_3)，利用点的坐标的定义和射影变换的性质可以证明点 P 的象点P'在坐标系〔A'_1、A'_2、A'_3、E'〕的坐标也是(x_1, x_2, x_3)，详细证明留给读者。

反之，对于任意两个射影坐标系〔A_1, A_2A_3, E〕和〔A'_1，

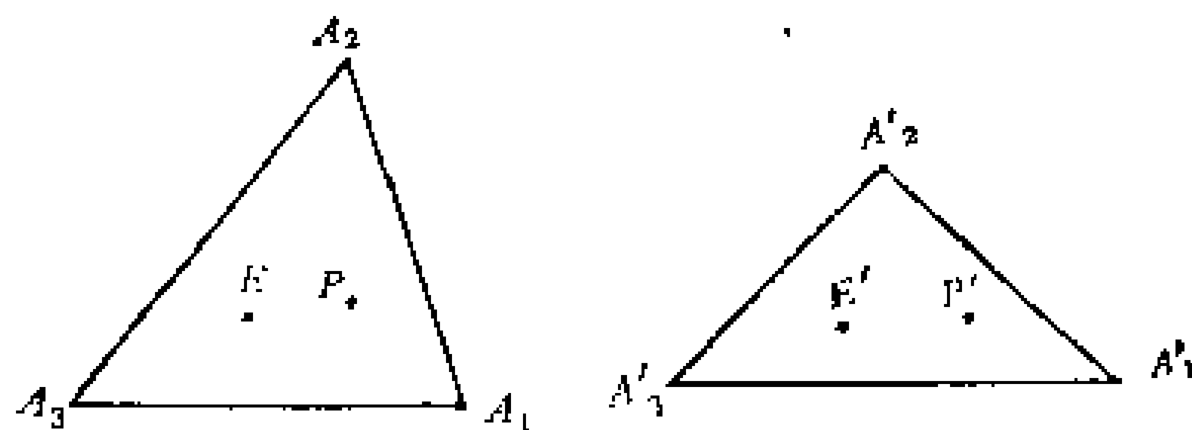


图5・46

A'_2, A'_3, E'〕，设平面上的任一点M关于坐标系〔A_1, A_2, A_3, E〕的坐标为(x_1, x_2, x_3)，定义象点M'关于坐标系〔A'_1, A'_2, A'_3, E'〕的坐标也是(x_1, x_2, x_3)。我们证明这个映射是射影变换。

根据射影变换的定义，只需证明这个映射把共线点变成共线点且保持交比不变。但是我们知道，三点共线的条件和交比都可以用点的坐标表示，并且表达式与坐标系的选择无关。因为关于所定义的映射，任意点和象点在两个坐标系中的坐标完全相同，所以它满足射影变换的条件。显然，这个映射是一一对应。因此这个映射是射影变换。

根据上一定理容易推出射影变换的一个基本定理：

定理5・31 平面上的一个射影变换，由每三点都不共线的四对对应点所唯一决定。

现在我们可以导出射影变换的坐标表示。

设σ是一个射影变换，它把射影坐标系〔A_1, A_2, A_3, E〕变成射影坐标系〔A'_1, A'_2, A'_3, E'〕。则这两个坐标系之间的坐标变换公式由(5・16)式所决定。设平面上任一点M和象点M'，关于坐标系〔A_1, A_2, A_3, E〕的坐标分别为(x_1, x_2, x_3)和(x'_1, x'_2, x'_3)，我们来研究(x_1, x_2, x_3)和(x'_1, x'_2, x'_3)之间的关系。

因为点M'关于坐标系〔A'_1, A'_2, A'_3, E'〕的坐标与点M关于坐标系〔A_1, A_2, A_3, E〕的坐标相同。这就是说，点M'关于新坐标系的坐标为(x_1, x_2, x_3)，而关于原坐标系的坐标为(x'_1, x'_2, x'_3)。所以，问题变成了寻求点M'关于两个射影坐标系的坐标

之间的关系。因此，利用坐标变换公式（5・16），得到

$$\begin{cases} \rho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

由射影变换定义易知 $|a_{ij}| \neq 0$。这就是射影变换 σ 的坐标表示。

反过来，在任意射影坐标系〔A_1, A_2, A_3, E〕中，由（5・16）式所给出的点 $M(x_1, x_2, x_3)$ 对应点 $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ 的变换是射影变换。因为，由（5・16）式，可建立一个新的射影坐标系〔A'_1, A'_2, A'_3, E'〕，使它们之间的变换式恰好是（5・16）。在这两个坐标系中，把坐标相同的点对应起来的变换显然是射影变换，由前面的结论，这个变换就是（5・16）式表示的。因此，它所表示的变换确实是射影变换。

例 3 已知平面上四个点(1,0,1)、(0,1,1)、(1,1,1)、(0,0,1)依次对应于四个点(1,0,0)、(0,1,0)、(0,0,1)、(1,1,1)。求这四对对应点所决定的射影变换。

解 将四对对应点的坐标分别代入射影变换式（5・16）中，得：

$$\begin{cases} \rho_1 = a_{11} + a_{13} \\ 0 = a_{21} + a_{23} \\ 0 = a_{31} + a_{33} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = a_{12} + a_{13} \\ \rho_2 = a_{22} + a_{23} \\ 0 = a_{32} + a_{33} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ 0 = a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ \rho_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_4 = a_{13} \\ \rho_4 = a_{23} \\ \rho_4 = a_{33} \end{cases}$$

解方程组得：

$$\begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{21} = -\rho_2 \\ a_{31} = -\rho_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{12} = -\rho_4 \\ a_{22} = 0 \\ a_{32} = -\rho_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{13} = \rho_4 \\ a_{23} = \rho_4 \\ a_{33} = \rho_4 \end{cases}$$

又 $\rho_2 = a_{22} + a_{23} = 0 + \rho_4$，即 $\rho_2 = \rho_4$

所以所求的射影变换公式为

$$\begin{cases} \rho x_1' = \quad - x_2 + x_3 \\ \rho x_2' = - x_1 \quad + x_3 \\ \rho x_3' = - x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$$

最后，应该注意的是，虽然射影变换的坐标表达式在形式上和两个射影坐标系之间的坐标变换公式一样，但意义是完全不同的。在射影变换中，坐标系不动而点变动；在坐标变换公式中，点不动而坐标系变动。这种情形我们在研究正交变换和仿射变换时都遇到过。

§ 4　几种几何的比较

本节研究平面上射影变换群与仿射变换群、正交变换群等的从属关系，从而用克莱因的几何学群论原则将各变换群对应的几何，即射影几何、仿射几何、欧氏几何统一起来，并对它们的几何性质加以比较。

4·1　射影变换群的几何——射影几何学

1　射影变换群

前一节根据点场的射影变换的定义，直接推出平面上点场的射影变换全体是一个群，简称射影群。

下面再从射影变换的公式说明全部射影变换也构成群。

已知两个射影变换：

$$\sigma_1:\ \rho x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j, \quad |a_{ij}| \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\sigma_2:\ \rho' x_k'' = \sum_{i=1}^{3} b_{ki} x_i', \quad |b_{ki}| \neq 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

将 $\rho x_i'$ 代入变换 σ_2，则得：

$$\sigma_2\sigma_1:\ \rho' x_k'' = \sum_{i=1}^{3} b_{ki} \left(\frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \right)$$

$$=\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}b_{ki}a_{ij}x_j$$

用矩阵表示就是：

$$\sigma_1\sigma_2:\quad \rho\rho'\begin{pmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{pmatrix}=BA\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad A=(a_{ij}),B=(b_{ki})$$

或 $$\sigma_2\sigma_1:\quad \lambda\begin{pmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

其中$C=BA=(c_{kj})$，$C_{kj}=\sum_{i=1}^{3}b_{ki}a_{ij}$

因为$|C|=|B||A|\neq0$，所以证出两个射影变换σ_1和σ_2的积仍是射影变换。

又变换σ_1的逆变换

$$\sigma_1^{-1}:\quad \lambda_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix},\qquad |A^{-1}|\neq0$$

说明 σ_1^{-1}仍是射影变换。

保持每点不变的变换是恒等变换。由此推出平面上的射影变换全体构成群。

2　射影变换群的几何——射影几何

根据克莱因提出的几何学群论原则，我们已经知道，射影几何是射影变换群所对应的几何学，它所研究的对象是射影变换群中所有变换下的不变性质和不变量，即研究射影变换群中所有变换下的不变性质和不变量的命题系统。

例如平面射影几何的基本元素是射影平面上的点和直线，基本关系是射影的结合关系、射影的顺序关系以及连续关系等。这些元素和它们之间的基本关系本章1·1段中已有较详细的论述。下面介绍用公理法建立射影几何时，这些元素和关系

都是不加定义的原始概念，它们的属性由公理来规定，即由公理间接定义。

平面射影几何所研究的内容大体上可以归纳为以下几个方面：

（1）基本的直线形。如一维基本形，二维基本形，n点形（简单的和完全的），n线形（简单的和完全的）等。本章1·5中已讲过了。

（2）对偶关系和对偶原理。本章1·5已讲过了。

（3）射影坐标。这是研究射影几何的工具，即用代数法研究射影几何的基础，本章所介绍的齐次坐标和射影坐标就是。但前者是在笛氏坐标的基础上建立的，后者借用了度量性质定义交比的概念，在纯射影几何里应排除度量性质来定义，因为度量性质不是射影变换下的不变量。下面将给出建立纯射影坐标系的一种方法。

（4）一维基本形上四元素的交比和调和比。本章所讲述的交比概念及性质，除了交比这一概念使用度量性质定义应加以改造外，其余的性质都是射影性质。

（5）射影对应和射影变换。主要研究一维基本形之间的射影对应和变换、二维基本形的射影变换，这主要是研究点场的射影变换，也包含异素变换，如第六章中的配极变换等。

（6）二次曲线的射影性质。这是第六章§1详细讨论的。

（7）其他射影几何所研究的性质。

从以上所列平面射影几何研究的内容不难看出，本章§1～3中所讨论的问题，实际上都是射影几何所要讨论的问题。但必须注意，我们在讨论这些问题的时候，是在欧氏平面或仿射平面上来讨论的，使用了长度、平行、垂直这样一些概念和性质，而它们都不是射影变换下的不变量和不变性质。因为我们的目的，主要地不在于研究纯射影几何，而在于研究正交、仿射、射影变换之间的关系；研究正交、仿射、射影变换群之

间的关系；研究欧氏、仿射、射影几何之间的密切联系，突出几何性质。其次，通过这些讨论我们也获得了在欧氏几何中全然不了解的一些射影几何的有关知识，并且许多是经过验证之后肯定为射影性质的。

在欧氏几何基础上来研究射影性质，这是常用的也是比较早的方法，它的优点就是密切了欧氏、仿射、射影性质之间的联系，因此就更有实用价值，但从克莱因观点看来，几何性质有时是混杂不清的，因此有人从纯数学角度给出一些建立纯射影几何的方法。从本书第五章前三节所讲的系统来看，其中关键问题是如何用纯射影的方法（不用度量）建立交比的定义，这个问题一解决，其他问题如射影变换等都成为纯射影的了。下面简单介绍用公理方法建立射影几何的一种方法。

射影几何的公理可以分成三组：

结合公理 I_{1-8}

顺序公理 II_{1-6}，（原始关系用分隔点对）

连续公理 III_{1}

各组公理的具体条文是：

（1）结合公理组

公理 I_1　对于任意两点 A、B，存在且只存在一条直线 a 通过点 A、B。

公理 I_2　在每条直线上，至少存在三个点。

公理 I_3　至少存在三个点，不在同一直线上。

公理 I_4　通过不在一条直线上的三个点 A、B、C，存在而且只存在一个平面 α。

公理 I_5　在每个平面上至少有一个点。

公理 I_6　如果直线 a 有两点 A、B 在平面 α 上，则直线 a 的所有点都在平面 α 上。

公理 I_7　至少有四个点不在同一平面上。

公理 I_8　如果二平面 α、β 有公共点 A，则它们至少还有一

个公共点 B。

公理Ⅰ₇ 在一平面上的两条直线必有公共点。

这些是空间射影几何公理。平面射影几何的公理应去掉公理Ⅰ₄、₅，然后补加上笛沙格命题。

（2）顺序公理组

公理Ⅱ₁ 对于直线 u 上任意不同的三点 A、B、C 存在这条直线上的点 D，使得点对 A、B 分隔点对 C、D。

公理Ⅱ₂ 如果点对 A、B 分隔点对 C、D，则点对 B、A 分隔点对 C、D，而且点对 C、D 也分隔点对 A、B。

公理Ⅱ₃ 对于任意直线 u 上任意不同的四点 A、B、C、D，总能有唯一的方法，把它们分成两个分隔的点对。

公理Ⅱ₄ 设在直线 u 上给了点 A、B、C、D、E，如果点对 C、D 和 C、E 都分隔点对 A、B，则点对 D、E 不分隔 A、B。

公理Ⅱ₅ 设在直线 u 上给了点 A、B、C、D、E，如果点对 C、D 和 C、E 都不分隔点对 A、B，则点对 D、E 也不分隔点对 A、B。

公理Ⅱ₆ 设 A、B 和 C、D 是直线 u 上的两对点对，A'、B' 和 C'、D' 是它们从任意中心到任意直线 u' 上的射影。如果点对 A、B 和 C、D 互相分隔，则点对 A'、B' 和 C'、D' 也互相分隔。

（3）连续公理

公理Ⅲ₁ 设任意直线 u 上，在一点 O_∞ 处切开，则戴德金命题成立。

从公理系统上我们看出，射影几何与欧氏几何有着非常大的区别。

本书在建立射影坐标系时，主要根据射影不变量——四点的交比来定义。但是，四点的交比又是怎样定义的呢？我们是把它定义为简单比之比，即

$$(AB,\ CD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}$$

显然这是根据度量性质给出的，因为简单比本身就是用线段长

度定义的。因此，这个交比的定义不是纯射影几何里的定义。

在纯射影几何里，有这样一种方法：首先给出调和点对的定义，它是通过完全四点形给出的。我们知道，已知射影直线上的三个不同的点A、B、C只用一根直尺就可通过完全四点形的调和性作出它的第四调和点D，如图5·47所示，这是纯射影的方法。其次通过调和分隔和连续性建立一维射影坐标系：

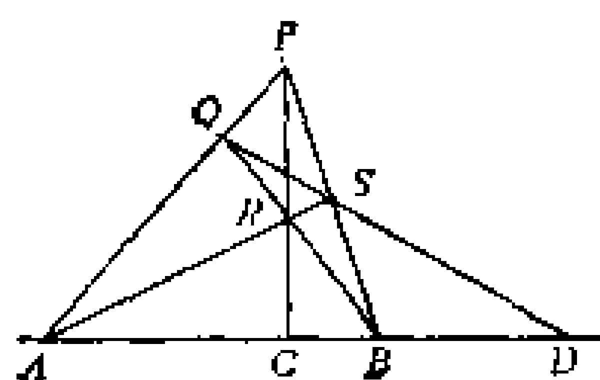


图5·47

设给定射影直线a，在它上面取三点A_1、A_2、E，并令A_2、E分别与数0、1对应，而A_1与记号∞相对应。在∞处把直线切开，引进线性顺序，使点0在点1前面。然后引进其它点的坐标：与0配成点对且与点对1、∞调和共轭的点记作数2，这时点2在点1的后面；与点1配成点对且与点对2、∞调和共轭的点记作数3，……（图5·48）。这以后再把与1配成点对且与点对0、∞调和共轭的点记作数-1；把与点0配成点对且与点对-1、∞调和共轭的点记作数-2；……。这样就对整数点建立了整数的坐标。关于有理点的坐标，可以通过射影中点的概念给出，即（AB、$C\infty$）成调和共轭时，称点C为A、B的射影中点。这样点对0、1的射影中点记作数$\frac{1}{2}$，点对1、2的中点记作数$\frac{3}{2}$，点对0、-1的中点记作数$-\frac{1}{2}$，……，从而可以建立有理点的坐标。最后再利用连续公理用戴德金切割的方法建立无理点的坐标。可以证明射影直线上的点与实数成一一对应，从而在射影直线上建立了射影坐标。

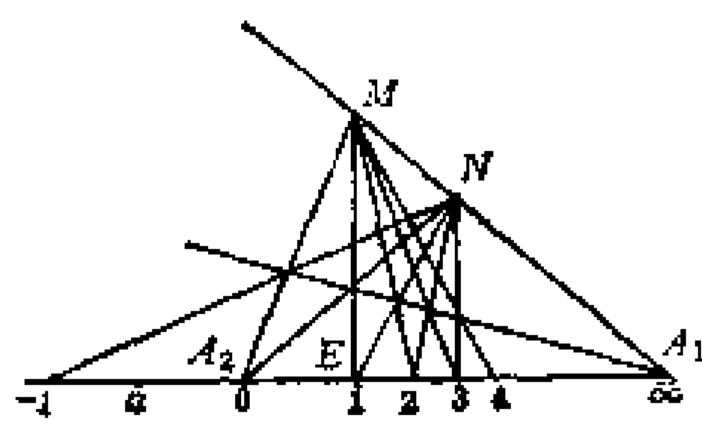


图5·48

我们看出，这样建立的射影坐标系完全舍去了度量性质。

利用这样的坐标系，直线上四点 $P_1(x_1)$、$P_2(x_2)$、$P_3(x_3)$、$P_4(x_4)$ 的交比就定义为：

$$(P_1P_2, P_3P_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$$

如果它们是调和点对，则有：

$$(P_1P_2, P_3P_4) = -1$$

关于平面上二维射影坐标系的建立和我们以前建立一维射影坐标系的方法类似．先取坐标三点形 $A_1A_2A_3$ 和单位点 E，以 A_1、A_2 为中心将 E 投影到坐标轴 A_3A_2 和 A_3A_1 上，投影点的坐标都记作数1（图5·49）．这样就决定了射影坐标系〔A_1,A_2,A_3,E〕．对于平面上任一点 P，再通过中心射影到两轴上，得投影点 P_x、P_y，记 P_x 的坐标为 x，P_y 的坐标为 y．则点 P 的坐标规定为（x, y），当然点 E 的坐标为（1，1），点 A_3 的坐标为（0，0），这样除了 A_1A_2 直线上的点都有非齐次坐标．为了规定 A_1A_2 上点的坐标，再利用我们前面讲过的方法引进齐次坐标，就可以建立平面上所有点的齐次坐标了．在这个坐标系里可以象解析几何一样来讨论直线或曲线的方程．总之可以用纯射影的方法研究所有的射影性质，包括射影变换也是非奇线性变换．这种研究射影几何的方法是纯射影几何的方法，和本书所采用的方法完全不同．关于这部分内容读者可参看叶菲莫夫著“高等几何”下册的有关内容．

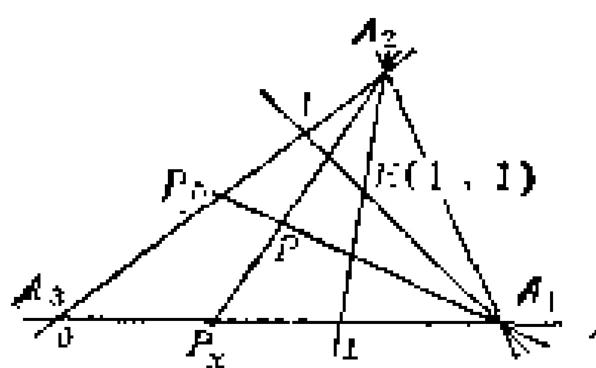


图5·49

4·2 射影变换群及其重要的子群

1 从基本不变量来看

射影变换群的基本不变量是交比；仿射变换群的基本不变量是简单比；相似变换群的基本不变量是相似比；正交变换群的基本不变量是距离或长度．而每个变换都是通过结合关系和

对应的基本不变量定义的。很显然，在变换下保持长度不变就能保持相似比不变；而保持相似比不变就能保持简单比不变，因为简单比就是线段的比；而保持简单比不变就能保持交比不变，因为交比是简单比的比值。但是反过来不成立，即保持交比不变不一定保持简单比不变；而保持简单比不变不一定保持所有对应线段的比不变，即相似比不变；而相似比不变不能保持距离不变。但所有这些变换都能保持结合关系不变，即共线点变成共线点，共点线变成共点线。因此必有：

射影群⊃仿射群⊃相似群⊃正交群。

其中“⊃”表示左边包含右边，或右边是左边的子群。

2　从变换的坐标表示来看

射影变换的齐次坐标表示式是：

$$(P)\begin{cases}\rho x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \rho x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ \rho x'_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{cases},\quad \begin{matrix}|a_{ij}|\neq 0\\ \rho\neq 0\end{matrix}$$

（1）仿射变换群

一般地，平面上的射影变换不区分无穷远直线和有穷远直线，有穷远直线可以变成无穷远直线，无穷远直线也可以变成有穷远直线。但如果把无穷远直线特殊对待，即平面上的射影变换中，把无穷远直线必须变成无穷远直线，把有穷远直线必须变成有穷远直线，这种特殊的射影变换就是仿射变换。

因为$x_3=0$变成$x'_3=0$，因此把无穷远点$(x_1,x_2,0)$变成无穷远点$(x'_1,x'_2,0)$，其充分必要条件是$a_{31}=a_{32}=0$。因此变换(P)变成

$$(A)\begin{cases}\rho x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \rho x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ \rho x'_3=\qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3\end{cases},\quad \begin{matrix}|a_{ij}|\neq 0\\ (a_{33}\neq 0)\end{matrix}$$

(A)就是仿射变换的齐次坐标表示式。

因为每个有穷远点的坐标 $x_3\neq 0$，用(A)中的第三式去除

前两个，且令

$$\frac{x_1}{x_3}=x,\quad \frac{x_2}{x_3}=y,\quad \frac{x_1'}{x_3'}=x',\quad \frac{x_2'}{x_3'}=y'$$

则(A)变成非齐次坐标表示

$$\begin{cases} x'=a_1x+b_1y+c_1 \\ y'=a_2x+b_2y+c_2 \end{cases}\qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

$\Delta\neq 0$保证变换是一一对应，否则就不是一一的。这个变换式就是第四章讲过的仿射变换。

和证明射影变换构成群一样地可以根据(A)证明仿射变换构成群，而且是射影群的子群。

定义 设给了任意空间M的某个变换群G。如果群G里的变换把空间M的一个子集U变换成它自身，则这个变换叫做关于集合U的自同构变换，简称关于集合U的自同构变换。

容易证明，群G里关于集合U的所有自同构变换全体是一个群。

仿射变换群是平面上射影变换中关于无穷远直线的自同构群。这条不变的直线称为仿射变换的绝对形。

（2）相似变换群

仿射变换是把无穷远直线变成无穷远直线的特殊射影变换，也就是射影变换中关于无穷远直线的自同构变换。所谓把无穷远直线变成无穷远直线，也只是把无穷远点变成无穷远点，并不是说每个无穷远点都一定变成自身，一个无穷远点也可能变成另一个无穷远点。如果仿射变换使无穷远直线上的两个特殊的点$I(1,i,0)$和$J(1,-i,0)$保持不变，就是相似变换。这两个虚点称为圆点，关于它们的定义和性质，将在第六章§3讨论，这里只要知道这两个点就够了。

相似变换群是平面上射影变换中关于无穷远直线和圆点的自同构群。这条直线和两个点称为相似变换的绝对形。

通过计算可以知道，如果仿射变换是：

$$
(A)\begin{cases} \rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x_3' = \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 \end{cases}, \quad |a_{ij}| \neq 0
$$

且保持两个圆点变成自身或互相变成对方，则（A）就化成非奇次坐标式，即相似变换

$$
(S)\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + c_1 \\ y' = \varepsilon(\beta x + \alpha y) + c_2 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \varepsilon\beta & \varepsilon\alpha \end{vmatrix} \neq 0, \varepsilon = \pm 1
$$

平面上所有相似变换构成群，它是仿射变换群的子群。

注　为方便起见，（S）的形式采取了和第四章稍微不同的形式。

（3）正交变换群

第四章我们已知正交变换的坐标表示是：

$$
(M)\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}, \quad a_1^2 + b_1^2 = 1,\ a_2^2 + b_2^2 = 1,\ a_1a_2 + b_1b_1 = 0
$$

这是带有特殊条件的仿射变换。利用这个条件（M）也可以写成：

$$
\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + c_1 \\ y' = \varepsilon(\beta x + \alpha y) + c_2 \end{cases}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1,\ \varepsilon = \pm 1
$$

平面上的所有正交变换的集合构成群。并且因为它满足相似变换（S）的条件：

$$
\begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \varepsilon\beta & \varepsilon\alpha \end{vmatrix} = \varepsilon\alpha^2 + \varepsilon\beta^2 \neq 0
$$

可见正交变换一定是相似变换，但反过来则不一定。因此，正交变换群是相似变换群的子群。

综上所述，我们得出：

射影群⊃仿射群⊃相似群⊃正交群。

4·3　射影、仿射、相似、正交几何之间的比较

我们已经研究了射影群、仿射群、相似群、正交群（或运动群）的从属关系，这些群所对应的几何学分别是射影几何、仿射几何、相似几何和正交（或运动）几何，这样就从群论的

观点把几种重要的几何学统一了起来，而又把过去混淆不清的各种几何学所应研究的对象明确地区分开来。

我们已经指出过变换群越大，其对应的几何学内容越贫乏，变换群越小所对应的几何学内容越丰富。因而从几何学的内容来看，必有射影几何⊂仿射几何⊂相似几何⊂正交几何但从纯粹的射影几何体系来看，如果在射影几何里建立射影形式下的度量、平行线、垂直线等等，则在射影几何里可以导出仿射、欧氏，甚至非欧几何学。在射影观点下，射影几何又包含着所以这些几何学。

为了能更清楚地比较四种几何的内容，我们列出下表：

名称	射影几何	仿射几何	欧几里得几何	
			相似几何	正交（运动）几何
变换群	射影群	仿射群	相似群	正交群
变换式	$\rho x'_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j$ $i=1,2,3$ $\lvert a_{ij}\rvert\neq0$	$\begin{cases}x'=a_1x+b_1y+c_1\\ y'=a_2x+b_2y+c_2\end{cases}$ $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\ a_2&b_2\end{vmatrix}\neq0$	$x'=\alpha x-\varepsilon\beta y+c_1$ $y'=\beta x+\varepsilon\alpha y+c_2$ $\alpha^2+\beta^2=k^2$ $\varepsilon=\pm1$	$x'=\alpha x-\varepsilon\beta y+c_1$ $y'=\beta x+\varepsilon\alpha y+c_2$ $\alpha^2+\beta^2=1$ $\varepsilon=\pm1$
研究对象	射影性质 射影不变量	纯仿射性质 纯仿射不变量 射影性质 射影不变量	纯相似性质 纯相似不变量 纯仿射性质 纯仿射不变量 射影性质 射影不变量	纯度量性质 纯度量不变量 纯相似性质 纯相似不变量 纯仿射性质 纯仿射不变量 射影性质 射影不变量
主要不变性质	结合性 分隔性	结合性 平行性	结合性 平行性 保角性	结合性 平行性 相等性
基本不变量	交比	简单比	相似比	距离
基本不变图形		无穷远直线	无穷远直线 圆　　点	同　左

我们以几何学的群论原则为主线，通过第四章和第五章，

介绍了四种重要的变换，以及它们的基本性质和应用，介绍了这四种变换群的从属关系，从而把它们统一在射影变换群里，这样就用变换群的观点统一了它们所对应的四种几何。我们也介绍了四种几何的主要不变性质和不变量，而且着重介绍了平面射影几何的基础理论和方法，使我们对射影几何有一个基本的认识。

二次曲线也是欧氏、仿射和射影几何研究的重要对象，为了集中研究它们的射影性质、仿射性质和度量性质，深化对二次曲线的认识，也便于比较，我们把二次曲线的理论放在下一章里研究。

习　　题

§ 1

1．设A、B、C、D、E 是一条直线上的五个点，并且 A、$B\div C$、D；A、$B\div C$、E 则A、$B \dot{-} D$、E。

2．设A、B、C、D、E 是一条直线上的五个点，并且 A、$B\div C$、D；A、$B \dot{-} D$、E，则有 A、$B\div C$、E。

3．试求下列诸点的齐次坐标：

（1）$(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$，$\left(2,-\frac{5}{3}\right)$。

（2）以$\frac{3}{4}$为方向的无穷远点

（3）$3x+y=0$上的无穷远点。

（4）坐标轴上的无穷远点。

4．若存在，求下列各点的非齐次坐标：

$(2,4,-1)$，$(\sqrt{10},\ -\sqrt{6},\ 2)$，$(0,1,0)$，$(0,4,3)$。

5．求下列直线上的无穷远点：

（1）$x_1+x_2-4x_3=0$；

（2）$x_1+2x_2=0$；

（3）$x_1+5x_3=0$。

6．写出平面上椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，虚椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，抛物线 $y^2=2px$ 的齐次坐标方程，然后求出它们和扩大平面上无穷远直线 l_∞ 的交点。

7．求以 $2x_1+x_2+x_3=0$，$3x_1-4x_2+2x_3=0$，$4x_1+x_2-3x_3=0$为边的三角形顶点的坐标。

8．求下列各线的坐标（齐次与非齐次）：

x 轴，y 轴，无穷远直线，过原点斜率为 4 的直线。

9．求下列各线坐标所表示的直线的点坐标方程：

$(0,1,1)$，$(1,1,-1)$，$(1,0,1)$，$(1,-1,0)$。

10．求下列各点的线坐标方程：

（1）x 轴上的无穷远点。

（2）y 轴上的无穷远点。

（3）以$-\frac{1}{2}$为方向的无穷远点。

（4）$(2,4,-3)$。

11．（1）求过点$(1,-i,2)$的实直线。

（2）求直线$(i,2,1-i)$上的实点。

12．试证：两复点所确定的复直线与它们的共轭复点所确定的复直线构成一对共轭复直线。

13．试证：三点$(1+i,-1+i)$，$(1,1+i)$，$(i,-1-i)$共线。

14．求圆$x_1^2+x_2^2=5x_3^2$ 与圆$(x_1-3x_3)^2+x_2^2=8x_3^2$的交点。

15．试作下面图形的对偶图形：



（15题）

16．试述下面命题的对偶命题：

"设一个可变动的三角形，它的二边各通过一个定点，而三顶点始终在共点的三条定直线上，那么，第三边也通过一个定点。"

§ 2

17．已知两个点 A 和 B，试作点 M，使简单比 (ABM) 分别等于 -2，-1，$-\frac{1}{2}$，0，$\frac{1}{2}$，1，2。

18．试证：$(AB,PQ)(AB,QR)=(AB,PR)$。

19．已知一条直线上的四个点 A、B、C、D，其中相邻两点距离相等．试计算这四点交比的所有值。

20．设点 P_1、P_2、P_3 坐标分别为 $(1,1,1)$、$(1,-1,1)$、$(1,0,1)$ 且 $(P_1P_2,P_3P_4)=3$，求 P_4 点的坐标。

21．已知三个共线点 $A(0)$，$B(1)$，$C(-2)$，试确定第四点 D，使

$$(AB,CD)=-3$$

22．已知 A、B、C、D 为调和点，试证这四点所组成的交比的所有值为：-1，2，$\frac{1}{2}$。

23．设 $(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3\lambda_4)=-1$，试证

$$\frac{2}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}$$

一般情况若 $(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3\lambda_4)=k$，则

$$\frac{1-k}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}-\frac{k}{\lambda_3-\lambda_1}$$

24．设 A、B、C、D 为共线四点，O 为 CD 中点，且 $OC^2=OA\cdot OB$，求证

$$(AB,CD)=-1$$

25．试证：在 x 轴上，由方程 $a_{11}x^2+2a_{12}x+a_{22}=0$，$b_{11}x^2+2b_{12}x+b_{22}=0$ 的根所决定的两个点对，成调和共轭的充分必要

条件为

$$a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12}+a_{22}b_{11}=0$$

26．已知 $\triangle ABC$ 及平面上一点 P（不在任一边上），连结 AP、BP、CP 与对边交于 A'、B'、C'，且 $A_1=BC\times B'C'$，$B_1=CA\times C'A'$，$C_1=AB\times A'B'$，求证：

（1）$(BC,A_1A')=-1$，$(CA,B_1B')=-1$，$(AB,C_1C')=-1$。

（2）A_1、B_1、C_1共线。

27．$\angle(a,b)=120°$，直线m把它分成两个角 $\angle(a,m)$和$\angle(b,m)$，它们的比分别等于 $-\frac{1}{3}$，-1，0，$\frac{1}{4}$，5，试决定对应的(abm)值。

28．设A、B、C、D是一个圆上的四点，P为圆上任意一点，试证四直线的交比$(PA\quad PB,PC\quad PD)$是常数。

29．若直线 l_1、l_2、l_3、l_4的方程分别为

$$x-y=0,\ 2x+y=0,\ x+y=0,\ 3x-y=0,$$

求$(l_1l_2,\ l_3l_4)$。

30．若直线 l_1、l_3、l_4 的方程分别为

$$2x_1+x_2-x_3=0,\ x_1-x_2+x_3=0,\ x_1=0$$

且 $(l_1l_2,l_3l_4)=-\frac{2}{3}$，求 l_2的方程。

31．已知一个简单四边形$abcd$与直线 l，试在 l 上求四个点 A、B、C、D 使

$$(AB,CD)=(A_\infty B_\infty,C_\infty D_\infty)$$

其中 A_∞、B_∞、C_∞、D_∞ 表示已知四边形各边上的无穷远点。

32．已知两个点A和B以及直线AB上的点M（在线段AB的外部），求作点M关于点对A、B的调和共轭点。

33．已知一个线束的三条直线 a、b、c，试作与直线c调和共轭的第四条直线。

34．已知无穷远直线上同时又在已知$\triangle ABC$边上的三个无

穷远点，试在无穷远直线上作第四调和点。

35. 设X、Y、Z是完全四点形$ABCD$的三个对边点，XZ分别交AC、BD与L、M。证明：YZ、BL、CM共点。

36. 设A、B、C是完全四线形的三个共线顶点，M、C与A, B调和共轭。求证通过A、B的对顶线的交点在M与C的对顶点的连线上。并写出对偶命题。

§ 3

37. 试证：平面上任意两个射影点列可以移动到透视位置。

38. 试证：平面上两个射影线束可以移动到透视位置。

39. 试证：点列与它射影对应的线束也有和上题类似的结果。

40. 试作两个透视线束里互相垂直的射线。并加以讨论。

41. 试证：如果两个射影线束的三个对应直线对交成同样的角，则所有对应直线对都具有这样的性质。

42. 已知两个射影点列的三对对应点，试作与第一个点列的无穷远点相对应的第二个点列的点，并作其逆。

43. 已知两个射影点列的三对对应点，试作这两个点列的公共点所对应的点，首先把这个公共点看作第一个点列里的点，其次再看作第二个点列里的点。

44. 建立射影对应，使直线l上坐标是0、1、2的三点顺次对应着直线l'上坐标是-1、0、-2的三点。将对应式写为非齐次坐标与齐次坐标两种形式，并求出每条直线上无穷远点的对应点。

45. 设两个点列同底，求一射影对应，使0、1、∞分别和1，∞，0对应。

46. 已知Ox轴上的射影变换式为：

$$x' = \frac{2x-1}{x+3}$$

试求坐标原点、无穷远点的对应点。

47．求射影变换$x'=\dfrac{-x-5}{x+1}$的二重点，并确定所属类型。

48．求使(0,0)、(1,0)、(0,1)三点分别对应(0,0)、(0,1)、(1,0)，且使 $x+y+1=0$对应无穷远直线的射影对应。

49．$\begin{cases}\rho x'_1=2x_1-x_2+x_3\\ \rho x'_2=x_1+x_2+x_3\\ \rho x'_3=4x_1-5x_2+x_3\end{cases}$

是奇异的，即 $D=0$，求证它把整个平面上的点除一点外都变到直线$3x'_1-2x'_2-x'_3=0$上。指出哪个点是例外的点。

50．试求一个线性变换，使一点有两种射影坐标，且新坐标中的基点 A_1与A_2及单位点E分别有旧坐标3、－2与5。

51．在重心坐标系下(即单位点E取坐标三点形的重心)，试求二直线$ax_1+bx_2+cx_3=0$ 与$a'x_1+b'x_2+c'x_3=0$ 的平行条件

52．试求射影变换

$$\begin{cases}\rho x'_1=x_1+x_2\\ \rho x'_2=x_2\\ \rho x'_3=x_3\end{cases}$$

的不变点。

§ 4

53．试证：一条直线上的非奇射影变换

$$\begin{cases}\rho x'_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2\\ \rho x'_2=c_{21}x_1+c_{22}x_2\end{cases}\qquad (c=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}\neq 0)$$

的全体构成群．其中$c>0$的变换全体也构成群，$c<0$的变换全体是不是构成群？

54．试证：由以下变换

$$(1)\begin{cases}\rho x'_1=x_1\\ \rho x'_2=x_2\\ \rho x'_3=x_3\end{cases}$$

（2）$\begin{cases} \rho x'_1 = -x_1 \\ \rho x'_2 = x_2 \\ \rho x'_3 = x_3 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} \rho x'_1 = x_1 \\ \rho x'_2 = -x_2 \\ \rho x'_3 = x_3 \end{cases}$

（4）$\begin{cases} \rho x'_1 = x_1 \\ \rho x'_2 = x_2 \\ \rho x'_3 = -x_3 \end{cases}$

构成有限群，并求出它的所有子群。

55．图形的射影性质与仿射性质在欧氏几何学里是否成立？为什么？

56．对偶原理在仿射几何学与欧氏几何学里是否成立？为什么？

第六章 二次曲线的射影、仿射、度量性质

在射影、仿射和欧氏几何里，都把二次曲线作为重要内容来研究．可是，我们在第四、五章里都回避了这一问题，目的是把它放在这一章里集中讨论．这样，就可以统一地用射影的观点和方法探讨二次曲线的射影、仿射和度量性质，认识三种性质之间的联系，对比它们的差异．

首先，在上一章射影坐标和射影变换的基础上，研究二次曲线的射影性质：给出二阶曲线和二级曲线的定义（它们统称二次曲线）；介绍二次曲线的两个著名定理——巴斯加（Pascal）定理和布利安桑（Brianchon）定理；介绍极点和极线的射影理论；根据射影不变量对二次曲线进行分类．

其次，在推广的平面上，突出无穷远直线作为不变直线的性质，以便用射影的观点解释和研究二次曲线的仿射性质，如中心、直径和渐近线等．再根据仿射不变量对常态的二次曲线进行分类．

最后，在推广的平面上，不但突出无穷远直线作为不变直线的性质，而且突出无穷远直线上的两个定点——圆点作为不变点的性质，以便于用射影观点解释和研究二次曲线的某些度量性质，如主轴、焦点和准线等．

把上述三种性质集中起来，就可以使我们获得更多的关于二次曲线的知识．

§ 1　二次曲线的射影性质

本节研究二次曲线在射影变换下的不变性质，即射影性质。首先建立二阶曲线和二级曲线的概念，并讨论一些基本的射影性质。然后介绍配极理论。最后给出二次曲线的射影分类。

1.1　二次曲线的射影定义

1　定义和基本性质

定义　两个射影线束对应直线的交点集合叫做二阶曲线（图6.1）。

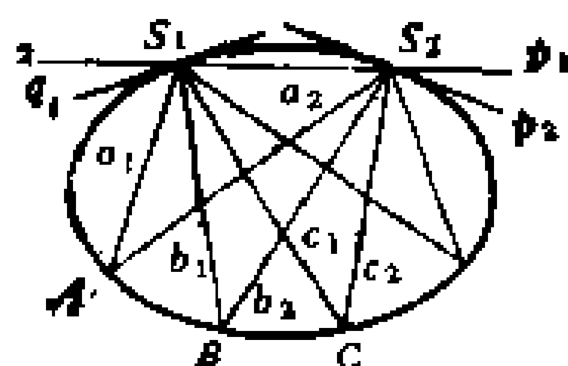


图6·1

在特殊情况下，如果两个线束 S_1 和 S_2 不但是射影的，而且是透视的，即

$$S_1(a_1, b_1, c_1\cdots)\overline{\wedge} S_2(a_2, b_2, c_2\cdots)$$

时，用 s 表示线束 S_1 和 S_2 的透视轴（图6·2）。这时，点列 s 是已知两个线束对应直线交点的集合，因此点列 s 就是二阶曲线的一部分。

定义　两个射影点列对应点连线的集合叫做二级曲线（图6.1′）。

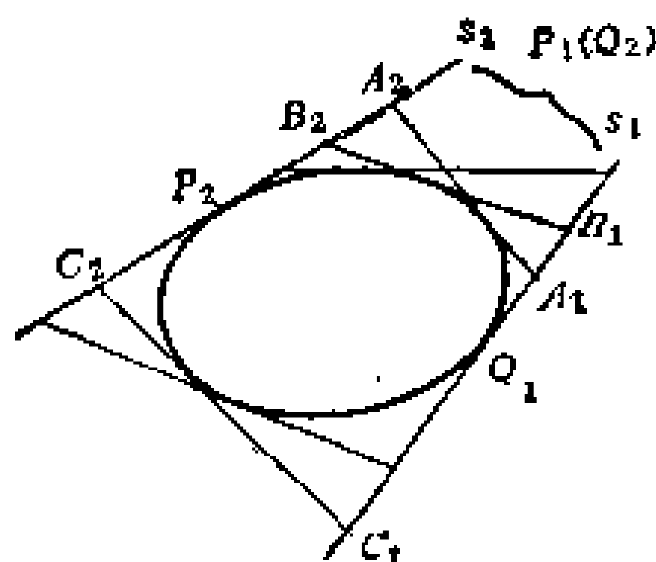


图6·1′

在特殊情况下，如果两个点列 s_1 和 s_2 不但是射影的，而且是透视的，即

$$s_1(A_1, B_1, C_1\cdots)\overline{\wedge} s_2(A_2, B_2, C_2\cdots)$$

时，用 S 表示点列 s_1 和 s_2 的透视中心（图6·2′）。这时，线束 S 是已知两个点列对应点对连线的集合，因此线束 S 就是二级曲线的一部分。

现设两个线束的公共直线 t 与透视轴 s 的交点为 T。

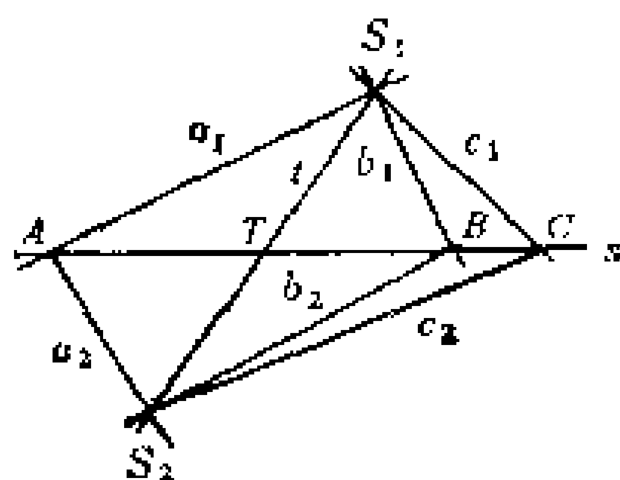


图6·2

这时，线束S_1的直线 $S_1T=t$ 对应线束S_2的直线 $S_2T=t$，所以，在公共直线 t 上的每个点都是射影线束 S_1与S_2对应直线S_1T与S_2T的交点。因此，点列 t 也是二阶曲线的一部分。

当两个成射影对应的线束共中心时，按照对应直线有一条、两条或没有重合直线的不同情况，二阶曲线将退化为一个点列、两个点列或一个点。

定义 两个不共中心的非透视的射影线束所产生的二阶曲线叫做常态的二阶曲线。两个成透视的射影线束所产生的二阶曲线叫做变态的二阶曲线。

构成二阶曲线的射影线

现设两个点列的公共点 T 与透视中心 S 的连线为 t。

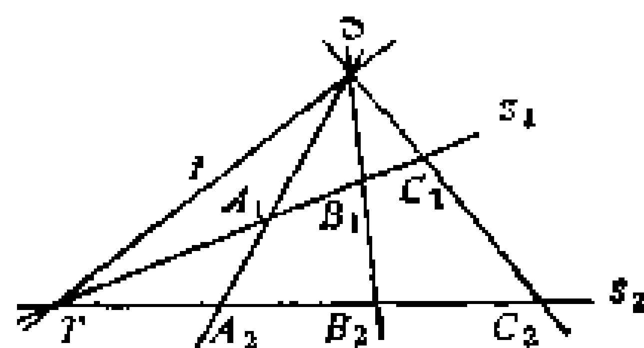


图6·2′

这时，点列s_1上的点 $(s_1t)=T$对应点列 s_2上的点$(s_2t)=T$，所以，过公共点T的每条直线都是射影点列 s_1与 s_2 的对应点(s_1t)与(s_2t)的连线。因此，线束T也是二级曲线的一部分。

当两个成射影对应的点列共底时，按照对应点有一个、两个或没有重合点的不同情况，二级曲线将退化为一个线束、两个线束或一直线。

定义 两个不共底的非透视的射影点列所产生的二级曲线叫做常态的二级曲线。两个成透视的射影点列所产生的二级曲线叫做变态的二级曲线。

构成二级曲线的射影点

束 S_1和S_2的中心S_1，S_2属于二阶曲线。

事实上，如果把两个射影线束的公共直线看作第一个线束的直线p_1，则它在第二个线束里对应一条直线p_2（图6·1）。如果再把公共直线看作第二个线束的直线q_2，则它在第一个线束里对应直线q_1。因为中心S_1和S_2是这样两对对应直线的交点：

$$S_1=(q_1\ q_2)$$

$$S_2=(p_1\ p_2)$$

所以，它们都属于二阶曲线。

定义 在两个射影线束里和它们的公共直线S_1S_2相对应的直线q_1和p_2分别叫做**二阶曲线过点S_1和S_2的切线**。

为了明确切线的几何意义，我们研究两个射影线束的一对对应直线a_1、a_2。设A是它们的交点。A点按一定方向在二阶曲线里移动，画出这个二阶曲线。当直线a_1随之沿一定方向移动时，画出线束$S_1(a_1,b_1\cdots)$，它的

列 s_1和s_2的底s_1，s_2属于二级曲线。

事实上，如果把两个射影点列的公共点看作第一个点列的点P_1，则它在第二个点列中对应一个点P_2（图6·1′）。如果再把公共点看作第二个点列的点Q_2，则它在第一个点列里对应点Q_1。因为底s_1和s_2是这样两对对应点的连线：

$$s_1=Q_1Q_2$$

$$s_2=P_1P_2$$

所以，它们都属于二级曲线。

定义 在两个射影点列里和它们的公共点$(s_1\ s_2)$相对应的点Q_1和P_2分别叫做**二级曲线在直线s_1和s_2上的切点**。

为了明确切点的几何意义，我们研究两个射影点列的一对对应点A_1、A_2。设a是联结它们的直线，直线a按一定方向在二级曲线里移动，画出这个二级曲线。当点A_1随之沿一定方向移动时，画出点列$s_1(A_1,B_1\cdots)$，

对应直线a_2也沿一定方向移动，画出线束$S_2(a_2, b_2, \cdots)$。当点A趋近于S_2而与它重合时，直线a_1趋于直线p_1而与它重合，则直线a_2趋于p_2而与它重合。

因此，我们可以说切线p_2是二阶曲线的动点A与不动点S_2连线a_2的极限位置。同样，可以说明在点S_1的切线q_1的几何意义。

切线与二阶曲线有唯一的公共点。

定理6·1（基本定理）已知一条常态的二阶曲线，由两个射影线束对应直线的交点构成。设A、B为这曲线上任意事先给出的二定点，M为其上一动点，则两线束$A\{AM\}$与$B\{BM\}$成射影对应。（$A\{AM\}$表示以点A为中心，动直线AM构成的线束。）

证明 设二阶曲线是由两个射影线束S_1和S_2构成的（图6·3）。又A、B是二阶曲线上任选的两个定点，C, D表示二阶曲线上的任意两个点。这时，在线束S_1和

它的对应点A_2也沿一定方向移动，画出点列$s_2(A_2, B_2, \cdots)$。当直线a趋近于直线s_2并与它重合时，点A_1趋近于点P_1而与它重合，则点A_2趋近于P_2而与它重合。

因此，我们可以说切点P_2是二级曲线的动直线a_1与不动直线s_2的交点A_2的极限位置。同样，可以说明直线s_1上的切点Q_1的几何意义。

切点与二级曲线有唯一的公共直线。

定理6·1′（基本定理）已知一条常态的二级曲线，由两个射影点列对应点连线构成。设a、b为这曲线内任意事先给出的两条定直线，m为它的一动直线，则两点列$a\{am\}$与$b\{bm\}$成射影对应。（$a\{am\}$表示以直线a为底，动点(am)构成的点列。）

证明 设二级曲线是由两个射影点列s_1和s_2构成的（图6·3′）。又a、b是二级曲线里任选的两条定直线，c，d表示二级曲线的任意两条直线。这时，在点列s_1和s_2里，

S_2里，S_1C 和 S_2C 是对应直线。如果点 C 移动画出二阶曲线，则直线S_1C和S_2C画出射影线束 S_1和S_2。用X_1表示直线S_1C与直线AD的交点，

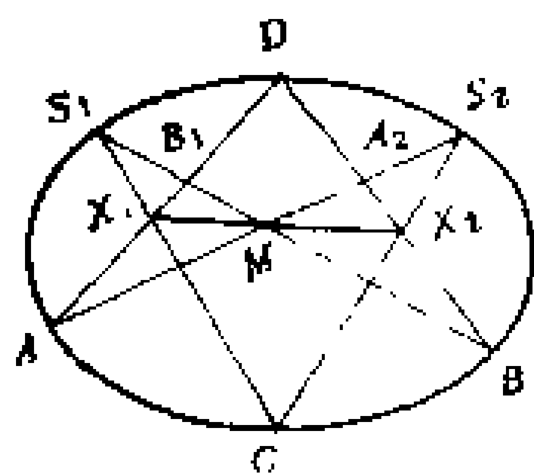


图6·3

X_2表示直线S_2C与直线BD的交点，于是直线S_1C和S_2C分别在直线AD和BD上画出点列 $AD\{X_1\}$和 $BD\{X_2\}$，且

$$S_1\{S_1C\}\overline{\overline{\wedge}}AD\{X_1\}$$

$$S_2\{S_2C\}\overline{\overline{\wedge}}BD\{X_2\}$$

由此得到：

$$AD\{X_1\}\overline{\wedge}BD\{X_2\}$$

因为直线S_1D对应直线 S_2D，所以，这两个点列的公共点 D 自对应，因此，它们是透视的，即

$$AD\{X_1\}\overline{\overline{\wedge}}BD\{X_2\}$$

我们来求这两个点列的透视中心。因为直线 S_1A对应直线 S_2A，所以，第一个点列的点 A对应第二个点列

(s_1c)和(s_2c) 是对应点。如果直线 c 移动画出二级曲线，则点(s_1c) 和(s_2c) 画出射影点列 s_1和s_2。用x_1表示点 (s_1c) 与点(ad)的连线，

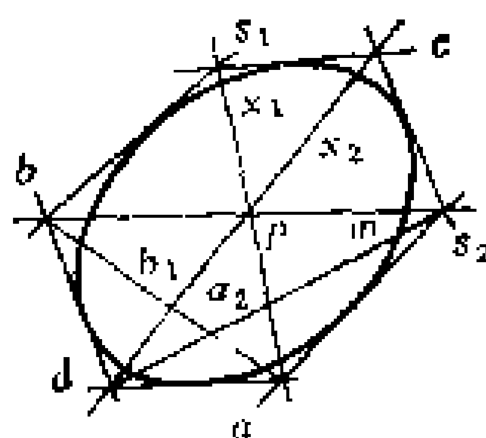


图6·3′

x_2 表示点(s_2c)与点(bd) 的连线，于是点 (s_1c)和(s_2c) 分别在点 (ad)和(bd)上画出线束$(ad)\{x_1\}$和$(bd)\{x_2\}$，且

$$s_1\{s_1C\}\overline{\overline{\wedge}}(ad)\{x_1\}$$

$$s_2\{s_2C\}\overline{\overline{\wedge}}(bd)\{x_2\}$$

由此得到：

$$(ab)\{x_1\}\overline{\wedge}(bd)\{x_2\}$$

因为点 (s_1d)对应点(s_2d)，所以这两个线束的公共直线 d 自对应。因此，它们是透视的，即

$$(ad)\{x_1\}\overline{\overline{\wedge}}(bd)\{x_2\}$$

我们来求这两个线束的透视轴。因为点$(s_1\ a)$对应点 (s_2a)，所以，第一个线束的直线 a 对应第二个线束

的点A_2：

$$A_2 = BD \times S_2A$$

另一方面，直线 S_1B对应直线 S_2B。因此，第一个点列的点B_1：

$$B_1 = AD \times S_1B$$

对应第二个点列的点B。所以，它们的透视中心是直线 AA_2 和 BB_1 的交点M，也就是：

$$M = S_1B \times S_2A$$

因为两个透视点列对应点的连线 X_1X_2通过透视中心M。所以，三个点 X_1，X_2和M在一条直线上。但透视中心M的位置只与点S_1、S_2、A和B有关，而与点C和D无关。

现在研究中心在点A和B的两个线束。其中对应直线是A和B与二阶曲线上的点的连线。例如直线 AD和BD 。我们最终的目的是证明这两个线束是射影的。假设点C固定不动，现在移动点D，如果点D画出已知二阶曲线，则直线AD和BD分别在直线CS_1和CS_2上交出两个点列 $CS_1\{x_1\}$和$CS_2\{x_2\}$，

的直线 a_2：

$$a_2 = (bd)\cdot(s_2a)$$

另一方面，点 (s_1b) 对应点 (s_2b)，因此，第一个点列的直线b_1：

$$b_1 = (ad)\cdot(s_1b)$$

对应第二个线束的直线b。所以，它们的透视轴是点(aa_2) 和(bb_1)的连线m，也就是：

$$m = (s_1b)\cdot(s_2a)$$

因为两个透视线束对应直线的交点 (x_1x_2)是在它们的透视轴m上。所以，三条直线x_1，x_2和m通过一点。但透视轴m的位置只与s_1、s_2、a和b有关，而与c和d无关。

现在研究底为直线a和b的两个点列。其中对应点是a和b与二级曲线里直线的交点。例如点(ad)和(bd)。我们最终的目的是证明这两个点列是射影的。假设直线c固定不动，现在移动直线d，如果直线d画出二级曲线，则点(ad)和(bd)分别与点(cs_1)和(cs_2) 连结作出两个线束(cs_1) $\{x_1\}$ 和 (cs_2) $\{x_2\}$。

这时，

$CS_1\{X_1\}\barwedge A\{AD\}$

$CS_2\{X_2\}\barwedge B\{BD\}$

但直线 X_1X_2 总是通过点M而与点D的位置无关。因此点列$CS_1\{X_1\}$和$CS_2\{X_2\}$是透视的。因而与它们成透视的线束是射影的，即

$A\{AD\}\barwedge B\{BD\}$

因此，定理得到证明。

由上定理可知：

二阶曲线的任意两个点都可取作二阶曲线的两个射影线束的中心。

定理6.2 给定无四点共线的任意五点，可决定一条且仅有一条二阶的线。

这时，

$(cs_1)\{x_1\}\barwedge a\{ad\}$

$(cs_2)\{x_2\}\barwedge b\{bd\}$

但是点(x_1x_2)总是在直线 m 上面与直线d的位置无关。因此线束(cs_1) $\{x_1\}$和(cs_2) $\{x_2\}$是透视的。因而与它们成透视的点列是射影的，即

$a\{ad\}\barwedge b\{bd\}$

因此，定理得到证明。

由上定理可知：

二级曲线的任意两条直线都可取作二级曲线的两个射影点列的底。

定理6·2′ 给定无四直线共点的任意五条直线，可决定一条且仅有一条二级曲线。

证明定理6.2.

证明 设已知五点为S、S'、A、B、C。以其中任意二点，例如点S和S'为中心，分别连线SA、SB、SC和$S'A$、$S'B$、$S'C$。由一维射影几何基本定理可得，三对对应直线SA与$S'A$、SB与$S'B$、SC与$S'C$决定唯一的射影对应，从而决定了通过已知五个点的唯一的一条二阶曲线。由定理6.1可知，这样决定的曲线，不因哪两点取为线束的中心而改变。

定理6.3 二阶曲线上四定点与其上任意第五点所连结的四条直线，其交比为常数。

定理6.3′ 二级曲线的四条定直线与其上任意第五条直线相交所得的四点，其交比为常数。

证明定理6.3.

证明 设四定点以 A、B、C、D表示，并以E和E'表示第五点的两个位置。取 E和 E'为两个射影线束的中心，来产生该二阶曲线，则两线束

$$E(EA, EB, EC, ED)\overline{\wedge}E'(E'A, E'B, E'C, E'D)$$

因此，

$$(EA, EB, EC, ED) = (E'A, E'B, E'C, E'D)$$

即四条直线所成的交比不因第五点的位置而变化，所以是一个常数。

2 二次曲线的代数表示

定理6.4 在射影坐标系里，二阶曲线是一个二次方程。

定理6.4′ 在射影坐标系里，二级曲线是一个二次方程。

现在证明定理 6.4.

证明 设两个线束的方程为

$$g + \mu h = 0 \qquad (1)$$

$$g' + \mu' h' = 0$$

其中g、h、g'、h'都是x_1、x_2、x_3的一次齐次式。例如：

$$g = g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3$$

$$h = h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3$$

等等。又已知两线束成射影对应，根据定理5.21，μ和μ'值必满足：

$$\mu' = \frac{\alpha\mu + \beta}{\gamma\mu + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \qquad (2)$$

从（1）中解出μ和μ'，代入（2）得：

$$\frac{-g'}{h'} = \frac{\beta h - \alpha g}{\delta h - \gamma g}$$

或
$$g'(\delta h - \gamma g) + h'(\beta h - \alpha g) = 0 \qquad (3)$$

（3）式左端是x_1、x_2、x_3的二次齐次式，它表示当μ、

μ'变动时，由（1）式得出的两条对应直线交点的集合——二阶曲线，它是一个二次方程。

根据定理 6.3，在齐次笛氏坐标系或齐次射影坐标系里，二阶曲线的方程是关于点坐标 x_1、x_2、x_3的二次齐次方程．因此一般形式可以写成

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0$$

为了方便，我们以后经常把它写成：

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j=0, \qquad a_{ij}=a_{ji} \tag{6.1}$$

其中 a_{ij}均为实数，而

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=|a_{ij}|$$

叫做系数行列式，D的秩叫做二阶曲线的秩．当$D\neq 0$（即D的秩$\gamma=3$）时，二阶曲线是常态的；当$D=0$（即D的秩$\gamma<3$）时，二阶曲线是变态的。

可以证明：（6.1）与坐标系的选取无关，即在坐标变换下，方程的形式不变。

利用对偶原理可以推出二级曲线的方程为

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}u_iu_j=0 \quad (a_{ij}=a_{ji}) \tag{6.1$'$}$$

其中$D=|a_{ij}|$ 叫做系数行列式，D的秩叫做二级曲线的秩．当$D\neq 0$时，二级曲线是常态的；当$D=0$ 时，二级曲线是变态的。

二阶曲线和二级曲线的方程从形式上看是一致的，都是二次的，因此统称二次曲线。

我们求过点 $P(p_1, p_2, p_3)$和 $Q(q_1, q_2, q_3)$的直线与二阶曲线Γ的交点．将直线PQ写或参数形式：

$$x_i = P_i + \lambda q_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

代入Γ的方程（6.1）得

$$\lambda^2 \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} q_i q_j + \lambda \left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_i q_j + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_j q_i \right)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_i p_j = 0$$

化简写成（今后常把和的符号 $\sum_{i,j=1}^{n}$ 简化成 Σ）

$$\lambda^2 \Sigma a_{ij} q_i q_j + 2\lambda \Sigma a_{ij} p_i q_j + \Sigma a_{ij} p_i p_j = 0 \qquad (6.2)$$

这是 λ 的一个二次方程，它可能有二实根，二重根或二虚根。就是说，直线 PQ 与二阶曲线 Γ 可能交于两点、一点。或二虚点若在复射影平面上，则直线与二次曲线总有两个交点，即二实点，二重合的实点、二虚点。这也就是二阶曲线的阶数为 2 的几何意义。今后我们主要是在复射影平面上研究问题。

例 1　求两个成射影对应的线束 $x_1 - \lambda x_3 = 0$ 与 $x_2 - \mu x_3 = 0$　（$\lambda + \mu = 1$）所构成的二阶曲线方程。

解　因为 $\lambda + \mu = 1$，所以 $\mu = 1 - \lambda$。两个线束可写成：

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_3 = 0 \\ x_2 - (1 - \lambda) x_3 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

消去 λ 得：

$$\begin{vmatrix} x_1 & -x_3 \\ x_2 - x_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

所以有：

$$x_1 x_3 + x_2 x_3 - x_3^2 = 0$$

这就是所求的二阶曲线的方程。

例 2　求由点（1,0,1）、（0,1,1）、（0,−1,1）、（1,1,2）、（−1,2,1）所决定的二阶曲线的方程。

解　设所求的二阶曲线为

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0$$

将五点的坐标分别代入，得：

$$\begin{cases}a_{11}+a_{33}+2a_{13}=0 & (1)\\ a_{22}+a_{33}+2a_{23}=0 & (2)\\ a_{22}+a_{33}-2a_{23}=0 & (3)\\ a_{11}+a_{22}+4a_{33}+2a_{12}+4a_{13}+4a_{23}=0 & (4)\\ a_{11}+4a_{22}+a_{33}-4a_{12}-2a_{13}+4a_{23}=0 & (5)\end{cases}$$

解方程组得：

$$a_{11}=a_{12}=a_{22}=-a_{33},\quad a_{13}=a_{23}=0$$

所求的二阶曲线为

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2=0$$

例 3　如果两个三角形内接于一个常态二阶曲线，则它们的六条边所在的直线属于一个二级曲线。

证明　设三角形 ABC、$A'B'C'$ 内接于二次曲线 Γ，边 AB 与边 $B'C'$、$A'C'$ 的交点分别为 D、E；边 $A'B'$ 与 BC、AC 的交点分别为 D'、E'。

我们将证明点 D、A、B、E 和 B'、E'、D'、A' 是直线 AB 和 $A'B'$ 上两个点列成射影对应的点（图6·4）。

因为从二次曲线 Γ 上的点 C 和 C' 向这个二次曲线的点投射直线所成的两个线束 C 和 C' 是射影的，即：

$$C(CB',CA,CB,CA')\barwedge$$
$$C'(C'B',C'A,C'B,C'A')$$

因此，与它们透视的点列也是射影的，即：

$$AB(D,A,B,E)\barwedge$$
$$A'B'(B',E',D',A')$$

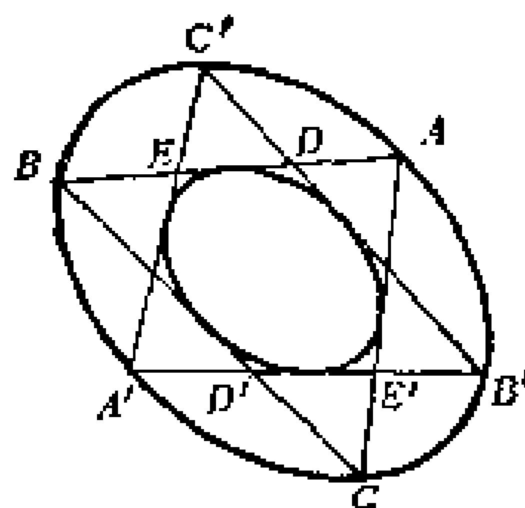


图6·4

所以，这两个射影点列的对应点连线 AC、BC、$A'C'$、$B'C'$ 与点列的底AB、$A'B'$，都属于一个二级曲线。

1.2 巴斯加定理与布利安桑定理

为了研究常态的二阶曲线及常态的二级曲线的性质和作图，我们给出两个著名的定理，它们是对偶的。

1 定理和证明

定义 如果一个n点形（简单的或完全的）的顶点都在一个常态的二阶曲线上，则叫做内接n点形（简单的或完全的）。

定理6.5 内接于常态二阶曲线的简单六点形里，对边的三个交点在一条直线上。

证明 在图6·5里，二阶曲线的六个点A、B、C、D、E、F构成顶点属于这个点列的简单六点形$ABCDEF$，其中每一对相邻顶点确定一条边，按顺序每隔两条边所得出的一组边构成了对边。简单六点形的三对对边是：AB和DE，BC和EF，CD和FA。

在基本定理6.1证明过程中，我们已经证得X_1、M、X_2共线（见图6·3），其实这三点正好是常态二阶曲线

定义 如果一个n线形（简单的或完全的）的边都在一个常态的二级曲线上，则叫做外切n线形（简单的或完全的）。

定理6.5′ 内切于常态二级曲线的简单六线形里，连结对顶点的三条直线通过一个点。

证明 在图6·5′里，二级曲线的六条边a、b、c、d、e、f构成边属于这个线束的简单六线形$abcdef$，其中每一对相邻边确定一个顶点，按顺序每隔两个顶点得出的一组顶点构或了对顶点。简单六线形三对对顶点是：(ab)和(de)，(bc)和(ef)，(cd)和(fa)。

在基本定理6.1′证明过程中，我们已经证得x_1、m、x_2共点（见图6·3′），其实这三条线正好是常态二级曲

的内接简单六点形 S_1CS_2ADB中三对对边的交点，即：

$S_1C\times AD=X_1$

$CS_2\times DB=X_2$

$S_2A\times BS_1=M$

现在回到本定理的证明中来。无论怎样给出简单六点形 S_1CS_2ADB各顶点对应起来，如

$$\begin{array}{cccccc} S_1 & C & S_2 & A & D & B \\ \downarrow & | & | & | & | & | \\ A & B & C & D & E & F \end{array}$$

就立刻得出三对对边交点：

$AB\times DE=X_1$

$BC\times EF=X_2$

$CD\times FA=M$

在一条直线上。

这个定理叫做巴斯加定理。直线 X_1X_2 叫做巴斯加线。

巴斯加定理的逆定理也成立，即：

定理6.6 如果简单六点形对边的三个交点在一条直线上，则它的顶点属于一个二阶曲线。

证明 设简单六点形 $ABCDEF$的对边交点X_1、M、X_2在一条直线上。这个简单

线的外切简单六线形 s_1cs_2adb中三对对顶点的连线，即

$(s_1c)\cdot(ad)=x_1$

$(cs_2)\cdot(db)=x_2$

$(s_2a)\cdot(bs_1)=m$

现在回到本定理的证明中来。无论怎样给出简单六线形 s_1cs_2adb 各边对应起来，如

$$\begin{array}{cccccc} s_1 & c & s_2 & a & d & b \\ | & | & | & | & | & | \\ a & b & c & d & e & f \end{array}$$

就立刻得出三对对顶点连线

$(ab)\cdot(de)=x_1$

$(bc)\cdot(ef)=x_2$

$(cd)\cdot(fa)=m$

都通过一个点。

这个定理叫做布利安桑定理。点 (x_1x_2)叫做布利安桑点。

布利安桑定理的逆定理也成立，即：

定理6.6′ 如果连结简单六线形对顶点的三条直线通过一个点，则它的边属于一个二级曲线。

证明 设简单六线形 $abcdef$ 的对顶点连线x_1、m、x_2 通过一个点。这个简单

六点形的五个顶点 A、B、D、E、F 确定它们所在的二阶曲线（图6·5）。

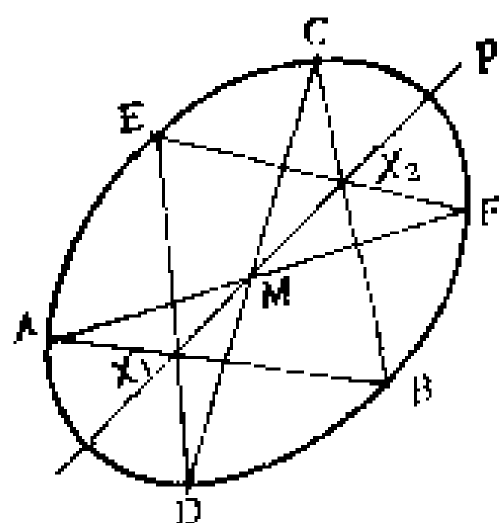


图6·5

假定已知简单六点形的边 BC 与二阶曲线相交于点 C'（除点 B 外）。于是我们得到顶点属于二阶曲线的六点形 $ABC'DEF$。根据巴斯加定理，则边 $C'D$ 应该通过点 M。因此，这条边与直线 MD 重合，也就是点 C' 与点 C 重合。

六线形的五条边 a、b、d、e、f 确定它们所在的二级曲线（图6·5′）。

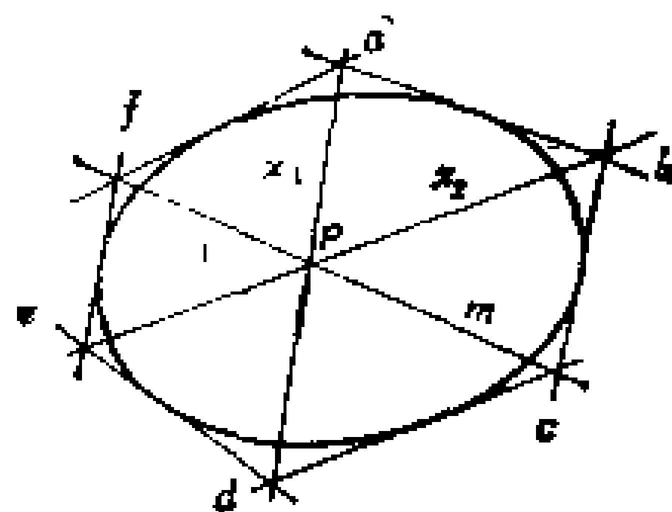


图6·5′

假定通过已知简单六线形的顶点(bc)有二级曲线的直线 c'（除边 b 外）。于是我们得到边属于二级曲线的六线形 $abc'def$。根据布利安桑定理，则点（c' d)应在直线 m 上。因此，这个点与点（md）重合，也就是直线 c' 与直线 c 重合。

2　巴斯加定理与布利安桑定理的推论

推论 1　在二阶曲线的内接五点形里，两对不相邻的边的交点与第五条边和它对顶点切线的交点，在一条直线上。

事实上，设已知二次曲线有内接五点形 $ABCDE$（图 6·6）。我们把它的一

推论1′　在二级曲线的外切五线形里，两个不相邻的顶点的连线，与第五个顶点和它对边切点的连线通过一点。

事实上，设已知二级曲线有外切五线形 $abcde$（图6·6′）。我们把它们的一条

个顶点，例如D，看作是二重点。于是有巴斯加六点形$ABCDDE$。

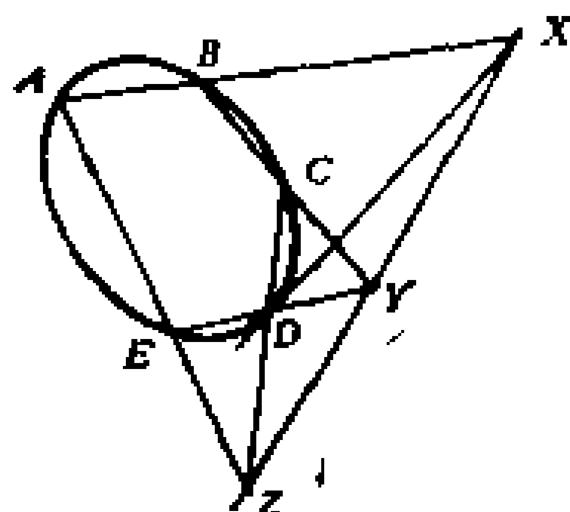


图6·6

表示六点形的六个字母中，每个字母两侧的两个字母表示对边六点形的边 DD是二阶曲线在点D的切线 .三对对边的交点是：

$X = AB \times DD$

$Y = BC \times DE$

$Z = CD \times EA$

根据巴斯加定理，三个点X、Y 和 Z应该在一直线上。

推论2 在二阶曲线的内接四点形里，两对对边的交点与过对顶点的两条切线的交点在一条直线上。

如图 6·7，六点形 $AABCCD$ 对边的三个交点是：

边，例如d，看作是二重边。于是有布利安桑六线形$abcdde$。

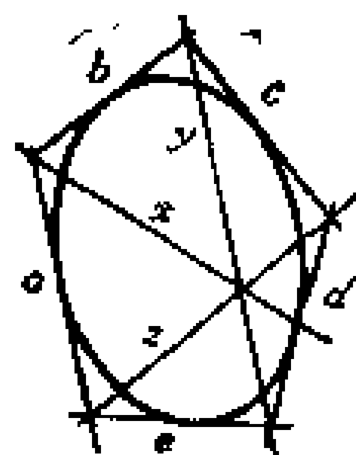


图6·6′

表示六线形的六个字母中，每个字母两侧的两个字母表示对顶点，六线形的顶点(dd)是二级曲线在边d上的切点.三对对顶点的连线是：

$x = (ab) \cdot (dd)$

$y = (bc) \cdot (de)$

$z = (cd) \cdot (ea)$

根据布利安桑定理，三条直线x、y 和 z应通过一点.

推论2′ 在二级曲线的外切四线形里，两对对顶点连线与对边两个切点的连线通过一点。

如图6·7′ 连结六线形$aabccd$ 对顶点的三条直线是：

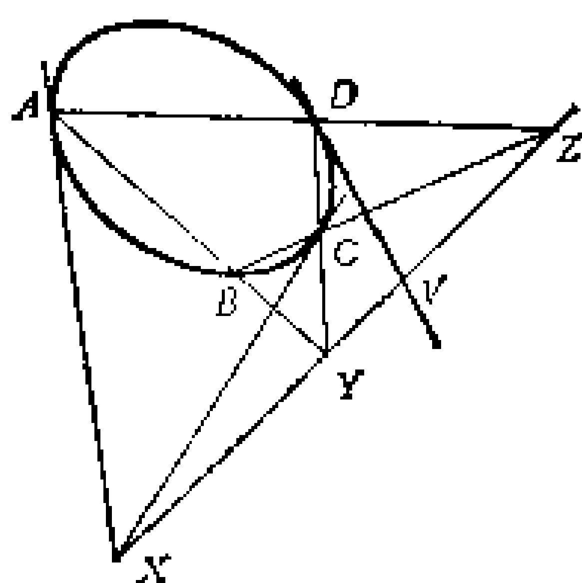


图6·7

$X = AA \times CC$

$Y = AB \times CD$

$Z = BC \times DA$

它们在巴斯加线上。

上面是把A和C看作二重顶点，边AA和CC是切线。如果再把B和D看作二重顶点，则在这两点的切线交点V也在同一直线上。

推论 3 在二阶曲线的内接三点形里，各边与它们对顶点切线的三个交点在一条直线上。

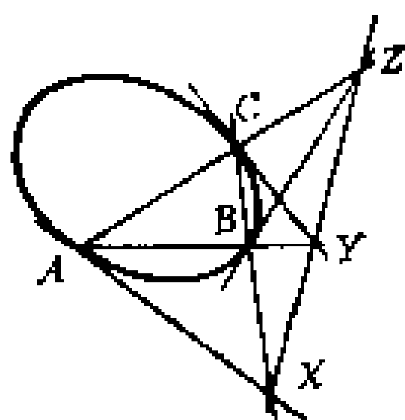


图6·8

如图 6·8，六点形 AA

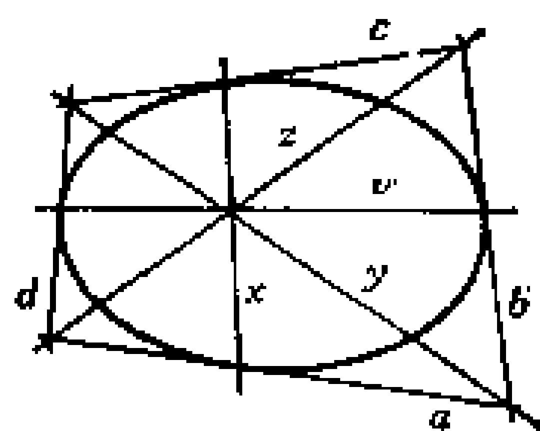


图6·7′

$x = (aa)\cdot(cc)$

$y = (ab)\cdot(cd)$

$z = (bc)\cdot(da)$

它们通过布利安桑点。

上面是把a和c看是二重边，顶点(aa)和(cc)是切点。如果再把b和d看作二重边，则在这两条边上的切点连线v也通过同一点。

推论3′ 在二级曲线的外切三线形里，各顶点与它们对边的切点连结的三条直线通过一点。

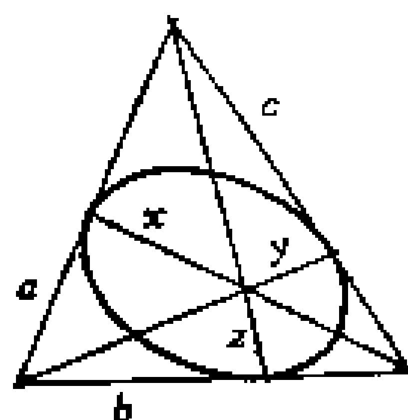


图6·8′

如图6·8′，六线形 $aabb$

$BBCC$ 的对边交点是：

$$X = AA \times BC$$
$$Y = AB \times CC$$
$$Z = BB \times CA$$

在巴斯加线上。

这里直线 AA、BB、CC 分别是对边 BC、CA、AB 顶点的切线。

cc 的对顶点连线是：

$$x = (aa) \cdot (bc)$$
$$y = (ab) \cdot (cc)$$
$$z = (bb) \cdot (ca)$$

通过布利安桑点。

这里点 (aa)、(bb)、(cc) 分别是对顶点 (bc)、(ca)、(ab) 对边上的切点。

对于变态的二阶曲线来说，巴斯加定理就转化为巴普斯定理，我们曾在第五章里作为例题证明过。它是巴斯加定理的特殊情形，可写成下面的命题。

推论 4 在顶点属于两条直线的简单六点形里，对边的三个交点在一条直线上。

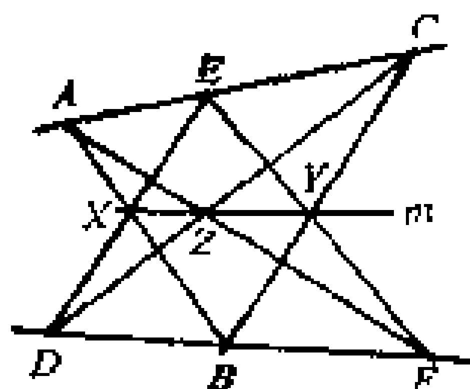


图6·9

如图 6·9，A、B、C、D、E、F 是简单六点形的六个顶点，它们在直线 p 和 q 上各有三个，如果把 p 和 q 看作分解的二阶曲线，则简单六点形的三对对边的三个交点为：

推论4′ 在边属于两个点的简单六线形里，连结对顶点的三条直线通过一点。

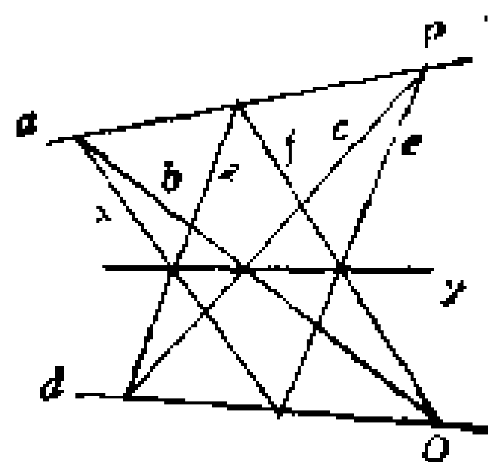


图6·9′

如图6·9′，a、b、c、d、e、f 是简单六线形的六条边，它们通过点 P 和 Q 各有三条，如果把 P 和 Q 看作分解的二级曲线，则连结简单六线形的三对对顶点的三条直线为：

$X = AB \times DE$

$Y = BC \times EF$

$Z = CD \times FA$

在一条直线上．

$x = (ab) \cdot (de)$

$y = (bc) \cdot (ef)$

$z = (cd) \cdot (fa)$

通过一点．

3 用巴斯加定理与布利安桑定理作二次曲线

已知二阶曲线的五个点，作二阶曲线的其它点。

事实上，设已知二阶曲线的五个点A、B、C、D、E（图6·10）．把它们看作简单六点形的顶点，作六点形的边BC、CD、DE和AB，用M表示AB和DE的交点，通过点M作任意直线把它看作巴斯加线．设它与直线BC和CD的交点为X_1和X_2，作直线EX_1和AX_2，显然，它们的交点F就是二阶曲线的点．

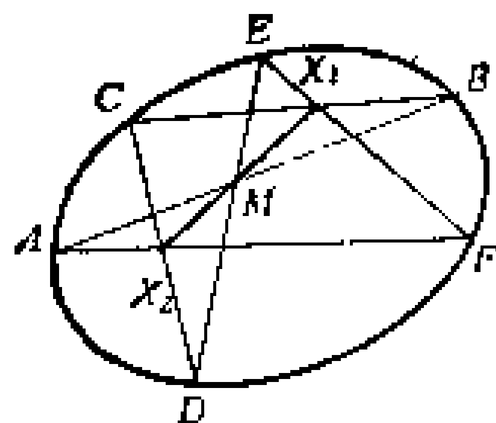


图6·10

已知二级曲线的五条直线，作二级曲线的其它直线。

事实上，设已知二级曲线的五条直线a、b、c、d、e（图6·10′）．把它们看作简单六线形的边，作六线形的顶点(bc)、(cd)、(de)和(ab)，用m表示(ab)和(de)连结的直线，在直线m上取任意点，把它看作布利安桑点．设它与点(bc)和(cd)的连线为x_1和x_2，它们与直线e、a的交点分别为(ex_1)和(ax_2)，显然，连结它们的直线f就是二级曲线的直线．

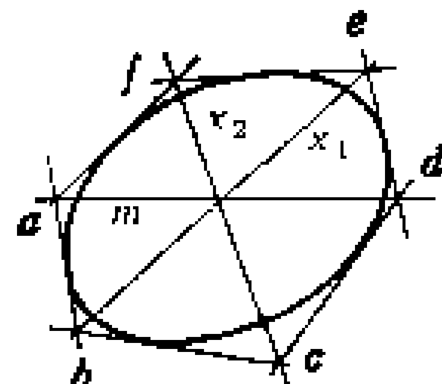


图6·10′

利用巴斯加定理的特殊情形，还可以解决很多作图问题。

例如已知二阶曲线的五个点；或四个点与其中一个点的切线；或三个点与其中两个点的切线；就可以作二次曲线上每个点的切线。因为这时可以确定构成二阶曲线的两个射影线束的三对对应直线，所以可作二阶曲线的所有点，然后应用巴斯加定理，可作过每个点的切线。

具体作法留给读者。

利用布利安桑定理的特殊情形，还可以解决很多作图问题。

例如已知二级曲线的五条切线；或四条切线与其中一条上的切点；或三条切线与其中两条上的切点；就可以作二级曲线上每条切线的切点。因为这时可以确定构成二级曲线两个射影点列的三对对应点，所以可作二级曲线的所有切线，然后应用布利安桑定理就可以作每条切线的切点。

具体作法留给读者。

例 1　在欧氏平面上，内接于圆的两个四点形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$，设交点 $AB\times A'B'=P$, $BC\times B'C'=Q$, $CD\times C'D'=R$ 在一直线上，则交点 $DA\times D'A'=S$ 也在这条直线上。

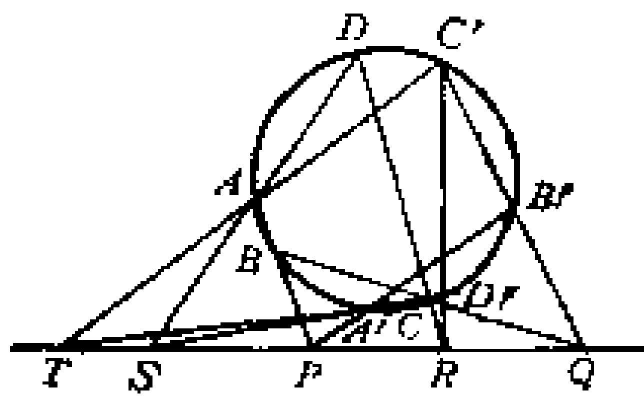


图6·11

证明　首先考虑简单六点形 $ABCA'B'C'$（图6·11）根据巴斯加定理，则点 P、Q 与 $T=CA'\times C'A$ 共线。

再考虑简单六点形 $ADCA'D'C'$，根据巴斯加定理知 S、R、T 共线。

所以 P、Q、R、S 在同一直线上。

例 2　已知四个点与过其中一点的切线决定一条二阶曲线，试作曲线的另一些点。

解　设四个点 C、D、A、B，过点 C 的切线为 CM

（图6·12）.

作直线DA与切线CM的交点M。过点M引任意直线与直线AB交于点X_1，与直线BC交于点X_2。作直线CX_1与直线DX_2的交点F是所求二阶曲线上的一点。因为过点M的直线可以任意作，可得出很多点对X_1、X_2，所以可以作出二阶曲线上任意多个点。

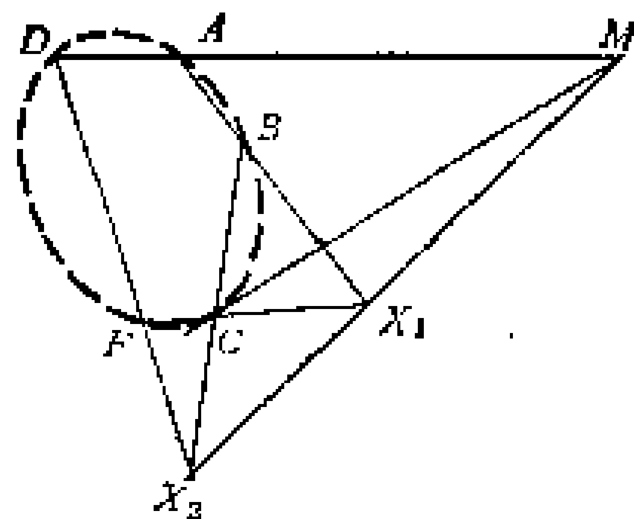


图6·12

根据巴斯加定理的逆定理，并把C看成二重点，于是六点形$DABCCF$中，对边

$$DA\times CC=M,\ \ AB\times CF=X_1,\ \ BC\times FD=X_2$$

的三点M、X_1、X_2共线（巴斯加线），所以点F在已知二阶曲线上。

1.3 二次曲线的极点与极线、配极对应

极点和极线是二次曲线在射影变换下的不变性质，对研究二次曲线的性质和分类都起着重要的作用。

1 极点和极线的定义

定义 如果两点P、Q的连线与二阶曲线Γ交于两点M_1和M_2，且点对P、Q与点对M_1，M_2调和分隔，则称两点P、Q关于已知二阶曲线Γ成共轭点（图6·13）。

定理6.7 两点$P(p_1,p_2,p_3)$、$Q(q_1,q_2,q_3)$关于二次曲线$\Sigma a_{ij}x_ix_j=0$成共轭点的条件是：

$$\Sigma a_{ij}p_iq_j=0 \quad (6.3)$$

证明 设直线与二阶曲线Γ交于M_1、M_2两点（可能为二虚点），其坐标可以写作：

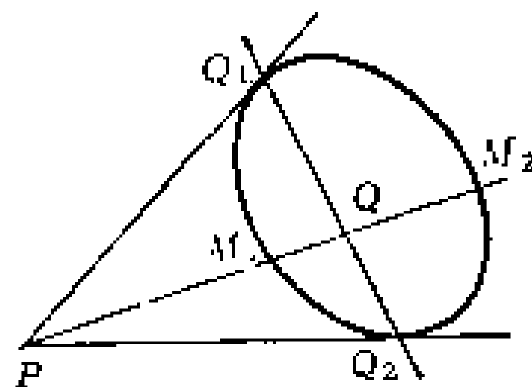


图6·13

M_1: $x_i^{(1)} = p_i + \lambda_1 q_i$

M_2: $x_i^{(2)} = p_i + \lambda_2 q_i$

所以 $(PQ, M_1M_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$

即 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

但λ_1、λ_2是二次方程（6.2）式

$$\lambda^2 \Sigma a_{ij} q_i q_j + 2\lambda \Sigma a_{ij} p_i q_j + \Sigma a_{ij} p_i p_j = 0$$

的两个根。由根与系数的关系有：

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2\Sigma a_{ij} p_i q_j / \Sigma a_{ij} q_i q_j = 0$$

所以 $\Sigma a_{ij} p_i q_j = 0$。

定理6.8 已知点P关于二阶曲线Γ的所有共轭点Q的轨迹是一条直线。

证明 设定点P的坐标为(p_1, p_2, p_3)，动点Q的坐标为(x_1, x_2, x_3)。根据定理6.7的共轭条件，其轨迹就是：

$$\Sigma a_{ij} p_j x_i = 0 \qquad (6.4)$$

由于 $a_{ij} = a_{ji}$，所以上式可写成：

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)x_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)x_2 + (a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3)x_3 = 0 \qquad (6.4)'$$

这是一条直线。

定义 定点P关于二阶曲线Γ的共轭点Q的轨迹是一条直线，叫做**P关于二阶曲线Γ的极线**，点P叫做**极点或简称极**。（6.4）式是点P的极线方程。

推论 平面上每一点对于常态二阶曲线总有唯一极线。

2 极点与极线的性质

极据定义不难得出极点与极线有下列性质：

定理6.9 如果点P的极线通过点Q，则点Q的极线通过点P。

证明 关于二阶曲线的共轭点是相互的，即若点P与Q共轭，则点Q也与P共轭。设点P的极线为p，点Q的极线为q

（图6·14）．如果点P的极线p通过点Q，则点Q与P共轭，因此点Q的极线q必通过点P．

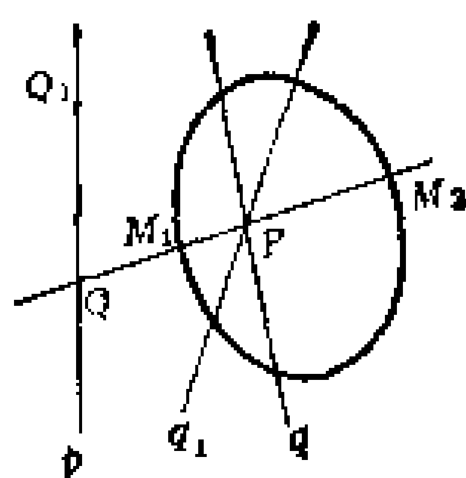


图6·14

从定理6.9 看出，如果点Q在极线p上移动，则点Q的极线q 绕点P 转动。

定理6.10 如果点P在二阶曲线Γ上，则点P的极线就是 Γ在点P 的切线。

证明 因为点P在二阶曲线Γ上，所以应有：

$$\Sigma a_{ij}p_ip_j=0 \tag{1}$$

设点Q是点P关于二阶曲线 Γ的共轭点，由条件（6.3）式应有：

$$\Sigma a_{ij}p_iq_j=0 \tag{2}$$

直线PQ与二阶曲线Γ相交的条件应满足（6.2）式，即

$$\lambda^2\Sigma a_{ij}q_iq_j+2\lambda\Sigma a_{ij}p_iq_j+\Sigma a_{ij}p_ip_j=0$$

由（1）、（2）式得：

$$\lambda^2\Sigma a_{ij}q_iq_j=0，故\lambda_1=\lambda_2=0$$

这说明点M_1与M_2重合于点P，PQ 为二阶曲线Γ的切线，因此点Q总在以P为切点的切线上，即点P的极线是二阶曲线Γ在点P的切线。

推论 如果过点P可向二阶曲线Γ引二切线，切点分别为T_1和T_2，则直线T_1T_2为点P关于二阶曲线Γ 的极线。反过来，如果点P的极线与二阶曲线Γ 交于二点T_1和T_2，则直线 PT_1和PT_2是二阶曲线Γ的切线。

顺便指出：在第三章讨论罗巴切夫斯基几何的卡莱——克莱因模型的时候，曾提到过该模型中的运动是关于绝对圆的一种透射．实际上，取圆（或任意一常态二次曲线）外一点P，T_1T_2是它的极线（图6·15）．如果以点P为中心，以T_1T_2为透视轴作透射变换，则圆上任意一点M_1变成圆上一点 M_2，圆内

任意一点A变成圆内一点A'，T_1、T_2都变成本身．因此，这个变换把圆内的线段还变成圆内的线段．这样的两条线段可称为“相等”．

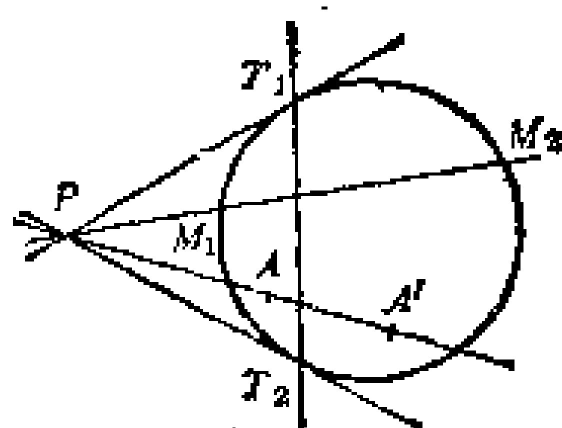


图6·15

下面我们讨论已知极线的极点问题。

从定理6.8 得知，平面上任意一点 $P(p_1, p_2, p_3)$ 对于常态二阶曲线Γ 来说，总有一条极线 $\Sigma a_{ij} p_j x_i = 0$，即：

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)x_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)x_2 + (a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3)x_3 = 0$$

反过来，对于平面上任意直线

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

来说，如果

$$\begin{cases} \rho u_1 = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 \\ \rho u_2 = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 \\ \rho u_3 = a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 \end{cases} \tag{6.5}$$

则这一直线就是一点 $P(p_1, p_2, p_3)$的极线。因为$|a_{ij}| \neq 0$，方程组（6.5）有唯一解：

$$\begin{cases} \sigma p_1 = A_{11}u_1 + A_{21}u_2 + A_{31}u_3 & A_{ij} = A_{ji} \\ \sigma p_2 = A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{32}u_3 & |A_{ij}| = |a_{ij}|^2 \neq 0 \\ \sigma p_3 = A_{13}u_1 + A_{23}u_2 + A_{33}u_3 & \end{cases} \tag{6.5}$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij}的代数余因式．这就是说，对任意一条直线(u_1, u_2, u_3) 必有唯一极点(p_1, p_2, p_3)。因此有下面的定理：

定理6.11 平面上每条直线对于常态二阶曲线总有唯一极点。

例 1　已知二阶曲线Γ的方程为

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{1}$$

求原点对二阶曲线 Γ 的极线；直线 $x=2$ 对二阶曲线 Γ 的极点。

解 方程（1）可以写成：

$$9x^2+4y^2-36=0$$

化成齐次坐标方程为

$$9x_1^2+4x_2^2-36x_3^2=0$$

根据公式（6.4）′所求的极线应为

$$9p_1x_1+4p_2x_2-36p_3x_3=0$$

将（0，0，1）代入 p_i，得 $x_3=0$，所求的极线是无穷远直线。

根据（6.5）′来求极点坐标。因为

$$D=\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{vmatrix}.$$

所以 $A_{11}=-144$，$A_{22}=-324$，$A_{33}=36$，$A_{12}=A_{13}=A_{23}=0$，从而有

$$\begin{cases} \sigma p_1=-144u_1 \\ \sigma p_2=-324u_2 \\ \sigma p_3=36u_3 \end{cases} \qquad (2)$$

已知直线 $x=2$，其齐次坐标方程为

$$x_1-2x_3=0$$

它的线坐标为（1，0，－2），将其代入（2）式得：

$$\sigma p_1=-144,\ \sigma p_2=0,\ \sigma p_3=-72$$

所求的极点坐标为（－144，0，－72），或化成非齐次坐标为（2，0）。

从这里验证了，当直线 $x=2$ 与二阶曲线 Γ 相切于点（2，0）时，它的极点正好是这个切点。

例 2　求 $x^2+y^2=r^2$ 的动切线关于 $ax^2+by^2=1$ 的极点的轨迹。

解 $x^2+y^2=r^2$（其齐次方程为 $x_1^2+x_2^2-r^2x_3^2=0$）在其上

一点(x',y')的切线方程为

$$x'x+y'y=r^2 \qquad (1)$$

其齐次坐标方程为

$$x'_1x_1+x'_2x_2-r^2x'_3x_3=0 \qquad (2)$$

其中(x'_1,x'_2,x'_3)为(x',y')的齐次坐标，(x_1,x_2,x_3)为(x,y)的齐次坐标。

求切线关于 $ax^2+by^2=1$ 的极点。因为

$$ax^2+by^2=1 \qquad (3)$$

的齐次坐标方程为

$$ax_1^2+bx_2^2-x_3^2=0 \qquad (4)$$

设（2）式关于（4）式的极点为(X_1,X_2,X_3)，根据（6.5）式有：

$$\begin{cases} x'_1=aX_1 \\ x'_2=bX_2 \\ -r^2x'_3=-X_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \text{其中}a_{11}=a,\ a_{22}=b,\ a_{33}=-1 \\ a_{12}=a_{13}=a_{23}=0 \end{pmatrix}$$

又因为

$$x'^2_1+x'^2_2-r^2x'^2_3=0$$

所以

$$(aX_1)^2+(bX_2)^2-r^2\left(\frac{X_3}{r^2}\right)^2=0$$

即：

$$a^2X_1^2+b^2X_2^2-\frac{X_3^2}{r^2}=0$$

为所求的极点轨迹方程。其非齐次坐标方程为

$$r^2(a^2X^2+b^2Y^2)-1=0$$

3　二阶曲线的极点与极线的作图问题

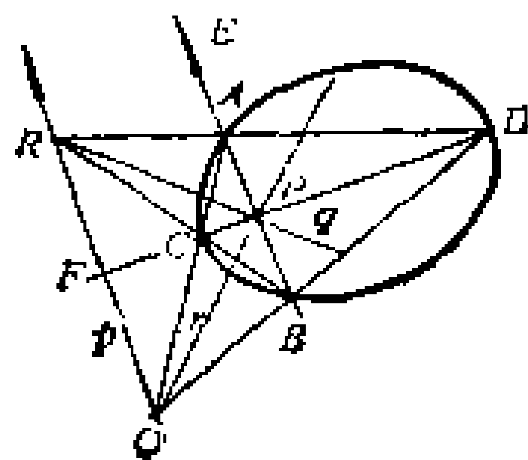
（1）求作一已知点的极线。

设P表示已知点，p表示点P关于二阶曲线Γ的极线。

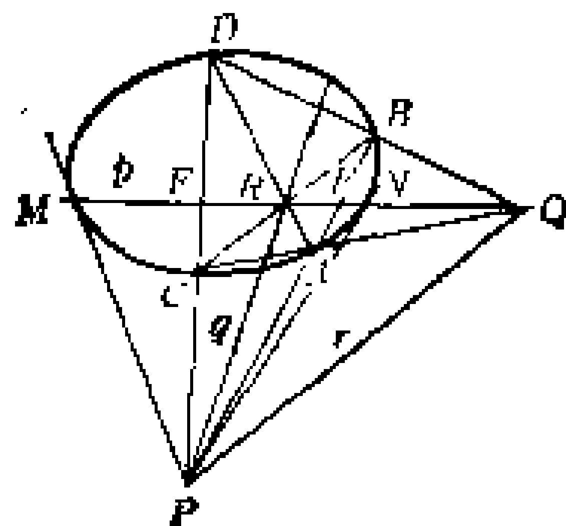
若P点在二阶曲线Γ上，只要作Γ在P点的切线就得到极

线 p。

若 P 点不在二阶曲线 Γ 上（不论在 Γ 内部或外部，作法相同），通过 P 点任意作二直线使与二阶曲线 Γ 分别交于点 A、B 及 C、D（图6·16），设 $Q=AC\times BD$，$R=AD\times BC$，那么 QR 就是所求的极线 p。



（1）



（2）

图6·16

因为 $E=QR\times AB$，$F=QR\times CD$，那么由于完全四点形或完全四线形的调和性质，我们有 $(PE,AB)=-1$，$(PF,CD)=-1$，所以由共轭点的定义，E 和 F 是点 P 关于二阶曲线 Γ 的两个共轭点，从而直线 EF（即直线 p）就是 P 点的极线。

在这里还可以指出两个重要结果：

第一，若点 P 在二阶曲线 Γ 的外部，则极线 p 与二阶曲线 Γ 交于两点 M、N，这两点在极线 p 上，所以与点 P 共轭，但点 M 在二阶曲线 Γ 上，因而由定理6.10，与点 M 共轭的 P 点在 M 点的切线上，可见 PM 是切线。同理 PN 也是切线。这样，从二阶曲线 Γ 外一点的极线的作图，立刻得出由该点向二阶曲线 Γ 所引两条切线的作图。

第二，观察 $\triangle PQR$，已经知道点 Q 和 R 在极线 p 上，所以都和点 P 共轭。若用上面的作法求点 Q 的极线，则过点 P、R 的直线 q 就是 Q 点的极线，即点 Q 和 R 也共轭，从而 R 点的极线 r 就是 R 点的两个共轭点 P 和 Q 的连线。该三角形 PQR 每一顶点和其余二顶点共轭，从而每一顶点和它的对边是极点

与极线的关系，这样的三角形就是下面将要讨论的自极三角形。

（2）求作一已知直线p的极点P。

解决了问题（1）以后，这个问题便容易解决。在已知直线p上任取两点R和Q，按上述方法作其极线r和q（图 6·17），设$P=(qr)$。因为该点既在极线q上又在极线r上，所以P点既与Q点共轭又与R点共轭，点P的极线是过点Q、R的直线p，因此点$P=(qr)$是已知直线p的极点。

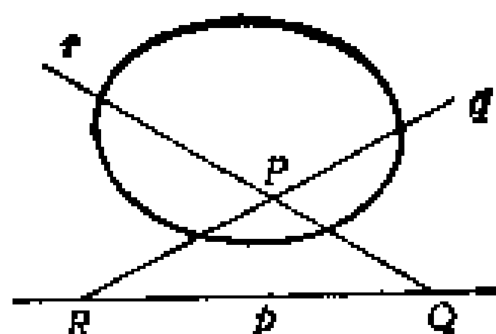


图6·17

4 配极对应．自极三点形

定义 对已知常态二阶曲线，平面上每一点总有一条确定的极线和它对应；反过来，每条直线也总有一个确定的极点和它对应，这种点和直线之间的对应关系，称为**配极对应**。

配极对应是一种异素对应。

配极对应的代数表示，可由（6.5）式和(6.5)′式求出：

设有一二阶曲线Γ

$$\Sigma a_{ij}x_ix_j=0 \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

是常态的，即$|a_{ij}|\neq 0$。

若平面内一点$X=(x_1,x_2,x_3)$，这点关于二阶曲线Γ的极线是$u=(u_1,u_2,u_3)$，则上述的（6.5）式和（6.5）′式

$$\begin{cases}\rho u_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \rho u_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ \rho u_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\sigma x_1=A_{11}u_1+A_{21}u_2+A_{31}u_3\\ \sigma x_2=A_{12}u_1+A_{22}u_2+A_{32}u_3\\ \sigma x_3=A_{13}u_1+A_{23}u_2+A_{33}u_3\end{cases}$$

就是配极对应的表达式.

配极对应使得以点为元素的图形变成以直线为元素的几何图形；而以直线为元素的图形变为以点为元素的几何图形.

定义 成配极对应的两个图形，称为**配极图形**（共轭图形）.

例如关于二阶曲线Γ成共轭的两点，其配极图形是两条极线，称为共轭极线，或称关于二阶曲线Γ的共轭直线；三点形的配极图形是三线形；四线形的配极图形是四点形等等. 配极对应不但使图形变为对偶图形，而且还使射影性质变为射影性质.

例 3 直线上四点的交比等于它们对应的四条极线的交比.

证明 设直线上四点的坐标为 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$，$x^{(1)}+\lambda_1 x^{(2)}$，$x^{(1)}+\lambda_2 x^{(2)}$. 根据配极对应

$$\begin{cases}\rho u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\\ \rho u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\\ \rho u_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{cases}$$

可求出四条对应极线的坐标为 $u^{(1)}$，$u^{(2)}$，$u^{(1)}+\lambda_1 u^{(2)}$，$u^{(1)}+\lambda_2 u^{(2)}$. 所以四点的交比和其对应的四条极线的交比都等于 $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

已知三点形 ABC，若点A的极线是 BC，点B的极线是AC，则点C的极线一定是AB. 实际上，根据极点与极线的性质（1），点C在点A的极线 BC上，所以点A在点C的极线上；同理点B也在点C的极线上，因此AB 是点C的极线（图6·18）.

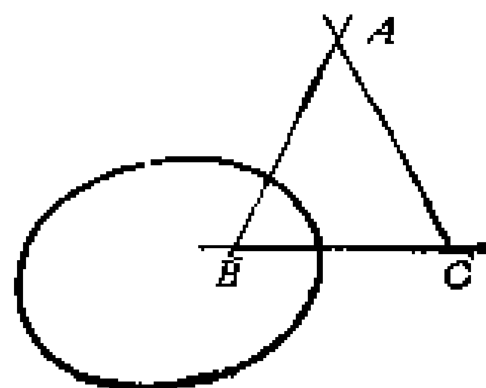


图6·18

定义 如果三点形的三个顶点分别是对边的极点，则称三点形为自极三点形.

对于每一条常态的二阶曲线 Γ，其自极三点形有无数个。自极三点形的配极图形三线形与它自身重合，称为自配极图形。

选取自极三点形作坐标三点形建立的射影坐标系，可以将二次曲线化成标准型。因此自极三点形在二次曲线的分类上起着重要的作用。

1.4　二阶曲线与二级曲线的马克劳林（Maclaurin）定理

定理6.12　常态二阶曲线的切线集合是一条常态二级曲线。

定理6.12′　常态二级曲线的切点集合是一条常态二阶曲线。

首先证明定理6.12。

证明　设二阶曲线

$$\Gamma:\ \Sigma a_{ij}x_ix_j=0,\ a_{ij}=a_{ji},\ |a_{ij}|\neq 0$$

设点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 在二阶曲线 Γ 上，则点 P 的极线为过该点的切线，这条切线的坐标由公式（6.5）给出，即：

$$\begin{cases}\rho u_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \rho u_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ \rho u_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{cases}\qquad (1)$$

因为点 P 在切线上，所以有：

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0\qquad (2)$$

如果从（1）解出 x_1, x_2, x_3 代入（2）式，就可以消去 x_1, x_2, x_3 得到一个关于 u_1, u_2, u_3 的关系式，它是直线 (u_1, u_2, u_3) 与二阶曲线 Γ 相切的充要条件。这相当于把（1）和（2）看作四元素 x_1，x_2，x_3，ρ 的齐次方程组，消去 x_i 就得到切线 u 所应满足的方程：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3\\ u_1 & u_2 & u_3 & 0\end{vmatrix}=0\qquad (6.6)$$

将此行列式展开得：

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}u_iu_j = 0$$

其中 A_{ij}为 a_{ij}在$|a_{ij}|$中的代数余因式。由于$|a_{ij}|$是对称行列式，所以 $A_{ij}=A_{ji}$，且

$$|A_{ij}| = |a_{ij}|^2 \neq 0$$

所以（6.6）式是一条常态的二级曲线。

证明定理6.12′时，只要仿照定理6.12的证明方法就行了。

已知常态的二级曲线的线坐标方程为

$$\Sigma A_{ij}u_iu_j = 0\ ,\ A_{ij} = A_{ji},\ |A_{ij}| \neq 0$$

则其切点的方程必为

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.7)$$

它可以化成：

$$\Sigma b_{ij}x_ix_j = 0\ ,\ b_{ij} = b_{ji},\ |b_{ij}| \neq 0 \qquad (1)$$

是一条常态的二阶曲线。其中b_{ij}是A_{ij}在$|A_{ij}|$中的代数余因式。

在后一个证明所得出的二阶曲线

$$\Sigma b_{ij}x_ix_j = 0$$

中，b_{ij}是 A_{ij} 在$|A_{ij}|$中的代数余因式，因此应有

$$b_{ij} = |a_{ij}|\cdot a_{ij}$$

所以（1）式可化为

$$\Sigma(|a_{ij}|\cdot a_{ij})x_ix_j = 0$$

即

$$|a_{ij}|\Sigma a_{ij}x_ix_j = 0$$

从而得：

$$\Sigma a_{ij}x_ix_j = 0$$

由此得出下面的推论：

推论 常态二阶曲线的切线集合是一条常态二级曲线，且对应于这条曲线的切点集合必是原来的二阶曲线。又对于常态二级曲线的切点集合是一条常态二阶曲线，且对应于这条曲线的切线集合必是原来的二级曲线（图6·19）。

这个定理说明，二阶曲线是两个射影线束对应直线交点的轨迹，同时也是两个射影点列对应点连线的包络。从点几何和线几何的角度看，二阶曲线和二级曲线是一致的，所以把它们都叫做二次曲线。这就象点有线坐标方程一样，二次曲线不仅有点坐标方程，也有线坐标方程。

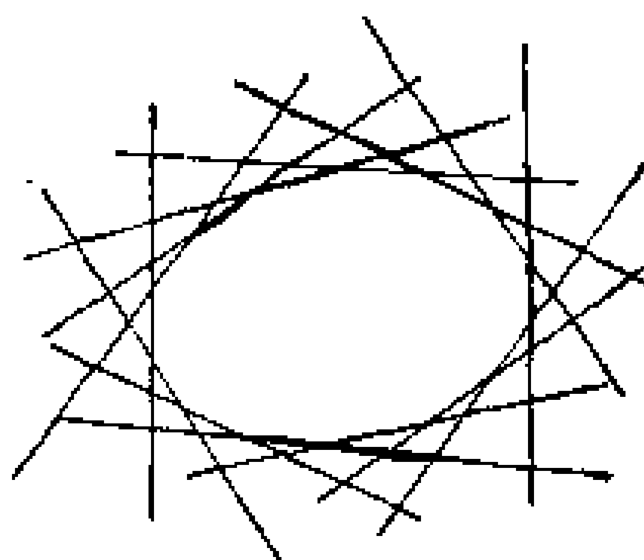


图6·19

例 1 求证点坐标方程$y^2 = 2px$与线坐标方程 $v^2 = \frac{2}{p}u$ 表示同一曲线。

证明 $y^2 = 2px$可以化成齐次坐标方程为 $x_2^2 - 2px_1x_3 = 0$。根据公式（6.6）它的线坐标方程为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -p & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ -p & 0 & 0 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

计算得：

$$pu_2^2 - 2u_1u_3 = 0$$

其非齐次坐标为

$$v^2 = \frac{2}{p}u$$

又，同理可求出 $\nu^2=\frac{2}{p}u$ 的点坐标方程为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & p & 0 & x_2 \\ -1 & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix}=0$$

计算得：

$$x_2{}^2-2px_1x_3=0$$

其非齐次坐标为

$$y^2=2px$$

方程 $y^2=2px$ 与 $\nu^2=\frac{2}{p}u$ 表示同一条曲线。

1.5 二次曲线的射影分类

在这里，仅就以点坐标表达的二阶曲线进行射影分类，而二级曲线的射影分类可以根据对偶原则来建立。分类的依据是二阶曲线的秩，以及在射影平面里选取自极三点形为坐标三点形所建立的坐标系之下，二次曲线的方程所化成的标准型。

定义 设二阶曲线为

$$\Gamma: \Sigma a_{ij}x_ix_j=0, \ a_{ij}=a_{ji}$$

满足方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0 \end{cases} \tag{1}$$

的点 x，称为Γ 的奇异点。

显然，奇异点是没有极线的点，因为奇异点的极线如果存在，则其坐标为（0,0,0），这是不可能的。常态的二阶曲线没有奇异点，变态的二阶曲线必有奇异点。可以证明，任一非奇异点的极线必通过奇异点。换句话说，奇异点和平面上的每一点关于二阶曲线Γ共轭。

下面将二次曲线 $\Sigma a_{ij}x_ix_j=0$ 分三种情况来讨论分类问

题。

1　设 $D=|a_{ij}|$的秩为3，这时 $D\neq 0$，方程组（1）没有非零解，即Γ没有奇异点。平面上每一点x存在唯一的一条对应极线：

$$\begin{cases}\rho u_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \rho u_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ \rho u_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{cases}$$

这里 $(u_1,u_2,u_3)\neq(0,0,0)$，否则（1）有非零解，而秩将小于3。

在平面上，任取不在Γ上的一点A_1，以a_1表示点A_1关于Γ的极线。在a_1上取不属于Γ的一点A_2，以a_2表示点A_2关于Γ的极线，则a_2通过点A_1。设a_2与a_1交于点A_3，则A_3的极线$a_3=A_1A_2$，于是$A_1A_2A_3$构成自极三点形。

现在取关于二次曲线Γ的自极三点形$A_1A_2A_3$，建立射影坐标系〔A_1，A_2，A_3，E〕（图6·20）。我们来看Γ的方程如何被化简成标准型。

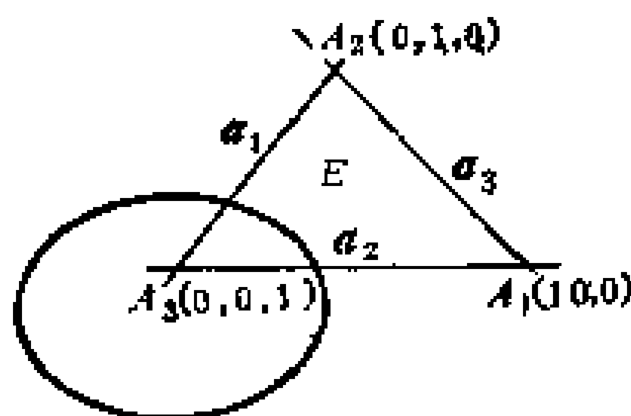


图　6·20

根据定理6.7，两点P和Q关于二阶曲线Γ成共轭的条件是

$$\Sigma a_{ij}p_iq_j=(a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3)q_1+(a_{21}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3)q_2+(a_{31}p_1+a_{32}p_2+a_{33}p_3)q_3=0 \tag{2}$$

因为点A_1和A_2共轭，将它们的坐标$(1,0,0)$和$(0,1,0)$代入（2）式，则得$a_{12}=0$。同理，因为点A_1和A_3成共轭，有$a_{13}=0$；点A_2和A_3成共轭，有$a_{23}=0$。所以二阶曲线Γ的方程化简为

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0 \tag{3}$$

又

$$D=|a_{ij}|=a_{11}a_{22}a_{33}\neq 0$$

所以 a_{11}、a_{22}、a_{33}都不为零。

再进行一次代换，令 $X_i=\sqrt{|a_{ii}|}x_i$，即$X_i^2=|a_{ii}|x_i^2=\pm a_{ii}x_i^2$，这时（3）式再化简为

$$X_1^2\pm X_2^2\pm X_3^2=0 \qquad (4)$$

但X_1、X_2、X_3 三个坐标的地位相同，故（4）式仅能表示两类曲线，即：

$$x_1^2+x_2^2\pm x_3^2=0$$

全是正号的不包含任一实点，称为**虚曲线**，另一个称为**长圆曲线**。

2　设D的秩为2，这时方程组（1）中有两个是线性无关的，二次曲线Γ 有一个奇异点 A_3，取这个奇异点的坐标为A_3（0,0,1），代入（1）式，便得$a_{13}=0$，$a_{23}=0$，$a_{33}=0$。取二次曲线Γ外一点为A_2（0,1,0），则A_2的极线a_2通过点A_3，在a_2上任取一点A_1（1,0,0），则A_1与A_3共轭。因为A_1与A_2共轭，所以同上面一样有$a_{12}=0$。在选取的坐标系〔A_1, A_2, A_3, E〕里，二次曲线Γ 的方程化简为

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2=0 \qquad (5)$$

其中a_{11}和a_{22}都不为零，否则Γ的秩就会小于2。

再进行一次代换，令$X_i=\sqrt{|a_{ii}|}x_i$，（5）式化简为

$$X_1^2\pm X_2^2=0$$

3　设D的秩为1，这时方程组（1）只有一个是线性无关的，因此二次曲线Γ 有一条直线，其上每一点都是奇异点。取该直线作为坐标三点形的一边$x_1=0$，那么将A_2（0,1,0）和A_3（0,0,1）代入（1）式得$a_{12}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=a_{33}=0$。在这种情况下，二次曲线$\Gamma$ 的方程化简为

$$x_1^2=0 \qquad (6)$$

综上所述，我们根据二次曲线的秩和适当选取坐标三点形的方法，将射影平面上的二次曲线进行了分类，共分成五个射

影类如下：

- 二阶曲线（点坐标方程）
  - 常态二阶曲线：秩 = 3
    - 实的：$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$（长圆曲线）
    - 虚的：$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$
  - 变态二阶曲线
    - 秩 = 2
      - 两条实直线：$x_1^2-x_2^2=0$
      - 两条虚直线：$x_1^2+x_2^2=0$
    - 秩 = 1：两条重合直线：$x_1^2=0$

- 二级曲线（线坐标方程）
  - 常态二级曲线：秩 = 3
    - 实的：$u_1^2+u_2^2-u_3^2=0$
    - 虚的：$u_1^2+u_2^2+u_3^2=0$
  - 变态二级曲线
    - 秩 = 2
      - 两个实点：$u_1^2-u_2^2=0$
      - 两个虚点：$u_1^2+u_2^2=0$
    - 秩 = 1：两个重合点：$u_1^2=0$

例 1　证明内切于坐标三点形的二次曲线，它的方程可写为

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3=0$$

解　设二次曲线

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0 \quad (1)$$

内切于坐标三点形的三边，因此直线 $x_1=0$ 和它相交于两个重合点，就是说方程

$$a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3=0$$

有等根，或$a_{23}^2=a_{22}a_{33}$。同理有 $a_{13}^2=a_{11}a_{33}$，$a_{12}^2=a_{11}a_{22}$，以此推得 a_{11}、a_{22}、a_{33}都不为零，且有同号，因此不失一般性，可以假设它们都是正数，令$a_{11}=a^2$，$a_{22}=b^2$，$a_{33}=c^2$，则（1）式可写成：

$$(ax_1)^2+(bx_2)^2+(cx_3)^2\pm2(ax_1)(bx_2)\pm2(bx_2)(cx_3)\pm2(ax_1)(cx_3)=0$$

作射影坐标变换（选取适当的单位点）．

$$\rho X_1 = a x_1, \ \rho X_2 = b x_2, \ \rho X_3 = c x_3, \ (abc \neq 0)$$

则上式可简化为

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \pm 2X_1X_2 \pm 2X_2X_3 \pm 2X_1X_3 = 0$$

式中后三项符号不可能全为正，也不可能是二负一正，否则左端将变成完全平方，轨迹为两条重合直线，显然与问题的性质不符．因此后三项只可能或者全是负的，即：

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 2X_1X_2 - 2X_2X_3 - 2X_1X_3 = 0 \qquad (2)$$

或者为二正一负，如：

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 2X_1X_2 + 2X_2X_3 + 2X_1X_3 = 0 \qquad (3)$$

在后一种情况下，再作一次射影坐标变换（重新选取单位点）

$$\sigma\xi_1 = X_1, \ \sigma\xi_2 = X_2, \ \sigma\xi_3 = -X_3$$

则变成所需要的形式

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_2\xi_3 - 2\xi_1\xi_3 = 0$$

例 2　化二次曲线

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 - 6x_1x_2 = 0$$

为标准方程．

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

曲线是常态的．

取不在二次曲线上的一点（0, 1, 1），其极线可根据

$$\begin{cases} \rho u_1 = x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \rho u_2 = -3x_1 + x_2 + x_3 \\ \rho u_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

求出，计算得：

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad (1)$$

在（1）上任取一点（1, 0, 1），其极线为

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \tag{2}$$

解方程组（1）、（2），得交点坐标为（1，1，0）。三点（0,1,1），（1,0,1）、（1,1，0）关于已知二次曲线构成一个自极三点形的三个顶点。

现在取刚得出的自极三点形为新的射影坐标三点形，其坐标分别为（1,0,0）、（0,1,0）、（0,0,1），它们在旧坐标系里的坐标分别为（0,1,1）、（1,0,1）、（1,1，0）则新旧坐标之间的坐标变换（即射影变换）由下式决定

$$\begin{cases}\sigma x_1 = a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_3' \\ \sigma x_2 = b_1x_1' + b_2x_2' + b_3x_3' \\ \sigma x_3 = c_1x_1' + c_2x_2' + c_3x_3'\end{cases}$$

将新旧坐标代入即可确定a_i、b_i、c_i。经过计算得出坐标变换为

$$\begin{cases}\rho x_1 = x_2' + x_3' \\ \rho x_2 = x_1' + x_3' \\ \rho x_3 = x_1' + x_2'\end{cases} \tag{3}$$

将（3）代入已知二次曲线方程，则化简成

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0 \tag{4}$$

注意：本题写出了全部推导过程．实际上，根据分类时的讨论，只要判定 $D \neq 0$ 或秩等于 3，又不是虚曲线（即在曲线上能找出一实点），就可直接写出标准方程（4）。

§2 二次曲线的仿射性质

本节研究二次曲线在仿射变换下的不变性质，即仿射性质．为了统一用射影观点和方法解释、研究这些性质，我们将在射影变换的基础上，并且使它保持把无穷远直线还变成无穷远直线，这时得到的不变性质就是仿射性质．我们首先以无穷远直线为特征，介绍二次曲线的中心、直径、渐近线等概念及

性质，最后根据仿射性质对二次曲线进行分类。

2.1　二次曲线的中心、直径、渐近线

1　二次曲线的中心

只讨论常态二次曲线。

定义　无穷远直线关于已知二次曲线的极点，叫做这个二次曲线的中心。如果中心是有穷远点，这个二次曲线叫做有心二次曲线。如果中心是无穷远点，这个二次曲线叫做无心二次曲线。

我们来求中心的坐标：

设极线的坐标为(u_1, u_2, u_3)，它的极点坐标为(x_1, x_2, x_3)。根据公式（6.5）有：

$$\rho u_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \qquad (1)$$

或

$$\sigma x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} u_j \qquad (2)$$

将无穷远直线的坐标（0, 0, 1）代入（2）式即得：

$$\sigma x_1 = A_{31},\ \sigma x_2 = A_{32},\ \sigma x_3 = A_{33} \qquad (3)$$

所以中心的齐次坐标为（A_{31}, A_{32}, A_{33}）。对有心二次曲线，$A_{33} \neq 0$，中心的非齐次坐标为$\left(\frac{A_{31}}{A_{33}}, \frac{A_{32}}{A_{33}}\right)$。

根据$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$不等于零或等于零，决定了二次曲线是有心的或无心的。同时根据A_{33}是正、是负、是零决定无穷远直线与二次曲线实交点的个数，从而决定常态二次曲线的三种类型。也就是：

设二次曲线Γ为

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j = 0,\ |a_{ij}| \neq 0,\ a_{ij} = a_{ji}$$

无穷远直线 $x_3 = 0$ 与二次曲线Γ 的交点应满足

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0,\ x_3 = 0 \qquad (4)$$

（1）当 $A_{33} > 0$ 时，$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$，方程（4）有二虚根，无穷远直线与二次曲线$\Gamma$没有实交点，称这种二次曲线为**椭圆**。

（2）当$A_{33} < 0$时，方程（4）有二实根，无穷远直线与二次曲线Γ交于二实点，称这种二次曲线为**双曲线**。

（3）当$A_{33} = 0$时，方程（4）有二重实根，这时无穷远直线与二次曲线Γ仅有一个实交点，即在该点相切于Γ，称这种二次曲线为**抛物线**。

综上所述，有心二次曲线是椭圆和双曲线，无心二次曲线是抛物线。

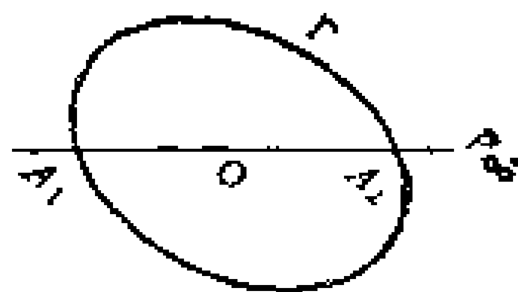


图6·21

二次曲线中心的几何意义是过中心的任意一弦被中心所平分。实际上，过中心作任意直线与二次曲线 Γ 交于点 A_1、A_2（图6·21）．因为 P_∞ 在点O的极线上，所以O、P_∞是关于二次曲线Γ的共轭点，从而有

$$(A_1A_2,\ OP_\infty) = -1$$

即O是A_1A_2的中点．由此得如下定理：

定理6.13 二次曲线的中心平分通过它的每一条弦．

例1 求二次曲线 $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0$ 的中心，并判断曲线的类型．

解

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4},\quad A_{32}=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}$$

所求的中心为 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$，非齐次坐标为（－1，－1）。

因为 $A_{23}<0$，故二次曲线为双曲线。

2　二次曲线的直径

定义　无穷远点关于二次曲线 Γ 的极线（除无穷远直线外），叫做二次曲线的直径。

根据配极对应，无穷远直线的极点是二次曲线 Γ 的中心，所以无穷远直线上的每一点的极线必通过中心，这就是说二次曲线的每一条直径都通过中心。对于无心的二次曲线（抛物线），由于它的中心是无穷远点，所以所有的直径都互相平行（图6·22）

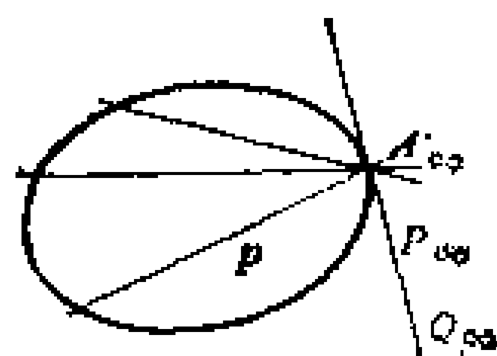


图6·22

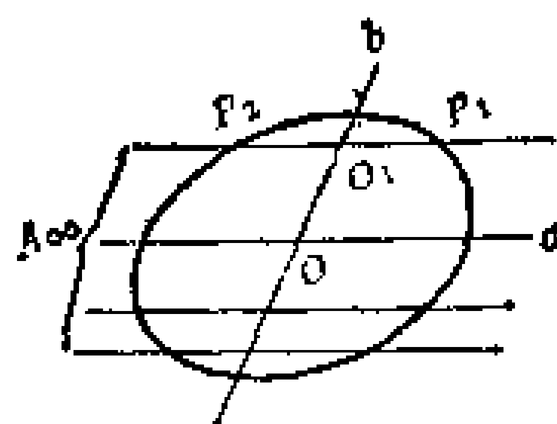


图6·23

定义　如果两条直径彼此通过对方的极点，则这两条直径叫做共轭直径。

共轭直径有下面的重要性质：

设二次曲线Γ的一条直径为a，A_∞是a的无穷远点，则A_∞的极线b是二次曲线Γ的另一条直径，而且a和b是共轭直径（图6·23）．以A_∞为中心的线束是平行于直径a的平行线束，设其中任意一条与二次曲线Γ交于P_1、P_2点，与直径b交于O_1点。因为点O_1与A_∞关于二次曲线Γ共轭，所以$(P_1P_2,O_1A_\infty)=-1$，于是O_1是弦P_1P_2的中点．这就证明了共轭直径之一必等分与另一直径平行的所有弦．由此得：

定理6.14 有心二次曲线的每一条直径必平分其共轭直径的所有平行弦。

3 渐近线

定义 如果二次曲线Γ与无穷远直线p_∞交于两点T、T'，则以T、T'为切点的两条切线叫做二次曲线Γ的渐近线。

因为双曲线、抛物线、椭圆各与无穷远直线交于两点、一点、两虚点，由此可知双曲线有两条实渐近线，抛物线以无穷远直线为渐近线，而椭圆有两条虚渐近线。

根据定义，可得出下面的定理：

定理6.15 二次曲线的两条渐近线交于中心，而且调和分隔任意两条共轭直径。

证明 设a、a'是二次曲线Γ的一对共轭直径，与无穷远直线p_∞分别交于点A_∞和A'_∞，直线t、t'是二次曲线Γ的一对渐近线（图6·24）．

因为t、t'是二次曲线Γ的切线，所以切点T、T'就是它们的极点，而中心O是无穷远直线p_∞的极点，因此渐近线t、t'通过中心O。

因为a和a'是共轭直径，所以A_∞是a'的极点，A'_∞是a的极点，A_∞、A'_∞关于二次曲线共轭，因此

$$(TT',A_\infty A'_\infty)=-1$$

所以

$$(tt',aa')=-1$$

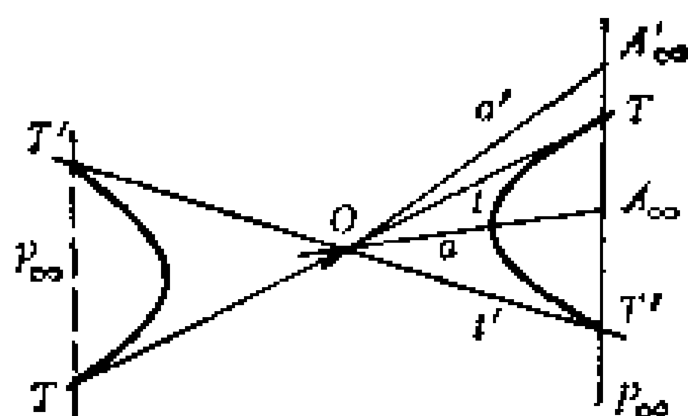


图6·24

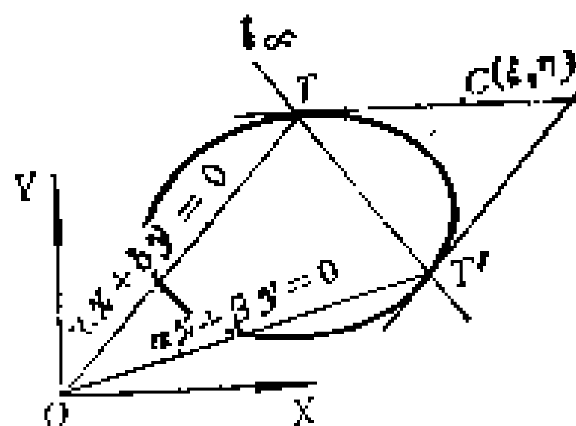


图6·25

我们来求渐近线的方程：

在齐次坐标下，二次曲线Γ与无穷远直线 $x_3=0$ 的交点T和 T' 满足

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0 \qquad (1)$$

这个方程又可表示为非奇次坐标方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0 \qquad (2)$$

或

$$(\alpha x+\beta y)(\gamma x+\delta y)=0 \qquad (3)$$

它表示过原点和无穷远点T和T'的两条直线，因此分别和过二次曲线Γ中心C的两条渐近线CT和CT'平行，如图6·25所示。

因此将原点移至二次曲线中心C (ξ,η)，即分别用 $x-\xi$ 和$y-\eta$代替x和y，则（2）式变成

$$a_{11}(x-\xi)^2+2a_{12}(x-\xi)(y-\eta)+a_{22}(y-\eta)^2=0 \qquad (6.8)$$

就是所求的两条渐近线的方程。

对于二次曲线 $\Sigma a_{ij}x_ix_j=0$，求出中心 $C(\xi,\eta)$就可以求出其渐近线方程。还可以通过求出两个与无穷远直线的交点或求出渐近线的方向系数与中心结合起来导出。

例 2 求曲线$x^2+2xy-3y^2+2x-4y=0$的渐近线方程。

解 系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

所以$A_{31}=1$，$A_{32}=3$，$A_{33}=-4$，因此中心坐标为

$$\xi=\frac{A_{31}}{A_{33}}=-\frac{1}{4}, \quad \eta=\frac{A_{32}}{A_{33}}=-\frac{3}{4}$$

根据（6.8）式，所求的渐近线方程为

$$X^2+2XY-3Y^2=0 \text{ 或 } (X-Y)(X+3Y)=0 \qquad (1)$$

其中

$$X=x-\left(-\frac{1}{4}\right), Y=y-\left(-\frac{3}{4}\right) \qquad (2)$$

将（2）代入（1）中，得所求的渐近线方程为

$$x=y+\frac{1}{2}, \quad x=-3y-\frac{5}{2}$$

例 3 如果一个平行四边形内接于一个有心二次曲线，则它的两条对角线是二次曲线的直径，而且它的两边平行于一对共轭直径。

证明 已知如图6.26。因为四点形$ABCD$内接于一有心二次曲线Γ，所以这个对角点O、P_∞、Q_∞构成一个自极三点形。

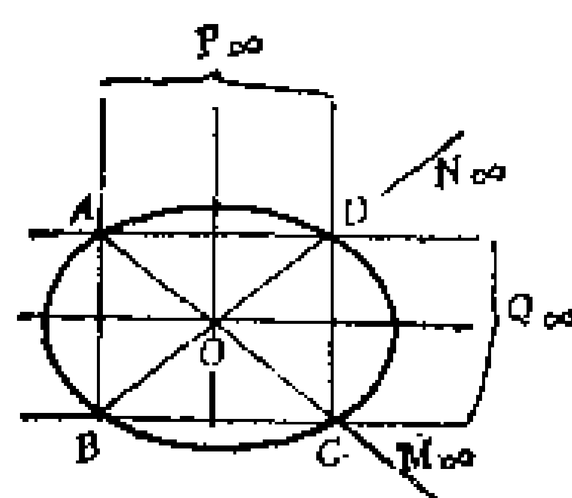


图6.26

实际上，点O平分弦 AC 和弦BD，$(AC,OM_\infty)=-1$，$(BD, ON_\infty)=-1$，所以点O的极线为无穷远直线，点P_∞的极线为OQ_∞，点Q_∞的极线为OP_∞，由此可知点O为二次曲线Γ的中心，所以AC和BD是直径。

又因为OP_∞通过OQ_∞的极点，OQ_∞通过OP_∞的极点，可知OP_∞和OQ_∞为二次曲线Γ的一对共轭直径，所以AB和BC分别平行于一对共轭直径。

2.2 二次曲线的仿射分类

在齐次仿射坐标(x_1,x_2,x_3)下，常态二次曲线的方程为

$$\Sigma a_{ij}x_ix_j=0 \qquad (a_{ij}=a_{ji})$$

它的系数 a_{ij} 所成的行列式为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$$

下面分两种情况讨论：

1　有心二次曲线

当 $A_{33}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$，这时二次曲线是有心的．以中心 A_3 为坐标三点形的一个顶点，以过中心的两条共轭直径作为坐标三点形的两边，再以中心的极线 A_1A_2 作为坐标三点形的第三边（图6.27）．这时三点形一定是自极三点形．因此二次曲线的方程可简化为

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0$$

如果以 X_1,X_2,X_3 分别代替 $\sqrt{|a_{11}|}\,x_1$，$\sqrt{|a_{22}|}\,x_2$，$\sqrt{|a_{33}|}\,x_3$，那么上式因各项符号的异同，又可分成如下三种情况：

（1）$X_1^2+X_2^2+X_3^2=0$，或写成非齐次坐标方程 $X^2+Y^2+1=0$（虚椭圆）．

（2）$X_1^2-X_2^2-X_3^2=0$，或写成非齐次坐标方程 $X^2+Y^2-1=0$（实椭圆）．

（3）$X_1^2-X_2^2-X_3^2=0$，或写成非齐次坐标方程 $X^2-Y^2-1=0$（双曲线）．

注意：这一分类与二次曲线的射影分类的不同之处，在于二次曲线的射影分类中，那时的 X_1、X_2、X_3 三个坐标有同等的身份，所以 $X_1^2+X_2^2-X_3^2=0$ 和 $X_1^2-X_2^2-X_3^2=0$（即 $-X_1^2+X_2^2+X_3^2=0$）看作同一情况；可是现在讨论的是仿射性质，这时 $X_3=0$ 固定地表示无穷远直线 l_∞，所以它们的身份不是同等的．因此 $X_1^2+X_2^2-X_3^2=0$ 和 $X_1^2-X_2^2-X_3^2=0$（即 $-X_1^2+X_2^2+$

$X_3^2=0$）不能看作同一情况，即X_1和X_2都不能与X_3互换，而X_1和X_2仍然可以互换。

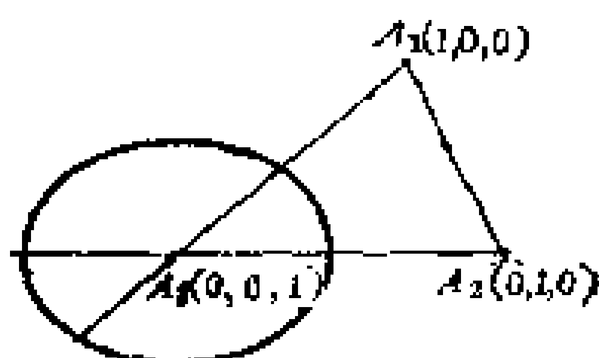


图6.27

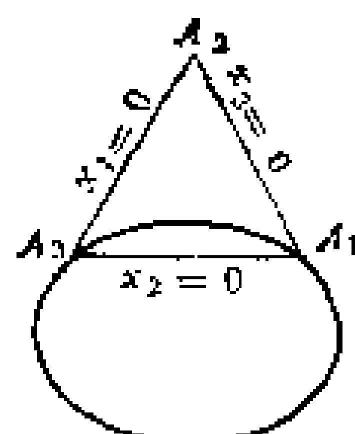


图6.28

2　无心二次曲线

当 $A_{33}=0$，这时二次曲线是无心的（中心在 l_∞ 上）．以l_∞、一条直径及此直径与二次曲线相交的有穷交点处的切线作为坐标三点形的三条边（图6.28）．它的顶点是 A_1（1,0,0）、A_2（0,1,0）、A_3（0,0,1）．因为点 A_1 和 A_2 共轭，A_2和A_3共轭（切线上的点与切点共轭），由定理6.7 得：

$$a_{12}=0,\ a_{23}=0$$

又因为点A_1、A_3在二次曲线上，所以$a_{11}=a_{33}=0$。因此，在以上述的坐标三点形建立坐标系，则二次曲线的方程可简化为

$$a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3=0\text{或}\ x_2^2-2px_1x_3=0\quad\left(p=-\frac{a_{13}}{a_{22}}\right)$$

如用非齐次坐标来表示，可写成

$$y^2-2px=0$$

它所表示的图形是抛物线。经过仿射坐标变换　$y=Y$，　$x=\frac{1}{p}X$ 该式还可简化为 $Y^2-2X=0$。

综上所述，常态二次曲线可以仿射分类如下：

- 常态二次曲线
  - 有心二次曲线 $A_{33}\neq 0$
    - 椭圆（$A_{33}>0$）
      - 虚椭圆：$x^2+y^2+1=0$
      - 实椭圆：$x^2+y^2-1=0$
    - 双曲线（$A_{33}<0$）：$x^2-y^2-1=0$
  - 无心二次曲线 $A_{33}=0$——抛物线：$y^2-2x=0$

例 1　如果双曲线的一条弦 AB 交两条渐近线于 P、Q二点，则 $PA=BQ$。

证明　设弦AB被一条相应的共轭直径OM平分（图6.29）M为弦AB的中点。作直径ON平行于AB，所以 OM、ON 是一对共轭直径。于是

$$(OP\ OQ,OM\ ON)=-1$$

因此（PQ,MN）$=-1$，即（PQM）$=-1$，M为 PQ 的中点。又因M为 AB 之中点，所以 $PA=BQ$。

当弦 AB为切线时，M为切点，得性质：

双曲线的任意一条切线介于二渐近线之间的部分，被切点平分。

例 2　双曲线上任意一条切线截两条渐近线所成的三角形面积是常数。

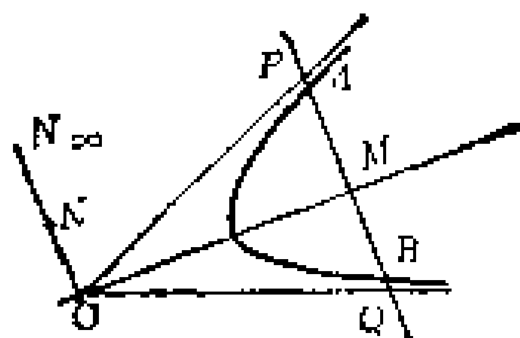


图6.29

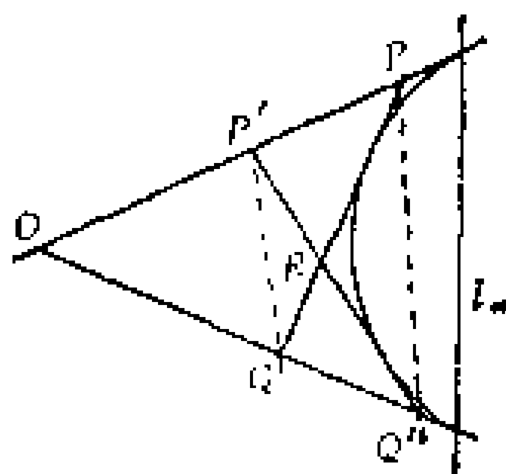


图6.30

解　设 PQ、$P'Q'$是双曲线的任意两条切线，它们分别交一条渐近线于P、P'两点（图6.30），交另一条渐近线于 Q、Q' 两点。这两条切线与两条渐近线构成一个完全四线形。它的对顶线是PQ'、$P'Q$及OR。OR是一条直径（通过中心O），

它的极点是PQ'与$P'Q$的交点。因为OR的极点是l_∞上的点，所以PQ'平行于$P'Q$（根据本章习题第20题的对偶命题），因此$S_{\triangle Q'P'Q} = S_{\triangle PP'Q}$（等积），等积的两个三角形同时加上$\triangle P'QO$的面积，得$S_{\triangle OPQ} = S_{\triangle OQ'P'}$。

例 3 求仿射坐标变换，化二次曲线

$$\Gamma:\ x^2+2xy+2y^2-6x-2y+9=0$$

为标准方程。

解 将二次曲线Γ化成齐次方程为：

$$x_1{}^2+2x_1x_2+2x_2{}^2-6x_1x_3-2x_2x_3+9x_3{}^2=0 \qquad (1)$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$$

$A_{31}=5$，$A_{32}=-2$，$A_{33}=1$

所以二次曲线Γ的中心为 A'_3（5，-2，1）。

A'_3的极线为无穷远直线$x_3=0$。在其上任取一点A'_1(1，0，0)，则A_1'点的极线为

$$x_1+x_2-3x_3=0 \qquad (2)$$

所以无穷远直线$x_3=0$与（2）式的交点为A'_2(1，-1，0)。

取自极三点形$A'_1A'_2A'_3$为新的坐标三点形，建立新坐标系。由坐标变换公式

$$\begin{cases} \rho x_1=a_1x_1'+a_2x_2'+a_3x_3' \\ \rho x_2=b_1x'_1+b_2x_2'+b_3x_3' \\ \rho x_3=c_1x_1'+c_2x_2'+c_3x_3' \end{cases}$$

并将A_1'、A_2'、A_3'的新旧坐标代入，可求出 a_i、b_i、c_i（$i=1,2,3$）。于是得坐标变换式为

$$\begin{cases} \rho x_1=x_1'+x_2'+5x_3' \\ \rho x_2=\quad -x_2'-2x_3' \\ \rho x_3=\qquad\qquad x_3' \end{cases} \qquad (3)$$

在此坐标变换下，（1）式化简为

$$x'^2_1 + x'^2_2 - 4x'^2_3 = 0 \qquad (4)$$

再适当选取单位点 E'，即作变换

$$\begin{cases} x_1' = X_1 \\ x_2' = X_2 \\ x_3' = \frac{1}{2}X_3 \end{cases} \qquad (5)$$

将（5）代入（4）式，则（4）式化简成标准方程

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0$$

§ 3　二次曲线的度量性质

这一节讨论二次曲线在正交变换下的不变性质，也叫度量性质。为了统一用射影观点解释和研究这些性质，我们还是在射影变换的基础上，并且使它保持把无穷远直线还变成无穷远直线，同时把无穷远直线上的两个虚圆点还变成虚圆点，这时得到的不变性质就是度量性质。为此，首先讨论虚圆点和性质，然后根据虚圆点与二次曲线的关系，逐步推导出二次曲线的某些度量性质。

3.1　圆点与迷向直线

为了建立圆点的概念，我们先证明下一定理。

定理6.16　平面内任何一圆都通过无穷远直线上两个固定虚点。

证明　在笛氏直角坐标系里，圆的一般方程是

$$a_{11}(x^2 + y^2) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

它的齐次坐标方程为

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \qquad (2)$$

这个圆与无穷远直线 $x_3 = 0$ 的交点坐标应满足

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) = 0,\ x_3 = 0$$

设 $a_{11} \neq 0$，关系式可写成：

$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$

它的两个虚根分别为

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = i \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -i \end{cases}$$

故所有的常态圆与无穷远直线的交点齐次坐标为 $(1, i, 0)$ 和 $(1, -i, 0)$，它们是两个固定的虚点。

上述定理的逆命题也成立：

定理6.17 通过两点 $(1, i, 0)$、$(1, -i, 0)$ 的二次曲线一定是圆。

证明 设二次曲线Γ为

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j = 0, \ a_{ij} = a_{ji} \qquad (1)$$

因为二次曲线Γ过点 $(1, i, 0)$、$(1, -i, 0)$，故两点的坐标必适合方程（1），所以应有

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{22}) + 2a_{12} i = 0 \\ (a_{11} - a_{22}) - 2a_{12} i = 0 \end{cases}$$

解方程组得$a_{11} = a_{22}$，$a_{12} = 0$。因此二次曲线Γ是一个圆。

定义 圆与无穷远直线的交点 $I\ (1, i, 0)$、$J\ (1, -i, 0)$ 叫做平面上的圆点。

显然，两圆点的线坐标方程为

$$u \pm iv = 0 \quad 或 \quad u^2 + v^2 = 0$$

定义 过平面上任何一点A与I或J连结的两条直线叫做该点A的迷向直线。沿迷向直线的方向叫做迷向方向。

根据定义可知，平面上每一点都有两条迷向直线。而且过每一点的两条迷向直线都和另外任何一点的两条迷向直线分别平行，因为它们通过两个无穷远点I和J，如图6.31所示。因此，平面上只有两个迷向方向。当然它们都是虚的，实际上是画不出来的。

迷向方向可以这样来确定：

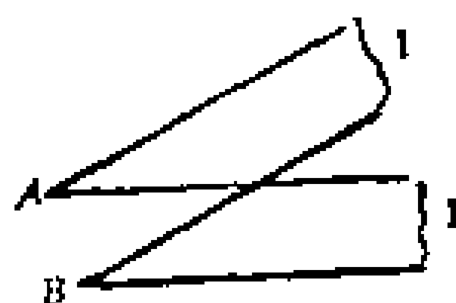
我们知道以λ为斜率的直线上，其无穷远点的坐标为 $(1, \lambda,$

0），因此两条迷向直线的斜率分别为 i 和 $-i$，所以迷向直线的方程分别为

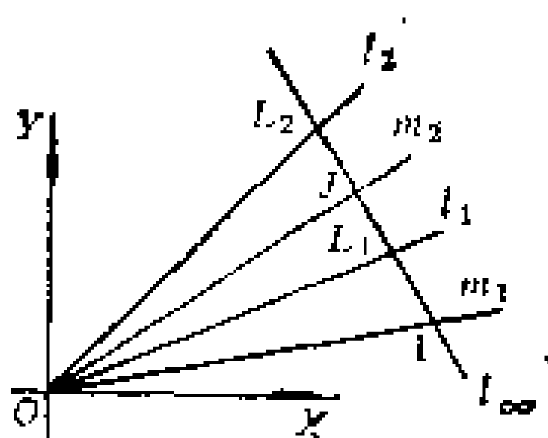
$$y=\pm ix+b$$

定理6.18（拉格尔（Lagurre）定理）设两条非迷向直线的交角为 α，这两条直线与过其交点的两条迷向直线所成的交比为 μ，则在对数的主值范围内

$$\alpha=-\frac{1}{2i}\ln\mu \qquad (6.9)$$



题6.31



题6.32

证明 设两条非迷向直线为 l_1、l_2，其斜率为 λ_1、λ_2，迷向直线为 m_1、m_2，其斜率为 i 和 $-i$（图6.32）。则有：

$$\mu=(l_1l_2,m_1m_2)=\frac{(\lambda_1-i)(\lambda_2+i)}{(\lambda_1+i)(\lambda_2-i)}$$

即：

$$\mu=\frac{(\lambda_1\lambda_2+1)-i(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1\lambda_2+1)+i(\lambda_2-\lambda_1)}$$

$$=\frac{1-i\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}}{1+i\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}} \quad (\lambda_2\lambda_2+1\neq 0) \qquad (6.10)$$

因为 $\quad \mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$ （因为 $\alpha=\angle XOL_2-\angle XOL_1$）

所以 $\quad \mu=\dfrac{1-i\mathrm{tg}\alpha}{1+i\mathrm{tg}\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\cos\alpha+i\sin\alpha}=\dfrac{e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}}=e^{-2i\alpha}$

于是 $-2i\alpha=\ln\mu$, $\alpha=-\frac{1}{2i}\ln\mu=\frac{i}{2}\ln\mu$

根据这一定理可以得出下面的重要事实：

定理6.19 两条非迷向直线垂直的充要条件是这两条直线被过交点的两条迷向直线调和分隔。

证明 充分性：若 $(l_1l_2,m_1m_2)=\mu=-1$，根据（6.10）式有：

$$\frac{(\lambda_1\lambda_2+1)-i(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1\lambda_2+1)+i(\lambda_2-\lambda_1)}=-1$$

所以 $\lambda_1\lambda_2+1=0$。即直线l_1与l_2垂直。

必要性：若直线 l_1 与 l_2垂直，$\alpha=\frac{\pi}{2}$，则

$$\lambda_1\lambda_2+1=0$$

根据公式（6.10）可推出：

$$\mu=(l_1l_2,m_1m_2)=-1$$

这个定理的重要意义在于给出欧氏几何的角度和垂直性以射影的解释，因为它们分别用射影性质——交比和调和比表达了出来，从而将欧氏几何和射影几何联系起来。

下面用射影观点来讨论圆的两个性质。

定理6.20 平面上不在同一直线上的三个实点可以确定一个常态圆。

因为每三点不共线的五个点可决定一个二次曲线，而每两个实点与圆点不共线，所以已知三个点与两个圆点决定一个二次曲线，而且是一个圆。

定理6.21 一个圆中同一条弧所对的圆周角相等。

证明 设公共弧是 $\overset{\frown}{AB}$，它所对的圆周角为 $\angle ACB$ 和 $\angle AC'B$（图6.33）。

因为线束中（$CI\ CJ,CA\ CB$）$=\mu_1$，（$C'I\ C'J,CA\ CB$）$=\mu_2$ 又从二次曲线的定义必有：

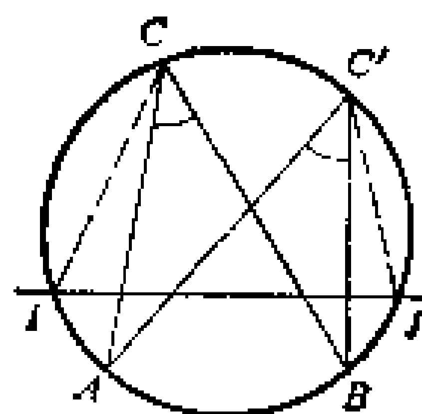


图6.33

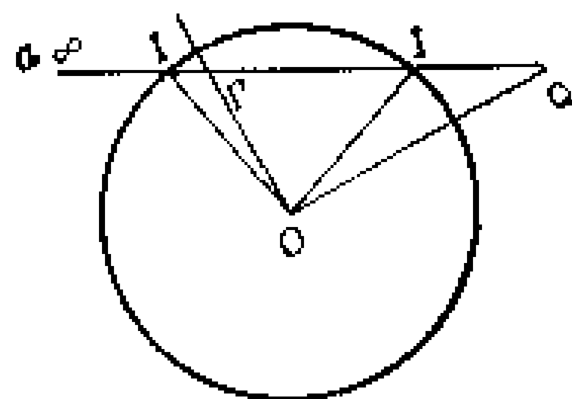


图6·34

$$(CI\ CJ, CA\ CB) = (C'I\ C'J, CA\ CB)$$

所以　　$\mu_1 = \mu_2$。于是

$$\angle ACB = -\frac{1}{2i}\ln\mu_1 = -\frac{1}{2i}\ln\mu_2 = \angle AC'B$$

例 1　证明圆的任何一对共轭直径互相垂直。

解　已知圆 O，OP与OQ是一对共轭直径，与无穷远直线交于 P、Q，I、J 为圆点，（图6.34）。

根据渐近线的性质可知，过中心O 且过无穷远直线与圆的两个交点I、J 的两条直线 OI 和OJ必是圆的两条渐近线（虚直线）。根据定理6.15有：

$$(OP\ OQ, OI\ OJ) = -1$$

再根据定理6.19可知$OP \perp OQ$。

例 2　迷向直线上任意两点的距离为零。

解　设已知迷向直线

$$y = ix + b$$

$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 是其上两点，则有：

$$y_2 - y_1 = i(x_2 - x_1)$$

所以$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2 i^2}$
$= 0$

3.2　主轴、焦点和准线

1　主轴

按着用射影观点对垂直的解释，给出如下的定义。

定义 二次曲线的一条直径如果平分一组和它垂直的弦，则此直径叫做**主轴**。主轴与曲线交出的有穷点叫做**顶点**。主轴也称对称轴。

根据这一定义可知，互相垂直的共轭直径都是主轴。二次曲线的主轴必是对称轴。

我们探讨一下二次曲线主轴的情况。

定理6.22 抛物线只有一条主轴。

实际上，抛物线的所有直径都是平行的，所以垂直于直径的方向就只有一个，与这个方向平行的弦只有一组。因此平分这一组弦的直径只有一条，它通过抛物线的顶点V，且垂直于过顶点的切线。严格证明如下：

证明 设无穷远直线l_∞与抛物线相切于P_∞。求出 I、J、P_∞的第四调和点Q_∞，即：

$$(IJ,P_\infty Q_\infty) = -1$$

从点 Q_∞ 作抛物线的切线，切点为V（图6.35）。因为

$$(VIVJ,VP_\infty VQ_\infty) = -1$$

所以直线VP_∞垂直于VQ_∞。又VP_∞是点Q_∞的极线（定理6.10的推论），所以VP_∞是一条直径。

设直线$Q_\infty M$是任意平行于直线$Q_\infty V$的直线，它与抛物线交于点M_1、M_2，与直线VP_∞交于点M，则

$$(M_1M_2,Q_\infty M) = -1$$

所以M为弦M_1M_2的中点，即$P_\infty V$平分所有与$Q_\infty V$平行的弦。

推论 抛物线的主轴，是它上面的无穷远点 P_∞ 关于圆点I、J 的第四调和点 Q_∞ 的极线。

定理6.23 除圆以外的有心二次曲线只有一对主轴，它们是两条渐近线交角的两条平分线。

证明 设有心二次曲线 Γ与无穷远直线交于点 P_∞、P'_∞（对于双曲线来说是实点，对于椭圆则为虚点）。过点 P_∞、P'_∞作二次曲线Γ的切线交于点O，则切线OP_∞和OP'_∞是二次曲

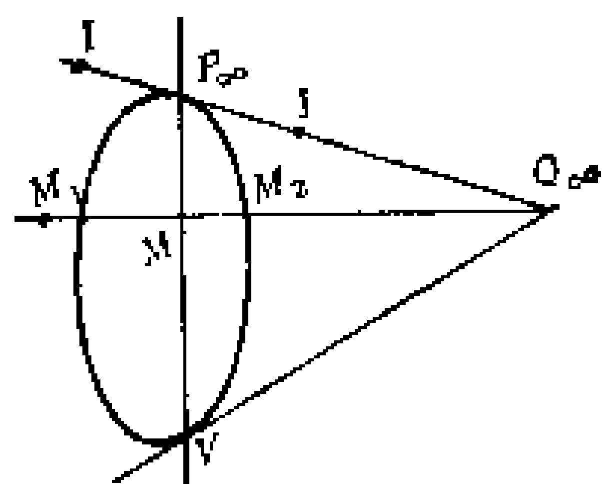


图6.35

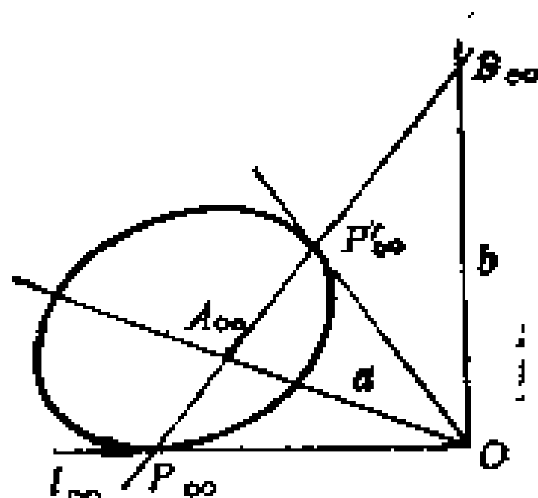


图6.36

线Γ的渐近线，O是二次曲线Γ的中心．（图6.36）．

分别作$\angle P_\infty OP'_\infty$和其外角的平分线$a$、$b$，则 $a\perp b$。因为

$$(OP_\infty\ OP'_\infty, OA_\infty\ OB_\infty)=-1$$

所以（$P_\infty P'_\infty, A_\infty B_\infty$）$=-1$，$A_\infty$、$B_\infty$ 关于二次曲线Γ成共轭点，于是 a 是B_∞的极线，b是A_∞的极线，a、b 是既垂直又共轭的两条直径，它们是二次曲线 Γ的一对主轴．

关于只有一对主轴的证明，从下面求主轴方程的推导中可以说明．

主轴方程的求法如下：

（1）对有心二次曲线，根据主轴是即共轭又垂直的直径来求．

设二次曲线 Γ，其方程为：

$$\Sigma a_{ij}x_ix_j=0, a_{ij}=a_{ji}, |a_{ij}|\neq 0$$

它的中心为（A_{31}, A_{32}, A_{33}）．

首先讨论二直径成共轭的条件．根据直径的定义，任意无穷远点关于二次曲线 Γ的极线都是直径，而且它们通过中心，因此所有直径构成一个直线束，其方程可以写成：

$$a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+\lambda(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3)=0 \quad (6.11)$$

〔实际上是取两个无穷远点（1,0,0）和（0,1,0）的两条极线构成的〕．

现在取出任一直径

$$a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+k(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3)=0 \quad (1)$$

求其共轭直径。

直线（1）与无穷远直线的交点坐标为

$$(a_{21}+a_{22}k,\ -a_{11}-a_{12}k,0)$$

这一无穷远点的极线方程为

$$[a_{11}(a_{21}+a_{22}k)+a_{12}(-a_{11}-a_{12}k)]x_1+[a_{21}(a_{21}+a_{22}k)$$
$$+a_{22}(-a_{11}-a_{12}k)]x_2+[a_{31}(a_{21}+a_{22}k)+a_{32}(-a_{11}-a_{12}k)]x_3=0$$

整理后为：

$$(a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3)+k'(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3)=0 \quad (2)$$

其中 $k'=\dfrac{a_{11}+a_{12}k}{a_{12}+a_{22}k}$

或写成

$$a_{11}+a_{12}(k+k')+a_{22}kk'=0 \qquad (6.12)$$

进一步可以验证k'正好是直线（1）的斜率，而k正好是直线（2）的斜率。

公式（6.12）是二直径成共轭直径的条件。

其次求主轴的方程。设主轴方程为

$$a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+k_1(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3)=0$$
$$a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+k_2(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3)=0 \quad (3)$$

因为k_1和k_2是斜率，所以$k_1k_2=-1$，即：

$$k_2=-\frac{a_{11}+a_{12}k_1}{a_{12}+a_{22}k_1}=-\frac{1}{k_1}$$

令

$$a_{11}+a_{12}k_1=\frac{a_{12}+a_{22}k_1}{k_1}=\lambda \qquad (4)$$

则由（4）式得出

$$\begin{cases}a_{11}-\lambda+a_{12}k_1=0\\ a_{12}+(a_{22}-\lambda)k_1=0\end{cases} \qquad (5)$$

如果k存在，则必有：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

即 $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}^2=0$

（6）式称为特征方程。解出 λ 即可确定 k 值，从而得出主轴的斜率。因为（6）式中的λ有二解，所以得出两个斜率 k_1 和 k_2，其主轴方程为

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{21}x_2-a_{31}x_3+k_1(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3)=0 \\ a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+k_2(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3)=0 \end{aligned} \qquad (6.13)$$

或非齐次坐标方程为

$$\begin{aligned} a_{11}x+a_{21}y+a_{31}+k_1(a_{12}x+a_{22}y+a_{32})=0 \\ a_{11}x+a_{21}y+a_{31}+k_2(a_{12}x+a_{22}y+a_{32})=0 \end{aligned} \qquad (6.14)$$

（2）对于抛物线可类似地求出其主轴方程为

$$a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+\frac{a_{12}}{a_{11}}(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3)=0 \quad (6.15)$$

当 $a_{11}=0$时，则主轴方程为

$$a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+\frac{a_{22}}{a_{12}}(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3)=0 \quad (6.16)$$

或改写成为非奇次坐标方程为

$$a_{11}x+a_{21}y+a_{31}+\frac{a_{12}}{a_{11}}(a_{12}x+a_{22}y+a_{32})=0 \quad (6.17)$$

$$a_{11}x+a_{21}y+a_{31}+\frac{a_{22}}{a_{12}}(a_{12}x+a_{22}y+a_{32})=0 \quad (6.18)$$

2 焦点和准线

定义 自圆点I、J引二次曲线的切线（迷向切线），它们的有穷交点叫做二次曲线的焦点。焦点的极线叫做准线。

我们来讨论不同类型的二次曲线的焦点和准线的情形：

（1）圆通过I，J二点，而过I、J的切线是它的渐近线，因此它们的交点就是圆心，这就是圆的唯一焦点。因为圆心的极线是无穷远直线，所以无穷远直线是圆的准线。

（2）对圆以外的有心二次曲线，过I、J二点可作它的四条切线共有四个焦点，其中两个是实的，两个是虚的（图6.37）。

例如：对实椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0) \tag{1}$$

来说，设具有斜率为k的一组平行弦的方程为

$$y=kx+d \quad (2)$$

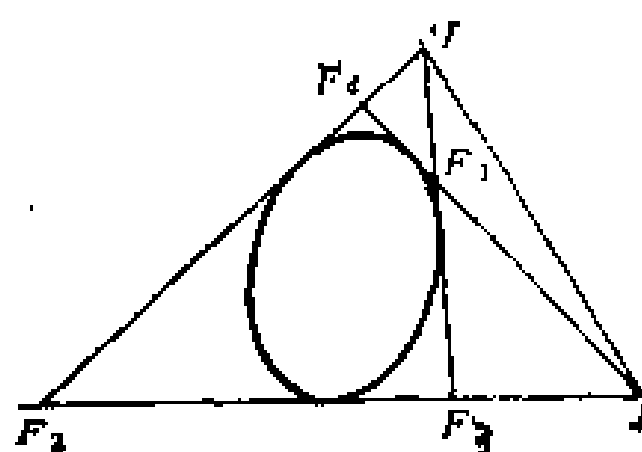


图6.37

将（2）代入（1）式则得：

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2dkx+a^2(d^2-b^2)=0 \quad (3)$$

若平行弦之一与椭圆相切，则（3）式有等根，由判别式$\triangle=0$可得：

$$d=\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$$

因此椭圆具有斜率k的切线方程为

$$y=kx\ \pm\sqrt{a^2k^2+b^2} \tag{4}$$

过I、J的切线具有斜率为i或$-i$，所以迷向切线方程分别为

$$y=ix\ \pm i\sqrt{a^2-b^2}$$

$$y=-ix\pm i\sqrt{a^2-b^2}$$

令 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，则四条迷向切线可写成：

p：$y=ix+ic$

q：$y=ix-ic$

$\overline{q}$：$y=-ix+ic$

$\overline{p}$：$y=-ix-ic$

其中每两条迷向切线相交，共得四个交点为

$$p\times\overline{p}=F_1(-c,0),\qquad q\times\overline{q}=F_2(c,0)$$

$$p\times\overline{q}=F_3(0,ic),\quad \overline{p}\times q=F_4(0,-ic)$$

F_1和F_2是实的，F_3和F_4是虚的。

四个焦点的极线，可由配极对应的关系式得出，即对于任意一点（x_0,y_0）关于椭圆（1）的极线为

$$b^2xx_0+a^2yy_0-a^2b^2=0$$

所以各焦点对应的准线为

$$\begin{aligned} &F_1(-c,0)\longrightarrow x=-\frac{a^2}{c}\\ &F_2(c,0)\longrightarrow x=\frac{a^2}{c}\\ &F_3(0,ic)\longrightarrow y=\frac{b^2}{ic}\\ &F_4(0,-ic)\longrightarrow y=-\frac{b^2}{ic} \end{aligned} \tag{6.19}$$

也是两实两虚．所得的焦点与准线的结果与过去所熟悉的情形相同。

（3）抛物线有两条迷向切线，因此只有一个焦点，它位于主轴上，且两条迷向切线的切点就在准线上。

设抛物线方程为

$$y^2=2px \tag{1}$$

以k为斜率的切线方程（推导方法同上）为

$$y=kx+\frac{p}{2k} \tag{2}$$

因此可得两条迷向切线为

$$y=ix+\frac{p}{2i},\quad y=-ix-\frac{p}{2i} \tag{3}$$

其交点坐标是$\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，即为焦点（在主轴 $y=0$上）．而焦点的极线

$$x = -\frac{p}{2}$$

即为准线。因此，抛物线的焦点和准线为

$$F\left(\frac{p}{2},\ 0\right) \longrightarrow x = -\frac{p}{2} \tag{6.20}$$

例 1　已知抛物线

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 - 4x + 1 = 0 \tag{1}$$

求其主轴、顶点、焦点、准线。

解　将方程（1）化成齐次方程

$$2x_1{}^2 + 4x_1x_2 + 2x_2{}^2 - 4x_1x_3 + x_3{}^2 = 0 \tag{2}$$

根据公式（6.15），主轴方程为

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \frac{2}{2}(2x_1 + 2x_2) = 0$$

即　　$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

或化成非齐次方程为

$$2x + 2y - 1 = 0 \tag{3}$$

解方程组（1）、（3）得顶点坐标为$\left(\frac{3}{8},\ \frac{1}{8}\right)$.

设两条迷向切线方程为

$$y = \pm ix + b$$

代入（1）得：

$$\pm 4ix^2 + 4(b \pm bi - 1)x + 2b^2 + 1 = 0 \tag{4}$$

（4）式有重根的条件为

$$(b \pm bi - 1)^2 - [\pm i(2b^2 + 1)] = 0 \tag{5}$$

由（5）式解出 b 得：

$$b_1 = \frac{1-i}{2(1+i)},\quad b_2 = \frac{1+i}{2(1-i)}$$

于是（1）式的两条迷向切线方程为

$$y = ix + \frac{1-i}{2(1+i)},\quad y = -ix + \frac{1+i}{2(1-i)}$$

它们的交点为$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，这就是焦点的坐标。

又焦点$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$关于抛物线（1）的极线为

$$x-y=0$$

这就是准线的方程。

例2 假设二次曲线Γ的任意一条切线和其它二定切线的交点是P_1、P_2，而且有一个焦点F，那么$\angle P_1FP_2=$常数。

解 设二次曲线的定切线为t_1、t_2，再由I、J二点各引一条切线，这四条切线当作是固定切线（图6.38）。二次曲线Γ的动切线交四条定切线于四点I'、J'、P_1、P_2。所以

$$(I'J',P_1P_2)=\text{常数}$$

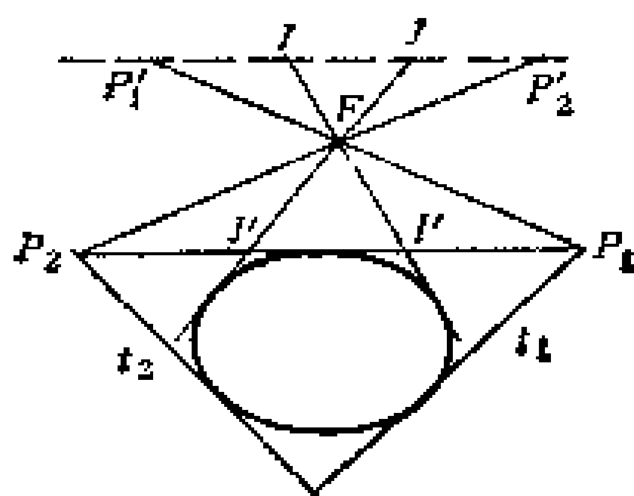


图6.38

根据直线截线束F保持截影交比不变的性质，可知

$$(I'J',P_1P_2)=(IJ,P_1'P_2')=\text{常数}$$

因此，由定理6.18和6.19得出：

$$\angle P_1FP_2=\frac{i}{2}\ln(IJ,P_1'P_2')=\text{常数}$$

§4 非欧几何的射影解释

我们在第四章中所讨论的几何学群论原则（克莱因观点）不仅适用于以上提出的四种几何，也适用于非欧几何，而且更重要的，它们也是射影变换群的子群所对应的几何学。

在第五章最后，讨论射影变换群及其子群的关系时，我们总是在射影平面上取定一个图形，然后在射影变换群里，关于这个图形的自同构变换全体（使这一固定图形变成自身的所有射影变换）所构成的变换群，就是射影变换群的子群。

在变换中保持不变的这个图形称为绝对形。

例如仿射变换群是取无穷远直线作为绝对形所构成的射影变换群的子群。又如相似变换群和正交变换群是取无穷远直线及其上的两个圆点作为绝对形所构成的射影变换群的子群。

用类似的方法，如果在射影平面上适当选取绝对形，也可以在射影平面上实现非欧几何，并且可以对欧氏、罗氏和黎氏三种几何作统一解释。

例如在射影平面上选取常态实二次曲线（长圆）

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$$

作绝对形，一切保持这个绝对形不变的射影变换的全体（极透射），构成了射影变换群的一个子群。在绝对形内部讨论这个子群所有变换下的不变性质和不变量的几何是罗巴切夫斯基平面几何。这正是我们在第三章§4中所讨论的那个卡莱——克莱因模型。这个子群称为**双曲度量群**，因此它的几何也称为**双曲度量几何**，长圆内部区域称为**双曲式平面**。

如果取虚二次曲线

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$$

作绝对形，一切保持这个绝对形不变的射影变换的全体构成了射影变换群的一个子群。在射影平面上讨论这个子群所有变换下的不变性质和不变量的几何是黎曼几何学。这个子群称为**椭圆度量群**，平面称为**椭圆式平面**，这个变换群所对应的几何也称为**椭圆度量几何**。

在这两种几何里怎样来度量两个基本量即距离和角度呢？为此需要引进射影度量。

在本节3.1所讲的拉格尔定理中已经将普通角度和交比这一射影性质联系起来，如果将与拉格尔定理有关的圆点I、J看成变态的二级曲线$u_1^2+u_2^2=0$，就可以用常态二级曲线（绝对形）代替它，作如下的推广。

在平面内取定一个常态二次曲线，从这个平面上任意二直

线a、b的交点向二次曲线作两条切线p、q，作函数

$$\omega(a,b)=k\ln(ab,pq)$$

其中k为不等于零的常数。（图6.39）这个函数有以下性质：

（1）$\omega(a,a)=0$；

（2）$\omega(b,a)=-\omega(a,b)$ $(a\neq b)$；

（3）$\omega(a,b)+\omega(b,c)=\omega(a,c)$（$a,b,c$为共点线）。

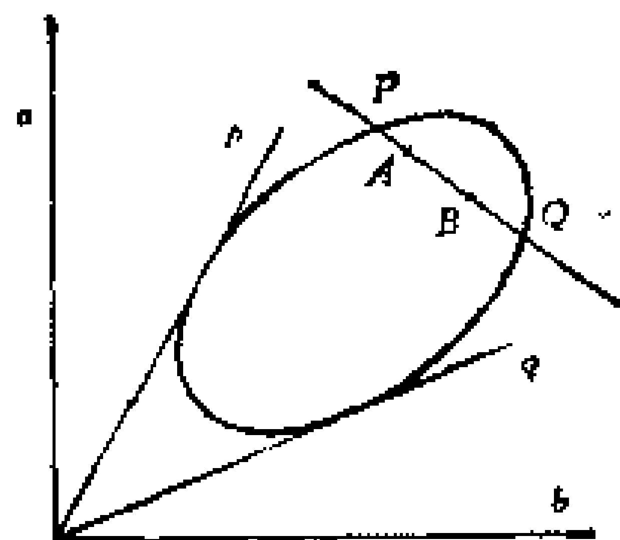


图6.39

函数ω（a,b）由二直线a、b唯一决定（不计符号），并且满足不变性和可加性，因此可定义为二直线a、b所决定的角的度量，即 a、b 交角的射影度量，因为它是射影变换下的不变量。其中常态二次曲线称为度量的绝对形，k 称为角度量系数或单位。

对偶地可以建立两点间距离的射影度量。

在平面内选定一个常态二次曲线，平面内任意两点A 、B与二次曲线交于两点 P、Q，作函数

$$d(A,B)=k'l_n(AB,PQ)$$

其中k为不等于零的常数。这个函数有以下性质：

（1）$d(A,A)=0$；

（2）$d(A,B)=-d(B,A)$ （$A\neq B$）；

（3）$d(A,B)+d(B,C)=d(A,C)$ （A,B,C为共线点）。

函数$d(A,B)$由二点A、B唯一决定（不计符号），而且满足不变性和可加性，因此可以定义为两点间距离的度量或射影度量，因为它是射影变换下的不变量。k'称为线段度量系数或单位。

根据两个射影度量的定义，容易推出：

1 如果两条直线的交点在绝对形上，则它们交角的射影度量等于零．这时可以定义这两条直线为平行线．

2 平面上任一点与绝对形上任一点的距离的射影度量为∞。因此可以将绝对形上的点规定为无穷远点，而绝对形相当于无穷远直线．

由于罗氏几何选定实常态二次曲线(长圆)作为绝对形，而黎曼几何选定虚常态二次曲线作为绝对形，因此在两种几何里其射影度量的具体表现形式是截然不同的．可以推出，在双曲式平面上，罗氏平行公理成立，三角形内角和小于π；在椭圆式平面上不存在平行线，三角形内角和大于π等等．

我们已知欧氏、罗氏、黎氏三种相互矛盾的几何都是射影变换群的子群所对应的几何学，它们的区别就在于选取的绝对形不同，因而所构成的自同构变换群不同，在克莱因观点下，它们又统一在射影变换群下。

习　　题

§ 1

1．设有一变动的三角形，其三边通过三个不共线的定点，其二顶点分别在二定直线上移动，则第三个顶点的轨迹是一条二阶曲线且通过三定点中的两个定点．

2．数值总等于α和β的两个角绕它们的顶点 A、B 旋转，这两个角的两个边 AM和BM 的交点沿直线m滑动．试确定这两个旋转角的另两个边的交点N画出什么曲线?

3．已知五个点 A、B、C、D、E 决定一个二阶曲线，用点A和B作为构成曲线线束的中心，试作通过这两个点的两条切线。

4．已知五条直线a、b、c、d、e决定一个二级曲线，用直线a和b作为构成曲线的点列的底，试作这两条直线的切点。

5．试述与 x 轴相切的二阶曲线的方程必须满足什么条件？

6．在射影平面上给了五个点，求由它们决定的二阶曲线：

（1）A $(1,-1,0)$、B $(2,0,-1)$、C $(0,2,-1)$、D $(1,4,-2)$、E $(2,3-2)$．

（2）A $(0,0,1)$、B $(1,1,0)$、C $(0,1,-1)$、D $(3,-2,0)$、E $(1,-1,2)$．

（3）A $(1,0,0)$、B $(0,1,0)$、C $(0,0,1)$、D $(1,1,1)$、$E(a_1,a_2,a_3)$．

7．求通过二直线 $(1,3)$、$(-1,-5)$ 的交点且属于二级曲线 $4U^2+V^2=2$ 的直线．

8．利用巴斯加定理与布利安桑定理来完成习题3、4的作图．

9．设共向三角形AEC与 $A'B'C'$ 是透视的，求证六直线 AB'、AC'、BC'、BA'、CA'、CB' 属于同一个二级曲线．

10．设A、B 在二阶曲线Γ上，C、D 不在 Γ上，AC、BD 分别交 Γ于P、Q，AD、BC 分别交 Γ于 M、N．求证：直线 CD、PQ、MN共点．

11．已知三个点和过其中两个点的切线决定一个二阶曲线，试作曲线的另一些点．

12．已知三个点和过其中两个点的切线决定一个二阶曲线，试作第三个已知点的切线．

13．已知二阶曲线的四条切线与其中一条上的切点，试作这个曲线的另一些新切线．

14．求点关于二阶曲线的极线：

（1）点 $(1,-1,0)$

二阶曲线：$3x_1^2+5x_2^2+x_3^2+7x_1x_2+4x_1x_3+5x_2x_3=0$

（2）点 $(5,1,7)$

二阶曲线：$2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3=0$

（3）点 (1,1,1)

二阶曲线：$x_1^2+3x_2^2-4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3=0$

15．求直线对于二阶曲线的极点：

（1）直线：$3x_1-x_2+6x_3=0$

二阶曲线：$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3=0$

（2）直线：$x_2=0$

二阶曲线：$15x_1^2+4x_3^2-10x_1x_2-6x_1x_3+2x_2x_3=0$

（3）直线：$x_1-x_2+3x_3=0$

二阶曲线：$2x_1^2-3x_2^2-5x_3^2+5x_1x_2+3x_1x_3+16x_2x_3=0$

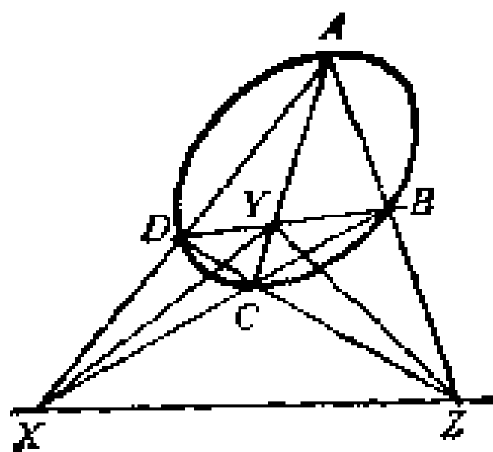
16．已知由点 P 引出的两条直线与二阶曲线 Γ 的四个交点，二阶曲线其余的点是未知的，试作点 P 的极线。

17．在仿射平面上，已知二阶曲线内部的一个点 P，试作被点 P 所平分的弦。

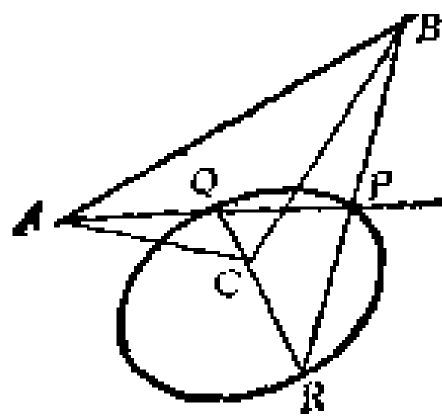
18．已知从点 P 和 Q 到二阶曲线 Γ 的两对切线，曲线 Γ 未画出，试作直线 PQ 的极点。

19．利用配极对应的理论根据巴斯加定理证明布利安桑定理。

20．二阶曲线上任意四点所成的完全四点形其对边三点形是自极三点形。



(21题)



(22题)

21．如图，$ABCD$ 是二阶曲线的内接四点形，XYZ 是对边

三点形．求证：B、C处的切线交在YZ上，A、D处的切线也交在 YZ 上．

22．如图，ABC是自极三点形，弦RP通过 B，RC 与曲线的另一个交点为Q．求证：PQ 通过点 A．

23．化下列二阶曲线方程为标准方程：

（1）$4x_1^2+15x_2^2-5x_3^2+16x_1x_2-22x_2x_3-8x_1x_3=0$

（2）$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$

24．试证：两个不同常态二次曲线至多有四个交点．

25．设A（a_1,a_2,a_3）是二次曲线Γ的一个奇异点，B（b_1，b_2,b_3）是 Γ 上的任意一点，那么A与B的连线完全在曲线 Γ 上．

§ 2

26．试求二次曲线 $x^2+3xy-4y^2+2x-10y=0$ 的中心与渐近线．

27．求证：二次曲线以P_1为中点的弦HK平行于P_1的极线．

28．求证：从双曲线上任何一点引两条直线各平行于渐近线，则这二直线和渐近线所成平行四边形的面积一定．

29．证明双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的两条以$\lambda$、$\lambda'$为斜率的直径成为共轭的条件是 $\lambda\lambda'=\frac{b^2}{a^2}$．

30．双曲线的任意一条切线交两条渐近线于两点，则这两点所成的线段以切点为中心．

31．试证：有心二阶曲线直径端点的切线互相平行．

32．如果有心二次曲线的一条直径通过一个定点P，则这直径的共轭直径平行于P的极线．

33．若无穷远直线的极点落在常态二阶曲线上，则这个二阶曲线属何种类型？

34．试证：有心二次曲线任一弦的两个端点的切线相交于

过此弦中点的一条直径上。

35. 设PP'是二阶曲线的直径，曲线上任意一点Q的切线与P点的切线交于R，$P'Q$交PR于X，求证R为线段PX的中点。

36. 求仿射坐标变换，化下列诸方程为标准形式：

（1）$2x^2-2xy-y^2+2x+5y-8=0$

（2）$x^2-2xy+2y^2-4y+3=0$

§ 3

37. 试证：若两条有穷直线的交角是不定的，则其中至少有一条是迷向直线。

38. 求证：直线 $a_1x+a_2y+a_3=0$ 是迷向直线的充要条件是$a_1^2+a_2^2=0$。

39. 虚直线是迷向直线的充要条件是它上面任意两个不同的非无穷远点的距离是零。

40. 求二次曲线 $7x^2+6xy-y^2-16=0$的主轴、顶点、焦点、准线。

41. 试证：外切于一抛物线的三角形，它的顶点所在的圆通过抛物线的焦点。

第二部分　高等几何学习指导

第一章　几何学的公理方法概述学习指导

一　重点和要求

本章简要地介绍了几何公理法发展历史以及公理法的构造和原理，目的是使读者对几何学的公理方法的发生和形成，意义和原理，有个概括的认识。读这一章的时候，要抓住两个重点：

1．几何学公理法是怎样产生和形成的？它的作用和意义是什么？

2．几何公理法的构造和原理是什么？

本章是全编的导引．在§1里向读者提出了几何学中非常重要的公理方法，指出它产生的必然性和重要性，引导你进一步探索它．在§2里，概括地提出几何公理法的构造和原理，这是公理法的核心所在，它为第三章用公理法具体地建立欧几里得几何学和罗巴切夫斯基几何学提出了所应遵循的纲要．

第一，要求读者了解几何学公理方法是几何学发展的必然产物，通过它把零散的几何知识整理成为逻辑严密的演绎体系，因而成为数学的重要方法之一。它的形成经历了漫长的历史时期，可以分成欧几里得以前的工作、欧几里得本人的工作和欧几里得以后的工作三个阶段来了解．欧几里得《几何原

本》的产生是一个重要标志，但它所采用的公理法是古典的公理法，是有缺欠的，希尔伯特《几何基础》一书中所用的公理法才是现代的公理法。

第二，要了解公理法构造的四个组成部分及其意义。这部分内容读起来可能会感到抽象，但如果能联系中学所学的几何知识，这部分内容也不是很难懂的，实际上不少知识都已经学过。这里给出公理法的轮廓，然后带着它到第三章里去运用，从中得到具体地认识，最后再回过头来重新学习和认识这一部分内容，就可以较好地掌握这些原理。

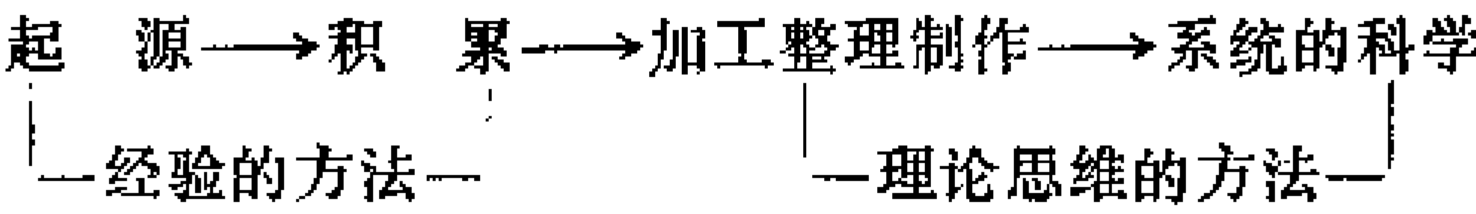
学习这一章时，可以参考钱端壮编《几何基础》(高等教育出版社出版)的开头部分；M. 克莱因著《古今数学思想》（上海科学技术出版社出版）中的第一章之6，第二章之3，第三章和第四章的有关部分。

二 内容分析

1 几何公理法的产生和形成

几何公理法是随着几何学的发展而产生和形成的。

初等几何学成为系统的科学体系，大体上是经历了如下的过程：



恩格斯对这一过程曾作过精辟地概括：“经验自然科学积累了如此庞大数量的实证的知识材料，以致在每一个研究领域中有系统地和依据材料的内在联系把这些材料加以整理的必要，就简直成为无可避免的。建立各个知识领域互相间的正确联系，也同样成为无可避免的。因此，自然科学便走进了理论的领域，而在这里经验的方法就不中用了，在这里只有理论的

思维才能有所帮助。"他说出了科学发展的过程，从庞大的零散知识材料发展成为系统的科学体系的必要性和必然性；以及应采用的方法。几何学的公理方法就是在理论思维过程中逐步形成的有效的方法之一。因此，公理法的产生是历史的必然结果。

本书所讲的历史过程，完全是依据上述的脉络，抓住了历史中几个重大事件展开的，这样就在纷乱的历史材料中理出一条线索。

欧几里得前期的工作为欧几里得的《几何原本》作了大量的准备工作，在内容、理论和方法上提供了素材，这一阶段虽然经历了较长的时期，但集中体现在希腊人的工作上。欧几里得本人的工作是在前人工作的基础上写出了《几何原本》一书，它集前人工作的大成，为几何学公理法奠定了初步的基础。欧几里得以后的工作可以分成两条主线，它们主要是围绕着欧几里得《几何原本》进行的，直到希尔伯特所著的《几何基础》的出现为止。

第一条主线主要是通过第五公设的试证，找出了许多与第五公设等价的命题，明确了第五公设的重要地位，丰富和严格了几何的论证方法等。特别重要的是导致非欧几何学的出现，从而证明了第五公设的独立性，进一步显示了公理方法的作用和意义。这些都毫无疑问地对公理法的形成起了深化、补充和推动的作用。至于第二条主线则直接导致近代公理法的最后形成。

在公理法的发展中，希腊的学者起了奠基的作用，特别是欧几里得。欧几里得是古希腊时代伟大的数学家之一。关于他的历史资料保存下来的已经不多，他的确切生平年代已无从查考。他的生活年代属于希腊历史上第二个大分期，即亚历山大时期，是公元前三百年左右的人。据说他曾在柏拉图的学院学习过，大约在公元前三百年左右，曾在亚历山大城教授和研究

过数学，是亚历山大学派的创始人。

欧几里得本人写的《几何原本》手稿已经遗失，所以他的著作只能参考希腊文的抄本或其他学者的修订本、译注本等。欧几里得写《几何原本》的目的，有人说是写给数学家看的学术论著，有人说是写给学生上课用的课本，从历史上看，这两个目的都达到了。这本在世界上享有盛誉的经典著作，从1482年以来，曾以各种语言出了五百版以上，我国最早的译本是明朝万历丁未年（1607年）由大学士徐光启与意大利人利玛窦（Matteo Ricci）合译的前六卷。“几何”二字的使用，可能是在徐光启翻译几何原本时，由“Geometry”中的“Geo”音译而来。

希尔伯特是十九世纪末德国数学家。1899年出版了他的名著《几何基础》一书，为此在1903年获得国际奖金。为什么说，希尔伯特的《几何基础》一书的出版使现代公理法最后形成？原因有二：

（1）希尔伯特在这一著作的第一章里，给欧几里得几何学确立了一套完整的公理系统，并按其作用自然地划分成五组，同时示范性地用这套公理系统演绎出欧氏几何学的基本内容，使欧氏几何学的逻辑结构严密而且清楚。

（2）提出选择公理系统时应考虑的三个基本问题，即公理系统的无矛盾性、各公理的独立性、以及公理系统的完备性，并给出证明无矛盾性和独立性的一些方法等。

希尔伯特的工作，完善了欧几里得采用的古典公理法，使它形成为近代公理法。

2　非欧几何的产生

数学的产生总是离不开那个时代的历史条件，特别是生产力发展水平的限制。例如在古代尽管有个别数学家有非常天才的见解，在计算曲线所围成的面积时有了类似现在的积分思想，但微积分不能诞生在古代，而是诞生在生产力有较高发展

的十七世纪。社会生产的需要和科学文化知识的积累，是科学产生的必然条件，但归根到底，生产实践是科学发展的根本动力。十九世纪初，俄国数学家罗巴切夫斯基，匈牙利数学家鲍耶，德国数学家高斯，几乎同时提出了非欧几何的新思想新体系，也足以说明了上述的事实，这一点本书已作了一定的说明。我们说数学发展依赖于生产实践，是从总的方面讲的，并不是说数学发展的每一步，每一个结论，甚至于每个命题都要来源于生产中的课题。数学理论的发展，有的是由生产直接推动的；有的则是生产通过其他自然科学的发展间接推动的。此外还有一个重要事实是，在建立数学理论的过程中，会不断地产生数学自身的矛盾，解决这些矛盾的过程引起了数学本身在某一些理论方面相对独立的发展，建立某些新理论。"虚数"和"虚几何"（罗氏几何学）的产生和发展就是如此，所以当时称为"虚"的数、"虚"的几何，长期不被人们所承认。非欧几何产生的直接原因是试证第五公设，而试证第五公设的研究纯粹是由于几何学体系中的内部矛盾引起的，为了解决矛盾，最终导致非欧几何新的理论的建立。数学对于生产实践的相对独立性，一般只在某些理论发展到一定阶段上才表现出来，这些理论的产生可以走在生产实践和其他自然科学的前面，但它们是生产实践间接推动的结果，而最终又必须在生产实践中得到验证。

3　关于公理法的构造和原理

这是§2所讲的中心内容。为什么开始就讲这个抽象的原理，前面已经说明了。

读者不妨回忆一下在中学时学过的初等几何，其内容无非是概念（定义）、公理和定理的排列，此外就是定理的证明等等。当时也许我们并不知道为什么要那样作，用的是什么方法，或许感到很烦琐。现在我们把它归纳成四个方面，说明为什么要这样作，遵循的是什么原理，把这种方法上升到原理来

认识，并称之为几何学的公理方法。

学习这节内容时．先要认真地读一遍，然后再把四部分的要点记一下，为以后的学习作好准备。也许有些地方还不甚清楚，那就留在学习二、三章时来逐步解决。

公理法的四个组成部分是有机结合在一起的，缺一不可，其中公理的列举是核心。公理是建立一种几何体系的少数规定，它规定了最基本几何元素间一些基本性质，成为证明其他几何性质（定理）的根据。公理不是凭空制造出来的，是有客观基础的，公理来源于实践，又在实践中验证和不断丰富起来。

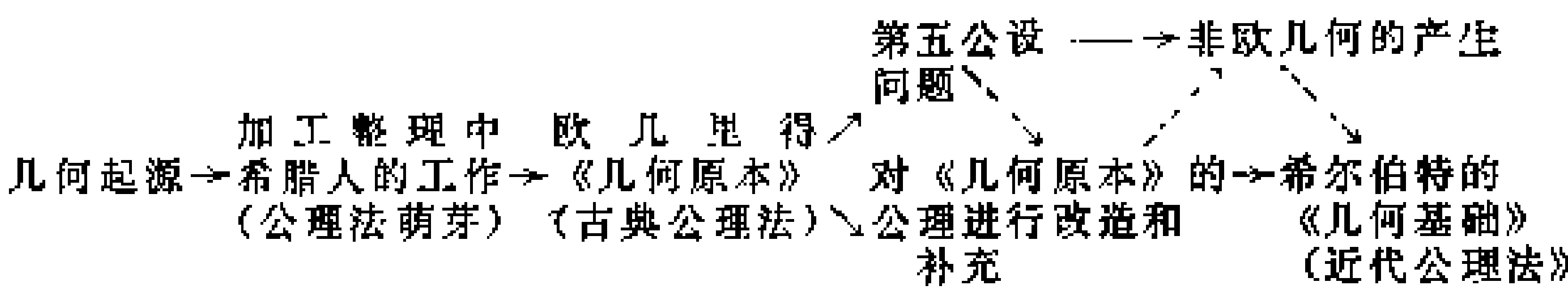
要区分古典公理法和现代公理法。欧几里得在《几何原本》中所采用古典公理法只不过是现代公理法的雏型，他的公理系统不完全，而希尔伯特在《几何基础》中所采用的是现代公理法，它是在古典公理法的基础上发展而成的。希尔伯特的公理系统是完备的，在演绎过程中没有漏洞。欧几里得试图给公理中所讨论的基本对象和关系以描述性的定义，而希尔伯特则抛弃这种想法，使原始概念不加定义，只是通过公理来规定他们的属性。欧几里得相信公理是显然的，他所考虑的是现实的物理空间，因而把基本元素“点”、“直线”、“平面”认为是人们在日常生活中所理解的点、直线、平面．因而它们的一些属性可以靠直观来承认．例如”运动”、“在内”、“在外”、“直线点的顺序”等概念就是这样，这样的几何学还摆脱不了直观性质的限制。但现代公理法对公理的显然性，甚至公理是否真实都无所谓，它们无非是一些少数的思想规定，是一些假设；它们只不过是进行逻辑推理的基础而已。这样的几何系统中，它的基本对象不为直观所限制，允许对公理系统和对象有不同的解释，就是说它的基本对象和关系可以是满足公理系统所规定的关系的一切“物”.这样的几何体系不过是从少数公理出发，一切按纯粹的逻辑规律和步骤推演出来的逻辑结构，

它具有高度的抽象性和应用的广泛性，这是现代数学的一个标志。

三 本章小结

从少数公理出发，遵循严格的逻辑原则建立几何学科学体系的方法，称为几何公理法或演绎法。

几何公理法是随着几何学的发展而产生的，它形成为一个完整的科学方法，经历了两千多年的时间。本书通过历史中几个重大事件，扼要地叙述了这一发展过程，说明了公理法产生的必然性和重要性。这一过程大体上可表示为：



公元前三世纪，欧几里得《几何原本》的出现，标志着古典公理法的形成，但这种公理法存在着许多缺欠。以后，针对《几何原本》中公理等等问题，经过多少人的研究工作，终于在十九世纪末，希尔伯特的名著《几何基础》一书问世，标志着近代公理法的形成。公理法很快成为研究数学以及其他一些自然科学的重要方法之一。

公理法的结构可分四个部分：

1. 原始概念的列举；
2. 定义的叙述；
3. 公理的叙述；
4. 定理的叙述和证明。

其中公理的叙述是基础，公理是作为几何论证基础而不加证明的命题，是几何学作为出发点的少数思想规定，作为几何学基础的全部公理称为该几何学的公理系统，它决定了几何学的性质，

用不同的公理系统可以建立不同的几何学。希尔伯特提出了研究公理系统的三个基本问题，即公理系统的无矛盾性、独立性和完备性，而任何公理系统都必须满足无矛盾性。

用公理法建立的几何空间是抽象空间，它的对象是满足公理规定的任何“物”，这一点与欧几里得《几何原本》中所描述的直观形象“点”、“直线”、“平面”有所不同。

公理法所遵循的逻辑关系，我们将在第二章中讨论，并且在第三章中将研究如何具体地运用公理法建立几何学，这样会使我们进一步认识公理法和掌握它。

第二章 几何学中的逻辑原则和方法学习指导

一 重点和要求

本章介绍了形式逻辑在几何学中的运用，主要是讲了思维形式的概念、判断、推理、证明等逻辑原则在几何学中的运用；以及综合几何中最常用的逻辑证明方法（推证通法）．学习本章的目的是为第三章用公理法建立几何学作理论和方法上的准备，主要的还是学习数学中带有普遍意义的逻辑原理和方法．

读这一章的时候，要抓住三个重点：

1．几何学的概念和定义；

2．几何学的判断和命题；

3．推理与证明的原则和方法．

数学和其他学科一样是离不开逻辑学的，特别相对其他学科而言，具有逻辑严谨性的特点，在长期的实践中形成一些带有数学特点的逻辑方法，对于几何学来说更是如此。用公理法建立的几何学体系本身就是一个逻辑结构，很难设想，不懂几何学中的逻辑原则和方法，就能很好地处理几何学的逻辑关系．因此，要想掌握公理法，必须掌握本章所介绍的最起码的知识．

几何学的逻辑结构是由概念、命题以及推理证明组成的，它们所涉及的逻辑知识，就是学习本章时所要抓住的三个重

点。

第一，要求读者掌握概念的意义，内涵与外延，种和属，以及几何学中最常用的定义方法。

第二，要求读者掌握命题的组成；命题的四种变化及等价关系；作为定理条件的两种特征四种情形。判断的分类和逆定理的制造可作一般的了解。

第三，要求对推理和证明这样的思维形式作一般的了解，其中演绎推理的三段论要重点掌握，它的用处较多。推理与证明的关系和区别也要了解。对于证明方法的分类要搞清分类的依据（出发点）和彼此之间的关系，主要还是要掌握各种证法的原理，这要通过分析例子和作题来掌握。其中分析证法习惯上不常用，不必在证法上下功夫，但要把分析的方法作为探索解题路子的重要步骤，熟练地掌握它。

要想深入地理解和掌握本章的内容，最好也分三步走：第一步，通读全章、重点掌握，要联系过去所学过的初等几何教材，如中学几何等，这样可使抽象理论具体化，使过去所学的一些问题理论化，提高我们的认识。第二步，要选择一部分练习来作，通过作题的过程再重点复习有关内容，巩固和运用所学的知识。作习题时一定要认真、仔细地书写证明的全过程，不可草率。如果时间充足，可对一些典型练习找出一题的多种解法，活用所学的知识，比较各种作法的优劣，训练解题的技能与技巧。第三步，要带着这一章的理论和方法到第三章里去具体运用，重点分析该章的某些定义、定理及其证明方法，巩固和加深本章已学过的知识。

二 内容分析

1 关于逻辑学

逻辑学是研究思维形式及其规律的一门科学。逻辑学有形

式逻辑与辩证逻辑之分。

形式逻辑是从暂时稳定的、相对静止的、孤立的各方面来研究客观事物的一种思维形式和规律，在思维中暂时抛开了事物总的联系和总的运动与变化，是客观世界的各个对象间彼此区别和相对稳定性在人们头脑中的反映，它要求人们在思维过程中保持确定性、不矛盾性和前后一贯性。形式逻辑不能反映客观事物的内在矛盾的运动规律，它所研究的是思维反映现实时应具有的正确的形式结构，这些思维形式包括概念、判断、推理、论证等，以及它们彼此之间的联系，而这些结构、联系又都是遵循一定的规则和规律的，其中基本的规律是同一律、矛盾律、排中律、充足理由律。这些规律的意义是保证思维结构的正确，使思想清楚、明确、前后不矛盾，是思维正确反映客观世界的必要条件。辩证逻辑是从事物相互联系、相互转化的运动和发展的方向来研究客观事物的一种思维形式和规律，是客观世界各个事物彼此联系、变化发展的辩证规律在人们头脑中的反映，要求人们在思维过程中遵循矛盾对立统一法则等，它反映的是客观事物的内在矛盾，从总的联系中和总的运动中把握客观事物的发展规律。形式逻辑所体现的思维规律是以“非此即彼”为原则的。在相对静止的条件下，A就是A，A不能是非A，即不能是“亦此亦彼”。辩证逻辑承认“非此即彼”，又在适当的地方承认“亦此亦彼”，是“一分为二”的两点论的逻辑。因此，辩证逻辑并不废除形式逻辑原则，而是在更高的基础上包含着形式逻辑，把它作为自已的一个因素，溶化于自身之中。形式逻辑与辩证逻辑是从不同的方面，不同的深度反映客观世界的各种关系，前者是低级思维规律，后者是高级的思维规律。

2　关于概念

概念是反映某种事物及其本质属性的思维形式。概念是思维的细胞。

（1）概念的客观性

在实践活动中，周围许许多多事物经常引起我们感觉和印象，经过反复接触、反复分析，逐渐地深入下去，找出它的一般性质，然后把它和其他事物进行比较，去粗取精、去伪存真，逐步抛弃那些非本质的东西，捉住本质的东西，即表现事物本质的属性，这样就形成了概念。因此说，概念是人脑，（物质的）的最高产物，它来源于客观世界。

（2）概念的抽象性

概念是抽象的。例如我们学过的初等几何学主要是研究几何图形的形状、大小和相互位置关系的。其中有的概念是反映几何学所研究的对象，如点、直线、平面、三角形、相似形、圆、弦等等；还有一些概念是反映图形间的某些关系，如相交、平行、垂直、相切、对称、变换、运动等等；还有的概念是反映图形大小的量，如长度、角度、面积、体积等等。我们周围的事物多的数不胜数，这些物体有形状、大小、位置等物理性质；还有成分等化学性质；此外还有用途和产地等等其他属性。而几何概念只考虑这些物体的形状（大小），即物体占有的空间形式，舍去了其他属性。例如“平面”是从桌子面、镜子面、水平面、…等等一切具有光滑平整的表面的物体中抽象出来的，已不是某一个具体物的表面，更没有什么物理性质和化学性质，而是从个别、特殊上升到一般，抓住了“面”的本质属性。一般抽象的“形”在客观世界中并不存在，因为任何“一般”都只能通过“个别”而存在，而不能离开个别孤立地存在，例如客观世界只有个别的“方”，即方桌、方巾等等，一般的“方”就存在于这些个别的“方”中。离开个别的“方”也就没有抽象的“方”了。几何学的所有概念就是这样从客观抽象出来的。

（3）概念反映事物的本质

在概念形成的同时，人们就已经透过现象抓住了事物的本质，由感性认识上升到理性认识。例如“平面”的本质属性，

通俗的说就是光滑平整、没有厚度，可以无限地延展的面．用几何公理来描述时，欧氏平面是满足欧几里得平面几何公理系统的几何空间（二维空间），罗氏平面是满足罗巴切夫斯基平面几何的公理系统的几何空间，这两种平面是不同的．空间几何中的平面，除了满足平面几何的公理系统外还要满足描述平面特点的其他公理．如“一直线有两点在平面上，则整个直线在平面上”、“三个不共线的点决定唯一平面”、“两个平面有一个公共点就有一条公共直线”．这些属性使平面与其他曲面（球、抛物面等）区分开来．

反映同一对象的概念在同一时间内和同一条件下必须是明确的暂时不变的，即概念具有同一性．概念也不是永远僵死不变的，它随着人们对事物认识的发展和不断深化，其内涵和外延都可能有所改变．如“物质”、“宇宙”、“几何学”等概念就是这样．

3　关于定义

给概念下定义是数学里明确研究对象和某些关系的重要逻辑方法．在数学中常采用“最邻近的种”加“属差”的定义方法，以及采用“发生定义”的方法．特别在几何学里主要是采用这两种方法．不是每个概念都可以确切的给出定义，如“人”、“几何学”等许许多多的概念都是这样．几何的概念除了原始概念外都要有定义，而且这些定义总是要根据已知的概念来定义．原始概念虽没有定义，但它们的基本属性由公理来规定，可以说是由公理间接来定义的．原始概念在一些书里也叫做基本概念．

4　关于判断

判断是对于思维对象有所肯定或否定的思维形式．

判断是在概念的基础上，通过观察、实验或者推理来肯定或否定某对象与其他对象、或与某种特点、某种属性等等之间的关系，以便进一步认识客观事物．不肯定什么，不否定什么

就不是判断。

概念一般是借助于词来表达，而判断一般是借助句子来表达的，判断是思维的内容，句子是判断的表示形式。句子一般有主语、谓语和宾语。但判断本身又有其自身的结构，即由主词、宾词和系词组成的。判断的主词一定是判断句子的主语、系词和宾词常常合起来作判断句子的合成谓语，有时判断的宾词也就是判断句子的宾语。例如“四边形 $ABCD$ 是平行四边形。”其中“四边形$ABCD$ 是主词又是句子的主语，“是”是系词，“平行四边形”是宾语，它们合起来“是平行四边形”则是这个判断句子的合成谓语。

5　关于数学命题

数学中的判断就是数学命题，如定义、公理、定理等都是。

（1）命题的组成和变化

数学命题一般是假言判断，多数是复合命题，因为数学命题一般都是反映因果关系或者条件关系的。假言判断的公式是“若 S 是 P，则 R 是 Q”，其中“若 S 是 P”是题设或条件，“则 R 是 Q”是题断或结论。比较复杂的命题其题设和题断，都可能由几个单一判断组成的，如：

$$\left.\begin{array}{l} S_1\text{是 } P_1, \\ S_2\text{是 } P_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ S_n\text{是 } P_n, \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} R_1 \text{ 是 } Q_1, \\ R_2 \text{ 是 } Q_2, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ R_m \text{ 是 } Q_m. \end{array}\right.$$

将命题的题设和题断互换或加以否定，可以得出命题的四种形式，即原命题、逆命题、否命题、逆否命题，而且逆、否和逆否命题可能有多个。这四种形式是相对而言，因为四种形式中，哪一个都可以取为原命题。

（2）“定义”的命题

定义也是判断，因此也是一种命题。例如：“两组对边分

别平行的四边形叫做（是）平行四边形”．这个定义中“两组对边分别平行的四边形”是一类四边形，它们具有“两组对边分别平行”这一本质属性，把它命名为“平行四边形”，即肯定“两组对边分别平行的四边形”与“平行四边形”是同一个东西，前者是条件后者是结论．因为“定义”命题的条件和结论所指的是同一个对象或关系，因此逆命题也一定成立，即“平行四边形是两组对边分别平行的四边形”或“平行四边形两组对边分别平行”一定成立．“定义”命题与它的逆命题的等价性是“定义”命题的特点．

（3）“定理”的命题

命题有四种形式，因此定理也有四种形式，即正（原）定理、逆定理、否定理和逆否定理，不过后两种形式不常用．一个定理的逆定理不一定存在．如果正定理表达了某个几何图形的性质，这样的定理叫做“性质定理”．性质定理的逆定理常常是“判定定理”，即根据某些性质判定是什么图形．例如性质定理：

定理　如果四边形是平行四边形，则

（i）一组对边平行且相等；

（ii）两组对边分别相等；

（iii）两组对角分别相等；

（iV）对角线互相平分．

这一性质定理的判定定理是：

定理　如果四边形具有下列条件之一：

（i）一组对边平行且相等；

（ii）两组对边分别相等；

（iii）两组对角分别相等；

（iV）对角线互相平分；

则这个四边形是平行四边形．

关于逆命题的构成问题，不是说每条定理都要考虑其逆定

理（否定理）是否存在，这要根据实际需要来决定。本书在讲到寻求逆定理的作法时，曾提出题设中的条款和题断中的条款作等量交换的方法，这是一种经验的方法，这样得到的逆命题成为逆定理的希望最大。

（4）命题的等价性

这里提出的命题的等价性，仅仅是命题在四种变化后所得出的四种形式中的等价关系，是狭义的等价性，更一般的命题等价关系将在本书第三章§2中来讲，那是相对于某公理系统下的等价。例如“三角形内角和等于180°”与欧氏平行公理等价，但两个命题从形式上看并没有什么必然的联系。本章所讲的等价性，是由命题本身的“题设”和“题断”的关系决定的，是仅指四种命题形式之间的等价关系。这种等价关系使两个命题真则同真，假则同假，因此是间接证法的依据。

（5）命题的充分、必要条件的转换

定理的条件有两种特征四种情形，书里已讲的很清楚。这里再强调一下条件的转换关系。因为命题有四种变化，因此作为命题的条件和结论也要随之变化。对于命题

$$A\Rightarrow B$$

来说，A是条件，B是结论，而对于命题

$$B\Rightarrow A$$

来说，B是条件，A是结论。

条件转换的关系有下面的两个规律：

1）若A是B的充分条件，则B是A的必要条件。

2）若A是B的必要条件，则B是A的充分条件。

实际上，若

$$A\Rightarrow B$$

成立，则其逆否命题

$$\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$$

成立。前者说明“有A就有B”，A是B的充分条件；后者说

明"没有B就没有A"，B是A的必要条件．例如命题：

若两角是对顶角，则两角相等．

"对顶角"是"两角相等"的充分但不必要的条件．而命题：

若两角相等，则两角是对顶角．（假）

若两角不等，则两角不是对顶角（真）

这正好说明"两角相等"是"对顶角"的必要但不充分的条件．

显然如果A是B的充要条件，则B也是A的充要条件．

6 关于推理和证明

（1）推理

推理是由一个或数个已知判断推出新判断的思维形式．

推理是客观事物的某种必然联系，是在人们实践中被认识了的思维过程的反映．例如从几个已知定理得出一个新的定理，是人们认识了它们之间的某些必然联系的思维过程．

推理是由判断组成的，因此，判断是推理的直接组成部分；而判断又是由概念组成的，因此，概念是推理的间接组成部分．

在一个推理过程中，用来推出新的判断的那些已知判断叫做前提，由前提推出的新判断叫做结论．

在客观世界中，一切事物都是一般和特殊的有机统一．一般必体现于特殊之中，而特殊之中也必存在着一般．推理便是反映事物这种由一般到特殊（演绎推理），或由特殊到一般（归纳推理）的特性的．

三段论是演绎推理的常用形式．它由两个直言判断和一个作为结论的判断组成的．第一个直言判断叫大前提，由它提出一般性的规律和原理；第二个直言判断叫小前提，由它指出个别的现象；第三个是由一般的规律推出来的个别现象的结论．值得注意的是运用三段论进行推理时，常常只使用两段，省略了两个前提中的一个，文字即简洁，又达到推理的目的，这在

逻辑上叫做推理的简略形式。数学中的推理很多是采用简略形式的，例如：

ABCD 是菱形，所以对角线垂直。

一切菱形对角线垂直，所以 ABCD 的对角线垂直。

这两个推理前者省略了大前提“一切菱形的对角线垂直”，而后者省略了小前提“ABCD 是菱形”

三段论推理的特点是如果前提真实、推理形式正确，那末结论一定是真实的。所谓推理形式正确，指的是要遵守五条基本规则，限于篇幅本书没有讲。

用公理法建立的几何学体系，就是一种推理的科学体系。

（2）证明

证明是通过一个或一连串推理来阐明某个判断的真实性的思维形式。

证明以真实的判断为依据（论据），以正确的推理（证明过程）为手段，来阐明某个判断（论题）成立的充足理由。因此，一般说来它由论题、论据和论证三部分组成。几何中的证明，论题就是待证的定理；论据是已知的定义、公理、定理、以及待证定理的题设；而论证是找出待证命题中的题设和题断间的联系，指出怎样才能由题设推出题断的根据。用图来表示就是：

论题：$A\Rightarrow B$

$$A+\text{论据}\begin{cases}\text{前此定义}\\\text{前此公理}\\\text{前此定理}\end{cases}\overset{\text{（论证）}}{\Longrightarrow}B$$

证明与推理的区别在于思维程序相反。推理是由已知前提（若干已知判断）推出结论（新的判断），前提是理由，结论是推断，先有理由后有推断。证明是为已知推断（待证判断）找它成立的理由（已知判断），即为某一推断找理由，是先有推断后有理由。证明是通过推理来实现的，这些推理之间有严

密的逻辑连贯性，一般说来，前一个推理的结论是后一推理的前提，直到推出待证命题的真实性为止，这样就为推断找出了充足的理由。

（3）论据与几何系统的关系

根据证明的要求，作为证明中的论据一定是待证命题的题设以及已有的定义、公理、定理或已知练习等。因此，论据与定义、公理、定理提出的先后顺序有直接的关系，也就是说与几何学的系统有直接的关系。同一个初等几何定理在不同的初等几何体系中，所允许使用的论据可能有很大的不同，其证法也就要随之有所不同。我们以外角定理为例：

外角定理 三角形的外角大于不相邻的内角。

按本书第三章的系统，外角定理排列为定理1.27，它的前面只有结合公理、顺序公理、运动公理和26个定理。从定理的证明中看出，它是根据中点、三角形全等定理而得证的。它是一个绝对几何命题。

如果平行公理在这个定理之前提出，这个定理可以采用下面的证法，比较简单。

如图 7.1，过 B 引直线 $BD /\!/ AC$，则 $\angle C = \angle CBD$（两直线平行则内错角相等），$\angle A = \angle DBE$（两直线平行则同位角相等）又射线 BD 落在 $\angle CBE$ 内，所以 $\angle CBE$ 大于 $\angle C$ 或 $\angle A$。

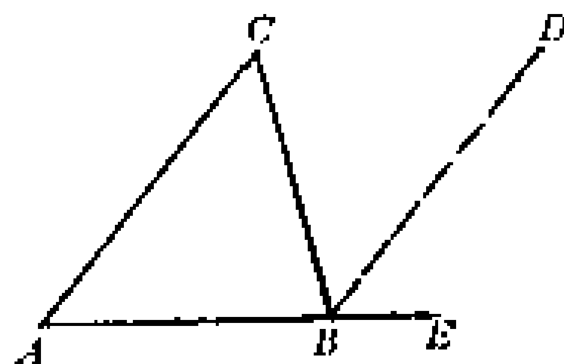


图 7.1

有的初等几何教材，把这条定理作为三角形内角和定理的一个推论，实际上，证法与上证法相同，是利用了平行公理的一个推论。

如果把这种教材中关于外角定理的证明原封不动的拿到本书，那是不行的，因为本书在定理1.27之前还没有提出平行公理，当然也就不可能推出三角形内角和定理，因此这个证明在本书里是违反证明的规则 2 的。同样，如果把本书定理1.27的证法

原封不动地拿到这种教材里作为外角定理的证明也是不行的，因为中学教材的三角形全等的定理是在外角定理的后面提出的。

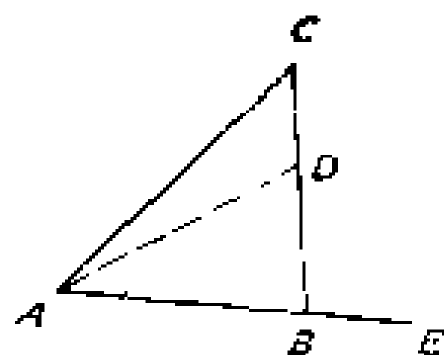


图 7.2

我们还可以用第三种证法，即反证法来证明.

如图7.2，假设∠CBE 不大于∠A。

若 ∠CBE = ∠A，则直线 AC ∥ BC（两直线被第三直线所截，如果同位角相等，则两直线平行），这与已知AC与BC相交矛盾。

若∠CBE<∠A，则存在AD落在∠A的内部，且∠DAB = ∠CBE，这时AD ∥ BC。但AD在∠A内部，AD必与BC相交，这就出现了矛盾。

综上所证，∠CBE>∠A。同理可证，∠ABE>∠C。

这个证法的论据利用了平行线判定定理等，不需要平行公理。这个证法拿到中学教材里作为外角定理的证明是可以的，因为平行线判定定理在外角定理之前就已提出。这个证法如果拿到本书作为定理1.27的证明，同样也是不行的，因为平行线判定定理在本书是定理1.32，它在外角定理之后。这个例子说明，对同一个定理的证明，由于几何系统的不同，定义、公理、定理提出的先后顺序不同，证明该定理所允许使用的论据就不同，证明方法也随着有所改变，总是受几何系统的制约。

（4）证明方法

演绎证法与归纳证法、分析证法与综合证法、直接证法与间接证法是从不同的角度对证明方法所作的分类。一个定理的证明总是这些证法中某些证法的联合运用。实际上，一个定理的证明不是采用直接证法就是采用间接证法；但它们又必须通过某些推理来实现，因此还要使用演绎证法或归纳证法，或同时使用两种证法；在证明过程中又离不开分析或综合的思考，因此离不开分析或综合证法。这些关系本书已经讲的很清楚

了，剩下的是怎样来运用这些证法。

证明可按其自然过程分成三个步骤：

（i） 证前准备。首先仔细审题，领会题意和要求，分出题设和题断；其次根据题意画出直观图，图中的图形用相应的字母标明；最后依照题意和图形标明的字母，写出“已知”和“求证”（也可不写）。

（ii） 探索证法。作好证题前的准备工作以后，就可以开始探索证明方法。一般证题多采用直接证法，但证明某定理的逆命题及其他一些命题有时用反证法更简单，证明唯一性一般用反证法，满足同一法则时也可用同一法等等。关键问题是找出解题的路子，比较有效的方法是采用分析的方法，这在本书正文§5里讲过，可以先画出满足题意的草图，在草图上进行。

（iii） 完成证明。通过探索在草纸上得出证法以后，再经过加工整理，工整地写出证明过程。要复查一通。

为了不断提高证明的技能与技巧，还可选出少量的典型问题，研究一个问题的多种证法，活用所学的知识，比较各种证法的优劣，不断总结经验。

下面举两个一题多解的例子，供参考。

例1 正三角形外接圆上的任一点与三个顶点连结的线段中，较大的线段等于其余二线段的和。

首先根据题意画出直观图（图7.3）。分清已知和求证并写出来。

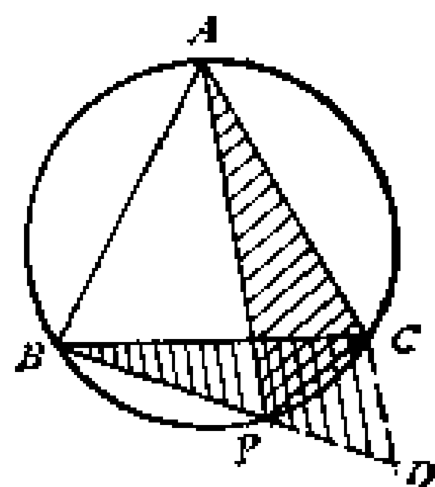


图7.3

已知 正三角形 ABC，P是其外接圆弧$\overset{\frown}{BC}$上一已知点。

求证 $PA=PB+PC$

探索证法（正式证明这步不必写出）。因PB与PC不在同一直线上，要把它们的和与PA比较大小很不方

便，为此延长BP到D，使$PD=PC$，然后设法证明 $PA=PD$。从图上看来，因为$\angle PAC=\angle DBC$，$AC=BC$，自然要想到连结CD 来证明 $\triangle PAC\cong\triangle DBC$，这只要再添上一个条件就行了。观察$\angle ACP$和$\angle BCD$，它们都含有$\angle BCP$，只须再证$\angle ACB$ 与$\angle PCD$ 相等就可以了。然而 $\angle ACB=60°$，于是问题归结为证明 $\angle PCD=60°$，可是已知 $PC=PD$，$\angle CPD=\angle BAC=60°$，$\triangle PCD$ 是正三角形，于是问题得到了解决。

证明 证法一 延长BP到D，使$PD=PC$，连结CD。已知$\angle CPD=\angle BAC=60°$，于是$\triangle PCD$是正三角形。因此 $\angle ACB=\angle PCD$，它们加上公共角 $\angle PCB$，从而$\angle ACP=\angle BCD$。

在 $\triangle PAC$ 与 $\triangle DBC$ 中，$\angle ACP=\angle BCD$，$AC=BC$，$\angle PAC=\angle DBC$，所以它们是全等三角形。由此得出

$$PA=DB=PB+PD=PB+PC$$

这个证明写成符号式为：

$$\left.\begin{array}{l} D|B\overline{P}D,\ PD=PC \\ \angle CPD=\angle BAC=60° \end{array}\right\}\Rightarrow\triangle PCD\Rightarrow\angle ACB=\angle PCD$$

$$=60°\Rightarrow \qquad ①$$

$$①\Rightarrow\left.\begin{array}{l} \angle ACP=\angle BCD \\ AC=BC \\ \angle PAC=\angle PBC \end{array}\right\}\Rightarrow\triangle PAC\cong\triangle DBC\Rightarrow \qquad ②$$

$$②\Rightarrow\left.\begin{array}{l} PA=BD \\ BD=BP+PD \\ PD=PC \end{array}\right\}\Rightarrow PA=PB+PC$$

探讨本题的解法，由于点D的位置取法不同，还有以下三种证法：

证法二 延长 PB 到D，使$BD=PC$，然后证明 $PA=PD$（图 7.4）

证法三 在线段 PA 上截取 $PD=PC$，然后证明 $PB=AD$（图 7.5）。

证法四 在线段 AP 上截取 $AD=PC$，然后证明 $PB=PD$（图 7.6）.

证明望读者自行完成。

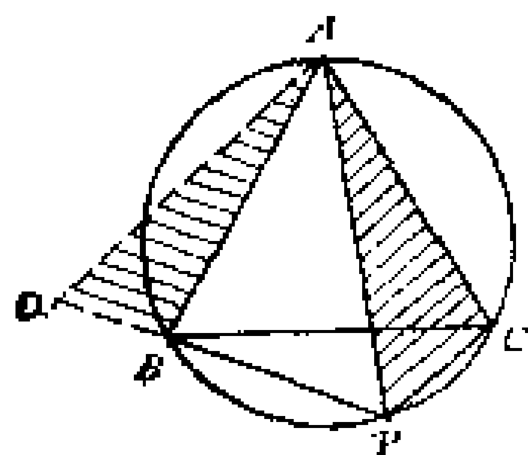


图 7.4

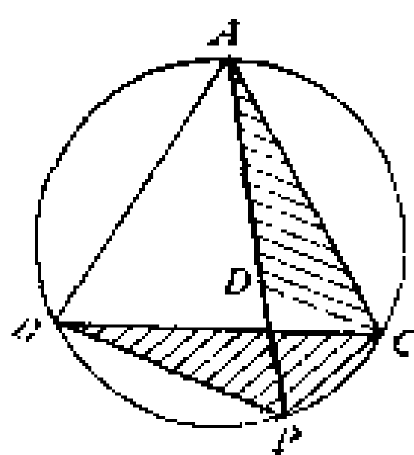


图 7.5

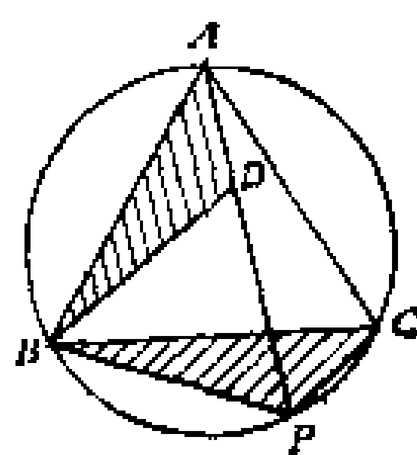


图 7.6

本题当然也可用反证法来证，不过比上述方法要麻烦的多，最简单的证法是用托来米（ptolemy）定理：

证法五 因为 $ABPC$ 内接于圆，所以应有

$$PA\cdot BC=PB\cdot AC+PC\cdot AB$$

因为 $BC=AC=AB$，所以有

$$PA=PB+PC$$

例 2 如果四边形的一组对边相等，延长这一组边，使分别与另一组对边两个中点的连线相交，则交出的两个角相等.

已知 四边形 $ABCD$，$AD=BC$，M、N 分别为另一组对边 AB、CD 的中点，AD、BC 的延长线分别与直线 MN 交于 E、F（图 7.7）

求证 $\angle AEM=\angle BFM$.

证明 证法一连结对角线 BD，取其中点 O，连结 OM、ON. 因为 $ON\parallel BF$，$MO\parallel AE$，所以 $\angle AEM=\angle OMN$，$\angle BFM=\angle ONM$. 因为 $MO=\frac{1}{2}AD$，

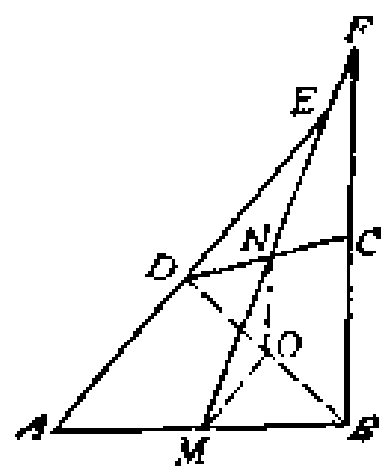


图 7.7

$ON=\frac{1}{2}BC$，且 $AD=BC$，所以 $MO=ON$，从而得出 $\angle OMN=$

$\angle ONM$，因此$\angle AEM=\angle BFM$。

用符号式可证明如下：

$$\left.\begin{array}{l} O|D\overline{O}B,\ OD=OB \\ DN=NC \\ AM=MB \end{array}\right\}\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}ON\parallel BF\\ OM\parallel AE\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}\angle AEM=\angle OMN & \text{①}\\ \angle BFM=\angle ONM & \text{②}\end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{l}OM=\dfrac{1}{2}AD\\ ON=\dfrac{1}{2}BC\\ AD=BC\end{array}\right\}\Rightarrow MO=ON \qquad \text{③}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③}\Rightarrow\angle OMN=\angle ONM \end{array}\right\}\Rightarrow AEM=\angle BFM$$

此题还有以下各种证法，提示如下：

证法二 如图 7.8，作 $NG\parallel DA$，$NH\mathrel{\underline{\underline{\parallel}}}CB$，则$\angle GNM=\angle AEM$，$\angle HNM=\angle BFM$。证明 M 是GH的中点，则NM是等腰三角形 NGH的角平分线，$\angle GNM=\angle HNM$。这只须证明 $AGBH$ 是平行四边形就可以了。

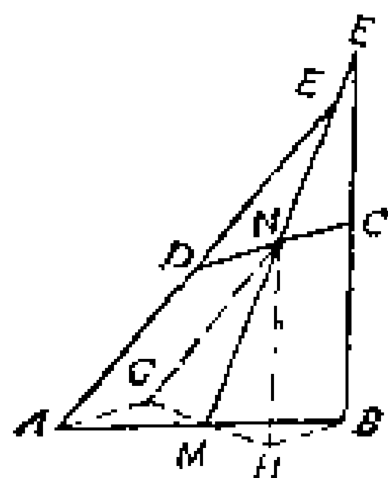


图 7.8

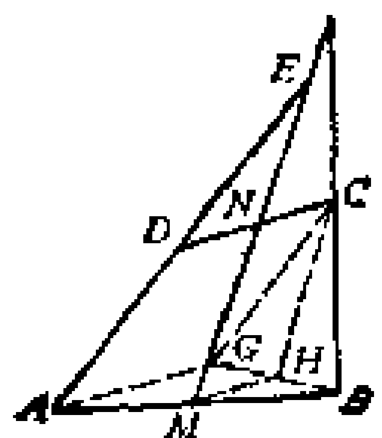


图 7.9

证法三 如图 7.9，作 $CG\mathrel{\underline{\underline{\parallel}}}DA$，连结$BG$，取 BG中点 H，连结MH和CH，CH为等腰三角形 CBG 的顶角平分线和中线。再证明 $\angle GCH=\angle AEM$，$\angle BCH=\angle BFM$，这只要证明 $CH\parallel FM$就可以了。

证法四 如图7.10，作 DQ、CP 都平行于NM，则$\angle ADQ=\angle AEM$，$\angle BCP=\angle BFM$。只要证明 $\angle ADQ=\angle BCP$ 问题就

解决了．作 CG、AL、BK、DH 分别垂直于 FM．可知$\triangle DHN\cong\triangle CGN$，$\triangle ALM\cong\triangle BKM$，从而得出 $DH=CG$，$AL=BK$．又 $DQLH$、$CPKG$ 都是平行四边形，得 $QL=DH=CG=KP$，$AQ=BP$，所以 $\triangle ADQ\cong\triangle BCP$，从而得证．

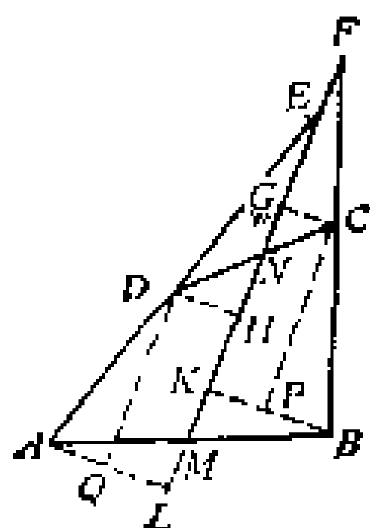


图 7.10

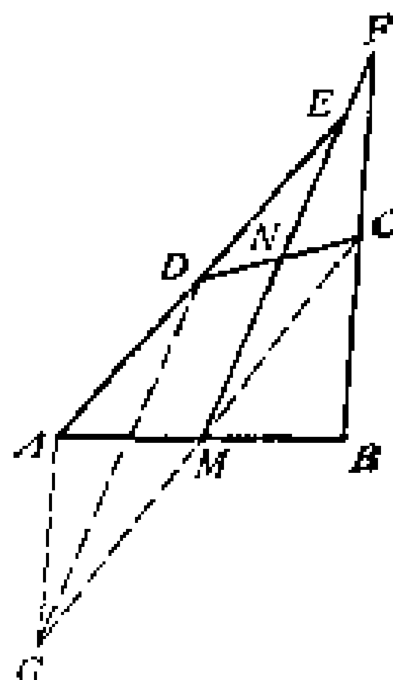


图 7.11

证法五 如图7.11，作C关于M的中心对称点G，连结AG，$AD=BC=AG$，$\angle ADG=\angle AGD$．又MN是$\triangle CDG$的中位线，$DG\parallel FM$ 而，$AG\parallel CB$，所以得出 $\angle ADG=\angle AEM$，$\angle AGD=\angle BFM$．

此外还可以找出其他证法．这几个证法有一个共同的特点，都是将要证明相等的两个角移动到便于比较大小的位置，如成等腰三角形的两个底角，或有公共顶点的角，或两个全等三角形的对应角等，这是证明本题的基本思想．望读者分析一下各种证法的优缺点．

7．形式逻辑的基本规律简介．

下面简单介绍形式逻辑的基本规律．

（1）同一律

同一律的基本内容是：同一对象在同一时间内和同一关系下必须是确定的和暂时不变的．它的公式是："A是A"．

如果A是概念．就应当在同样一个意义上来使用．例如A指三角形，那么A不能有三角形以外的其它性质，不能是四边

形或别的什么东西，即不准偷换概念。

如果A是判断。例如，在欧氏几何里“过已知直线外一点，只能引一直线平行于已知直线”，就不能同时又说：“过已知直线外一点能引二直线平行于已知直线。”即不准偷换命题。

同一律的客观根据是事物的质的规定性。毛泽东同志在《矛盾论》中指出：“无论什么事物的运动都采取两种状态，相对地静止的状态和显著地变动的状态。……当着事物的运动在第一种状态的时候，它只有数量的变化，没有性质的变化，所以显出好似静止的面貌”，任何事物都有它自己的特殊的质，规定一事物与他事物的区别。事物这种质的规定性在人的意识中的反映，就是同一律所要求的思想的确定性或同一性。但是形式逻辑的同一律并不象形而上学意义下的同一，把事物看成永远不变的形式逻辑的同一律并不反对事物不断发展变化这一辩证法的科学原理。

辩证法并不否认客观事物中存在着同一性，但是只承认真实的、具体的同一性，“真实的具体的同一性包含着差异的变化”（《自然辩证法》）即同一性和差异性的统一。一切事物在一定条件下有相对稳定性的一面，但同时又包含着内部矛盾，包含着转化为自己对立面的可能，差别性就体现在事物处于不断地运动和变化之中，如直可以变成曲、三棱柱可以转化为三棱锥。在非欧几何里，过直线外一点可以有两条直线或者不存在直线平行于已知直线等等。抽象的同一性，即永远不变的同一性是不存在的。

（2）矛盾律

矛盾律的基本内容是：在同一时间和同一关系下，关于同一对象的两种相反判断或思想不能同时都是真的。它的公式是：“A不是非A”。

这里所指的“相反的判断或思想”指两种情况：一种是矛

盾的关系，如“$\sqrt{2}$是无理数”和“$\sqrt{2}$不是无理数”，两个判断即不能同时是真又不能同时是假，只能一真一假；另一种是反对关系，如“$\sqrt{2}$是有理数”和“$\sqrt{2}$是超越数”，两者虽然不可能同真，然而两者有可能同假，实际上$\sqrt{2}$既不是有理数又不是超越数。矛盾律要求我们，在同一时间同一关系对于同一事物来说，不能是既真又不真，既存在又不存在，既肯定又否定，不能自相矛盾。

矛盾律不允许的是逻辑矛盾而不是事物本身的矛盾。矛盾律并不否认客观事物的对立统一的矛盾的存在。否定事物本身的矛盾是形而上学的观点。

（3）排中律

在同一时间和同一关系下，对同一对象的两个矛盾的判断中，始终有一个是真的，另一个是假的，而不可能有第三种情况，它的公式是：“是A或者不是A”。就是说A和非A两者必居其一，不能有居中的情形。

“$\sqrt{2}$不是无理数”或“$\sqrt{2}$是无理数”两者必有一个是真的而另一个是假的；肯定了一个同时就否定了另一个，反之亦然。

排中律与矛盾律是有联系而又有区别的。排中律与矛盾律都是关于两个自相矛盾的判断的规律。矛盾律表明在两个矛盾判断或反对判断中，至少有一个是假的，不能两个都真。而排中律却表明在两个矛盾判断中，一定有一个是真的，另一个是假的，不能两个都假。排中律在“是”与“不是”之间必须作出明确的选择，不能模棱两可。

（4）充足理由律

充足理由律的基本内容是：任何真实的判断和思想的确定，都应当有充足的理由。

客观世界中的任何现象的发生和发展，都有其原因的，都有其现实根据的。充足理由律就是这种客观现象和事物间的相

互联系在人们头脑中的反映．任何一个判断和思想是否正确，是否符合客观实际．都要提出科学的根据加以说明或证明，才不会使人发生怀疑，才能令人信服的接受．一般的要用一个或若干判断作为一个判断的充足理由，这些判断本身必须是已证明其为真实的，不然就不成其为充足理由．逻辑论证实质上是为论题的真实性寻求充足理由，就是找出论据，所以逻辑论证是根据充足理由的要求进行的．

以上四条基本规律之间，有着不可分割的内在联系．同一律要求在思维过程中的思想必须有确定性、同一性；矛盾律要求在思维过程中不能有自相矛盾的思想存在；排中律要求在肯定与否定两个相互矛盾的判断中，二者必有一真一假，不允许有居中的想法；而充足理由律则要求真实的论断必须有合于现实的充足理由作为根据．总之，形式逻辑的规律要求人们的思维必须是明确的，没有矛盾的，循序而进的，首尾一贯的，有充分根据的．

三　本章小结

形式逻辑是研究思维形式及其规律的一门科学，是人们进行正确思维的准则之一．逻辑思维形式有概念、判断、推理、证明等，逻辑基本规律有同一律、矛盾律、排中律和充足理由律等．本章不是讲一般逻辑学，是讲它在几何学中的应用，主要是讲几何学中惯用的一些规律和方法，在很多方面已经带上了几何学本身的一些特点．抽象的几何学可以说是研究公理、基本概念、定义、定理的逻辑结构，除了几何本身的规律外，从形式上看就是严格遵守这些逻辑规律和方法．

概念是思维的细胞，它是其他逻辑思维形式的直接或间接的组成部分．几何学的概念是几何学所研究的对象或关系．几何学的概念有不定义的和定义的，不定义的概念称为原始概

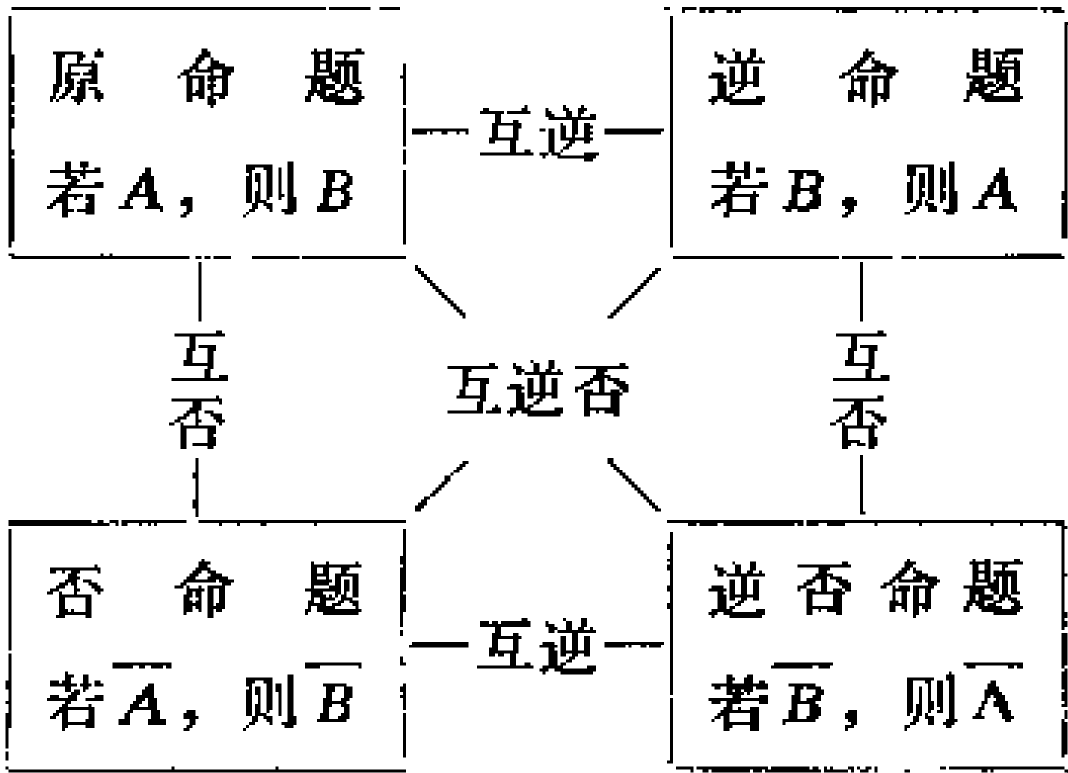
念，它们是满足公理系统的一切“物”和“物”之间的最基本的关系，即原始关系，它们是一切定义的基础或根据．概念来源于客观，是从客观事物抽象出来的，但数学概念的抽象是抽象的抽象，如公理化的“点”、“直线”、“平面”不单单指的是日常生活中所理解的抽象的点、直线、平面，面是发展成为满足公理系统的一切“物”了．

定义是明确概念的逻辑方法，所谓明确概念就是揭示概念的内涵和外延．在几何学里最常用的定义方法是采用“最邻近的种”加“属差”的方法以及发生定义的方法．

判断是对于思想对象有所肯定或否定的思维形式．几何学中的判断表现为命题，如公理、定义和定理等．

公理和定理等命题一般是假言判断，其公式是：“若S是P，则R是Q．”“若S是P”称为假设或题设，“则R是Q”称为结论或题断，可以简单表示为“若A，则B”．

命题有四种形式，其关系如下：



互逆或互否的命题不一定同真同假，而互逆否的两个命题一定是同真同假，这样的两个命题叫做等价的．满足同一法则的命题与其逆命题等价．分断式命题与其否命题等价．

几何学中的公理是其真实性不加证明就承认的命题，它规定了一些最基本概念的基本关系，是一切逻辑推理和证明的基

础．公理来源于实践，其正确性最终要到实践中去验证，这就是公理的客观性。

几何学中的定理是其真实性已被证明的命题，它反映了几何图形的某些性质．用公理法建立几何学逻辑结构时，一个定理不管是多么直观显然也要加以证明．由于命题有四种形式，因而定理还有逆定理和否定理等。

推理是从一个或几个判断得出一个新判断的思维形式．推理依据判断，而通过推理又得出新判断．几何学中的命题都是通过推理得出的．数学就是一个推理的学科。

客观世界的一切事物都是一般和特殊的有机统一．一般必体现于特殊之中，而特殊之中也存在着一般．归纳推理是从特殊到一般的推理，这种推理所得出的判断不一定是必然的、真实的，但它是发现真理的一种手段，几何学中的一些重要事实就是这样发现的，后来又证明了这些事实是正确的．完全的归纳推理所得出的判断一般是正确的．演绎推理是从一般到特殊的推理，即把一般性的结论应用到特殊的事物上．这些推理如果前提真实，推理形式正确，那末结论一定是真实的．归纳和演绎是相互联系、相互补充的两种推理，人们认识的上升运动，既不是单纯的归纳也不是单纯的演绎，只能在归纳的基础上演绎，在演绎的基础上归纳。

用公理法建立的几何体系是一个演绎体系，就是说从公理演绎出定理，从前面的定理演绎出后面的定理，形成了由定理等组成的链子。

证明是陈述一个判断的充足理由．证明由若干推理来完成，是推理的深入，证明与推理的原则区别是思维程序相反．证明是保证命题成为定理的重要的手段，没有得到证明的命题不能成为定理。

证明的方法有直接证法与间接证法，归纳证法与演绎证法，分析证法与综合证法．每个命题的证明是这些方法的联合运用．

第三章　用公理法建立几何学结构范例学习指导

一　重点和要求

本章作为运用公理法建立几何学的例子，介绍了欧几里得平面几何学和罗巴切夫斯基平面几何学的逻辑结构，同时介绍了公理系统的基本问题。学习本章时，要抓住三个重点：

1　绝对几何学的结构和特点。

2　欧几里得几何学的结构和特点。

3　罗氏几何学的结构及其与欧氏几何学的逻辑相关性。

第一个重点要求读者首先对绝对几何学的四组公理有个整体地认识，然后再了解各组公理的主要功能，比如说顺序公理主要解决了什么问题，运动公理主要解决了什么问题等等，这样就可以加深对绝对几何公理系统的认识，了解绝对几何学的基本内容和特点，而且从中看出绝对几何学是怎样按公理法的要求一步一步地建立起它的逻辑结构。中学几何教材是用不严格的（古典的）公理法建立的，它的公理是不够用的，因面许多原则问题是靠直观承认了的，这一点应该通过本书的学习，对其缺欠有一个基本的认识，这样才能用更高的观点来分析和掌握中学教材。本章§1，§2所提出的定义、定理在中学教材里都已进过，但我们这里主要还不是学习这些定义和定理，而是要了解怎样用公理法来建立几何学的严密结构，因此就要有基础（公理）、四梁八柱（定理、定义）、和相互联接（逻

辑关系），而我们的公理系统和中学教材不一样，逻辑论证所要求的严密程度不一样，编者所要达到的目的不一样，因此有必要按着本书的要求和系统把它们按严格的逻辑关系排列出来，不这样就达不到本章的目的。学习这一部分内容时，只要弄清各组公理的作用和定理间的逻辑关系就可以了，未加证明的定理不必去一一寻求它们的证明。

绝对几何是欧氏几何学和罗氏几何学公有部分，这正是绝对几何学命名的由来，本章特意将绝对几何部分编排在一起（有的教材不是这样，常常较早地提出了欧氏平行公理，并用来证明一些绝对命题）。这样可以一举两得（同时建立了两种几何里的命题），又便于研究两种几何的逻辑相关性。

第二个重点是了解欧氏几何学的结构和特点。欧氏几何学的公理系统有五组公理，即绝对几何公理加上欧几里得平行公理，绝对几何部分在§1里已介绍了，现在要了解的是如何在绝对几何的基础上导出欧氏平行公理的一系列推论，这些被称为真正的欧几里得命题才真正反映出欧氏几何的主要特点。学习这部分内容就是要抓住这个重点，了解欧氏平行公理和它的等价命题，了解它的主要功能，这样就能掌握欧氏几何学的特点。我们还要注意，所谓"特点"总是与其他事物相比较而言的，我们不仅要从欧氏几何本身来了解它的特性，而且还要和非欧几何或其他几何学相比较，才能更清楚欧氏几何学的特点。这就好比观察一所建筑物，我们不但要进到里面去看看内部结构，还要到外面看看外部结构，并且同其他建筑物进行比较，才能了解这座建筑的全部构造和特点。这也是我们要讲非欧几何的目的之一。

第三个重点要求我们，首先对罗巴切夫斯基几何学的公理系统有个整体的认识，然后重点抓住罗氏平行公理及其主要的推论，这些定理是真正的罗氏几何学命题，它们反映出罗氏几何学的真正特点。学习这一部分时，主要的困难是我们头脑里长期被欧氏几何的事实占据着，形成了习惯，开头对罗氏平行公

理及其一些推论一时不容易按受下来，对许多事实感到非常不习惯，甚至怀疑，但如果我们能进入教材里去，深入理解概念、定理和证明，逐渐会好起来，关键是要一字一句的阅读教材．关于两种几何的逻辑相关性，主要是从公理系统找出关系，而且了解真正的欧氏命题与对应的罗氏命题彼此是相矛盾的，读者应能对两种几何命题加以区分。

二 内容分析

1　关于欧氏和罗氏几何学的公理系统

绝对几何是欧氏和罗氏两种几何的公共部分，两种几何所差的是平行公理不同，从而构成了两种不同的公理系统。可以画图表示如下：

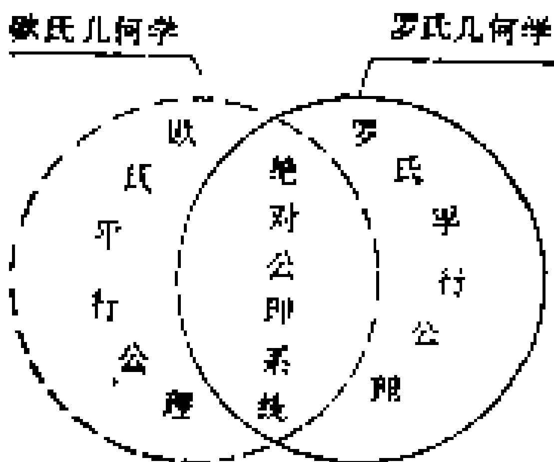


图7.12

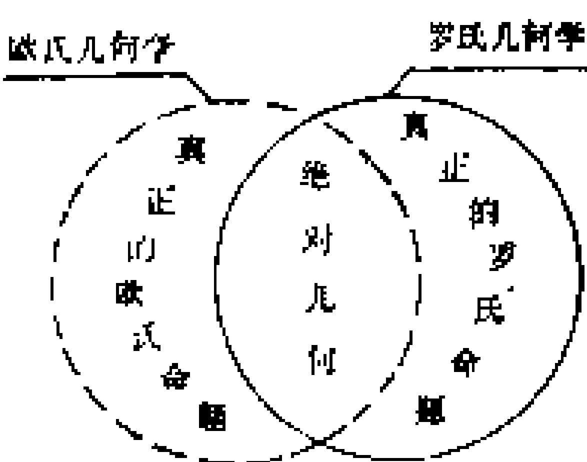


图7.13

图7.12表示两种几何的公理系统，图7.13表示两种几何学的内容，其中真正的欧氏命题与真正的罗氏命题是相应的平行公理的推论，不属于绝对几何的命题，因而两者相对应的命题必然是相互矛盾的，例如3.1段中列出的八个定理都与对应的欧氏定理相矛盾。

2　原始元素和点集

原始元素“点”、“直线”、“平面”是不定义的几何图形（空间），它们的属性由公理来规定．结合公理并没有规定“直线”和“平面”是由点组成的，就是说还不看成是由全体

点组成的无限集合，它们仅是一个整体的“物”，因此公理 I_2 规定“在每条直线上，至少存在两个点”并不是多余的。通过顺序公理才可以导出直线上的点是稠密有序的，平面上的点无穷多，而且把“线段”和“射线”定义为满足一定条件的点集，把几何图形F定义为点集，这样“平面”也当然被看成是一个点集了。在这一点上，本书的处理方法和希尔伯特在他所著《几何基础》第一章或其他一些几何书上的处理方法略有不同。希尔伯特在建立欧氏几何体系时，直到叙述完结合、顺序、合同、平行等四组公理和有关定理，都没有涉及到集合论的概念，把“直线”、“平面”当作点的集合，直到讲最后的连续公理时，才把“直线”、“平面”作为点集，因为连续公理实质上要以无限的点集概念为前提。本书的处理方法不仅为研究一些几何概念提供方便，早为连续公理作了准备，而且和近代几何更好的联系起来。

3 关于运动公理

运动是从日常生活中移动物体的形式或位置关系中抽象出来的概念。本书把运动当作是不定义的原始概念，它具有运动公理所规定的属性。平面几何的运动相当于日常生活中所说的“移动”，包括不离开平面的滑动和离开平面的翻转。但立体几何中的运动则和生活中所理解的移动不完全一致，例如一双皮鞋有左右脚，它们是左、右对称的，从几何来看这种关系是成平面对称（镜面反射）的两个图形，而平面对称是运动的特殊情形，即从左脚变成右脚是一个运动，但生活中却不可能经过移动把左脚鞋变成右脚鞋的位置，即把两只鞋占有的空间重合在一起。生活中的移动是刚体移动，而几何的运动则是刚体移动加一个平面反射。

通过运动公理可以建立图形相等（或全等），有的书把图形相等的关系称为图形的合同关系，这是非常重要的概念。图形相等的关系是一种等价关系，可以把图形分成等价类。实际

上，运动公理肯定了恒等运动和逆运动的存在，以及连续实行两个运动的结果还是一个运动，即运动的积仍是运动，所以平面上（或空间）全体运动的集合构成群（在第四章将要详细讨论一般变换群和运动群等理论），这种可群性保证了图形相等的反身性、对称性和传递性。

有的初等几何书，用合同公理来代替运动公理。合同公理是把“相等”作为不定义的原始概念，然后通过合同公理来规定“相等”的一些基本属性。这时“运动”就可以根据“相等”来加以定义，如把运动定义为：

“平面(或空间)到平面(或空间)自身的点的一一对应，如果保持对应线段总相等，则这个点间一一对应关系叫做运动。”

从而可以建立关于运动的一些定理。

运动公理和合同公理是等价的公理组，它们都可以建立图形相等和图形不相等的有关理论。

除了一般运动而外，还存在一些特殊的运动，例如直线反射（轴对称）、平移、旋转等，这些特殊运动的定义、性质以及相互关系，本书已在第三章§2的最后作一简要的叙述（因为平移性质需要平行公理V），学习运动公理可以与这一部分结合起来。

4　图形唯一性的证明

在初等几何里常常遇见求证满足某条件的图形的“存在性”和“唯一性”。例如证明“线段中点的存在和唯一性”“过一点作已知直线的垂线的存在性和唯一性”等等。图形的存在性一般通过作图来证明，即能作出满足某条件的图形，就证明了该图形的存在。例如第三章定理1.19和定理1.23都是这样解决的。但是在证明唯一性的时候，一般用反证法。这是为什么呢？对于图形的存在性，只要找出某种作图方法作出一个这样的图形，就保证这一图形的存在，这是无可非议的。但是，如果从某一个具体作图方法出发，因为通过作图只作出唯一一

个满足条件的图形来，就断言“满足条件的图形是唯一的”，这在理论上是不严密的．以证明“线段中点的唯一性”为例，作线段中点的作图方法可以有很多种，本书定理1.19的作图法是一种．此外还有图7.14～7.16所表示的方法，其中图7.14的作法是定理1.19作图的推广，α角可以任意给出，有无穷多种取法；图7.15是作中垂线的方法，即以

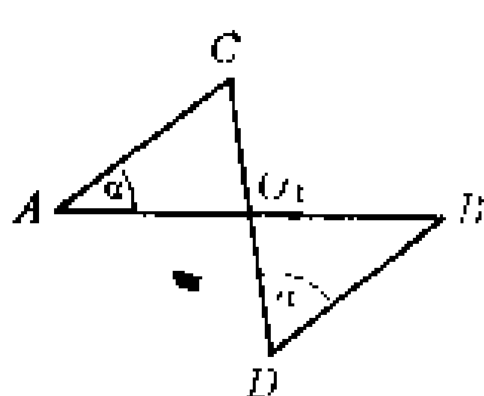


图7.14

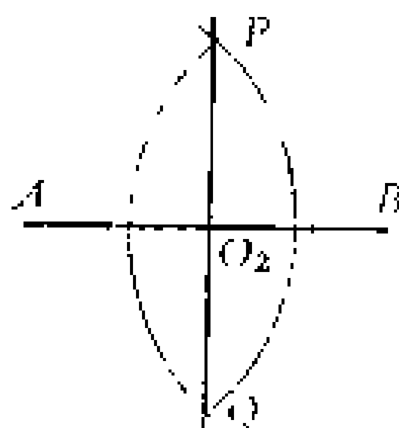


图7.15

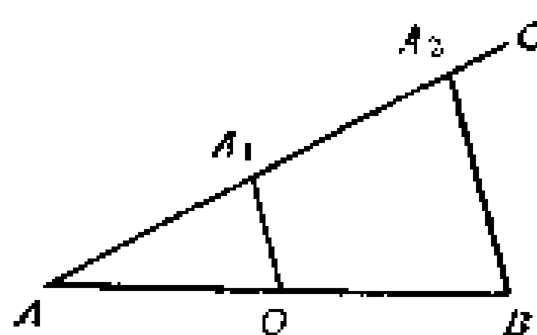


图7.16

A、B为中心，R为半径作圆，两圆交于P、Q两点，则直线PQ与线段AB的交点O_2为中点；图7.16是从A引任意射线AC，在AC上依次截取$AA_1=A_1A_2$，然后作$A_1O\parallel A_2B$，则O是AB的中点，这个方法使用了平行线的性质．我们还可以找出其他一些作图方法．在这些作法中，可以证明每种作图方法作出的中点都是唯一的，但是有两个问题并没有解决：第一，对于同一线段AB，用甲法作出的中点和用乙法作出的中点是不是同一个点？那末用更多种方法作出的中点都是同一个点吗？第二，作中点的方法是举不穷尽的，即使你找出十个方法作出的中点都是同一点，难道不会再有第十一个或第十二个方法作出的中点和你用前十个方法作出的不一致吗？因此，只凭一个作图方法肯定的唯一性，在逻辑上是不可靠的．那么为什么用反证法来证明唯一性就可靠呢？因为用反证法证明时不涉及作图方法，如果满足条件的图形不唯一，比如有两个，就会推出一个矛盾的结果，所以题断反面不成立而题断成立，说明不管你第二个是怎样来的，只要存在第二个就不行，因此不能有第二个

出现。严格地讲，证明图形的唯一性要用反证法。

5　等价命题

等价命题是相对于一个公理系统而言，本书第三章§2所讨论的等价命题是相对于绝对公理系统的。如果从绝对公理系统中拿掉某组公理或某个公理，有的等价命题就要不等价了。例如在绝对公理表中去掉"阿基米德公理"，则平行公理不能与命题"三角形内角和等于二直角"等价。同样，在这种情形下，罗氏平行公理也不能与"三角形内角和小于二直角"等价。

这里所讲的等价命题的概念，与第二章里所讲的由于命题四种变化出现的等价关系是有区别的。那里出现的等价命题关系，例如原命题与逆否命题的等价，满足同一法则下原命题与逆命题的等价等等，仅仅反映了命题的题设和题断变化后两个命题间的关系。这里所讲的一般等价关系，从形式上看似乎是毫不相干，然而在一定条件下（公理系统），它们却可以互相代替，建立同样的理论体系。前面讲的特殊等价关系仅仅是这种等价关系的特殊情形。以前提过的"运动公理"组与"合同公理"的等价性，"阿基米德公理和康托尔公理"与"戴德金命题"的等价性都是这种一般意义下的等价关系。

我们讨论等价命题和证明有两个目的：第一，了解同一种几何学为什么可以有不同的公理系统，例如欧氏几何就有多种公理系统，这是因为一个公理可以用它的等价命题来代替；第二，这里列出的等价命题的定理都是历史上试证第五公设时得出的，有的证法相当巧妙。

6　关于罗氏平面几何

（1）罗巴切夫斯基平行线定义

本书利用了在半平面上对过一点的所有半直线进行戴德金分类，把第二类里最前面的一条半线，叫做已知直线的平行半线，并把包含这条半线的直线叫做在这条半线的方向上与已知

直线平行的直线．为了更好的理解这个定义，我们还可以作如下的解释：

已知直线$C'C$和不在它上面的一点A．过A作$AB\perp C'C$，垂足为B（图7.17）．过A作直线$A'A\perp AB$，则$A'A$与$C'C$不相交．在半线BC上有一动点M，$\angle BAM=\alpha$．当M沿着$C'C$方向运动时，不论M到什么位置角α总是小于直角，而且是单调递增的．当M无限远离点B时，有界且单调递增的角α一定趋于一个极限值，设这个极限值为$\angle BAP=\omega$，则ω为α中的最大值．这时半线AP与直线$C'C$必不相交，因为如果半线AP与$C'C$相交于一点M_1，这时取点M，使M_1在B与M之间，则$\angle BAM>\omega$，ω就不能是α角的最大值，这是矛盾的．

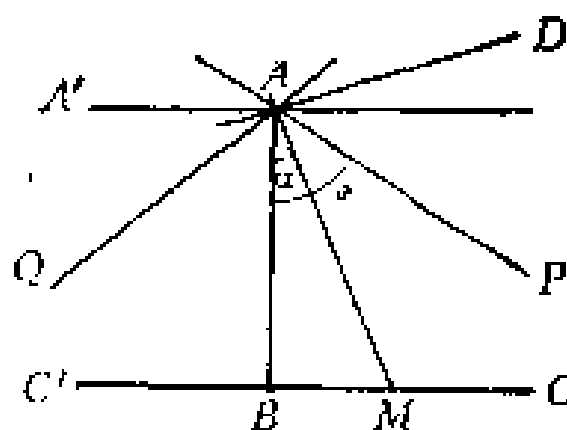


图7.17

现在把右半平面上过点A的所有半线建立逆时针旋转的顺序，使AB半线为第一条，这时在半线AP后面的半线都与直线$C'C$不相交，而半线AP就是第一条与直线$C'C$不相交的半线．因此半线AP与直线$C'C$平行，其中AB是平行距，ω是平行角．就是说平行于直线$C'C$的半线AP，是动点M沿$C'C$无限远离时，半线AM的极限位置．

同理，在左半平面上也有一条半线AQ平行于直线CC'，且$\angle BAQ=\angle BAP=\omega$．

当罗氏平行公理成立时，则$\omega<\frac{\pi}{2}$．当欧氏平行公理成立时，因为过A只有一条直线与直线$C'C$不相交，因此半线AP、AQ组成一条直线$A'A$，这时$\omega=\frac{\pi}{2}$．

根据定义，我们可以证明罗氏平行线也具有对称性和传递性．

（2）罗氏平面上直线的相互位置

平面上两条直线的相互位置关系可以归纳如下表：

相互位置关系	过一点A的直线与另一直线的位置同平行角ω的关系（图7.17）	离散性质	公垂线
平　　行	$\angle BAP=\omega$ $\omega>0$	平行方向上不离散，另一方向上离散	无
相　　交	$0=\angle BAM<\omega$	有一个交点，两个方向上都离散	无
超 平 行	$\omega<\angle BAD<\pi-\omega$	无交点，两个方向上都离散	有唯一公垂线

（3）罗氏平面上的基本曲线

欧氏平面上有两种线束，即共点线束和平行线束，可以定义出两种基本曲线，即圆和等距线(直线)。在罗氏平面有三种线束，即共点线束、超平行线束和平行线束，因此可定义出三种基本曲线，即圆、等距曲线（退化时为直线）和极限圆。

基本曲线常用的三种定义方法：

1）利用“对应点”（对称点）的概念，这是本书的定义方法。

2）利用“等距离”的关系，如：

圆——到共点线束的中心有等距离的点的轨迹。

等距曲线——到超平行线束的底有等距离且在底的同一侧的点的轨迹。

极限圆——到平行线束无限接近的极限点有等距离的点的轨迹。

3）利用“正交轨迹”的概念，如：

圆——与共点线束中每条直线都正交的连续曲线。

等距曲线——与超平行线束中每条直线都正交的连续曲线。

极限圆——与平行线束中每条直线都正交的连续曲线。

把上述三种定义方法联系起来考虑，就可以对基本曲线的概念了解得更清楚。

三种曲线所以叫做基本的，是因为它们都有和直线相类似的性质，如：

（i）每一条和基本曲线直交的直线，即定义基本曲线那个线束中的每条直线，都是曲线的对称轴。

（ii）曲线上每一个曲线段（弧）都可以在曲线上作保持重合的运动，就是说基本曲线都是常曲率曲线。

而其他曲线没有这样的性质。

7 公理系统的基本问题

研究几何学的公理系统时，涉及到三个基本问题，即公理系统的无矛盾性、独立性和完备性。

希尔伯特在他的著作《几何基础》第一章§8和第二章里用了不少篇幅叙述了公理系统的三个基本问题。事实上，这是一个很重要的问题。

任何一个公理系统都要满足无矛盾性，否则用它建立的几何体系将是一个有矛盾的体系，这样的公理系统是没有任何价值的。应当注意，用模型方法证明的无矛盾性是有条件的、相对的，例如用笛卡儿模型来证明欧氏公理系统的无矛盾是归结为实数的算术运算的无矛盾。即只要实数的算术运算无矛盾，则欧几里得几何就是无矛盾的系统。又如用卡莱——克莱因模型来证明罗巴切夫斯基几何公理系统的无矛盾是归结为欧氏几何的无矛盾，即如果欧氏几何无矛盾，则罗氏几何就是无矛盾的。我们不能说，欧氏几何的无矛盾性已经完全解决了，它只是被化成了更基本的问题，即化成了实数算术运算的无矛盾问题，因为实数的算术运算几乎是整个数学的基础，这实质上牵

涉了整个数学的根据问题。

在建立公理系统时一般总希望表达某系统的公理条文是最少的，这自然就引出公理的独立性问题。然而在一个公理系统中使每条公理都具有独立性是一个比较复杂的问题，希尔伯特也仅是讨论了一些最使人关心的公理的独立性问题。一个公理系统很难说每一条公理都是独立的，本书所建立的公理系统也是这样，其中顺序公理和运动公理有的就不独立，但这并不破坏整个体系的建立。

欧氏平行公理的独立性是一个十分重要的问题，它说明欧氏平行公理决不能由其余公理导出。证明欧氏平行公理的独立性，是把欧氏平行公理加以否定加到绝对几何公理系统中去，如果构成的新公理系统无矛盾，则欧氏平行公理就关于绝对公理系统是独立的。例如罗氏几何的公理系统就是这样的一个系统，因为它是一个无矛盾的系统，所以欧氏平行公理是独立的。历史上出现的试证第五公设问题，经历了两千多年的时间，许多学者都企图用《几何原本》的其余公理（实际上就是绝对几何公理系统）证明第五公设，结果都告失败，其根本原因是不懂得第五公设的独立性，它不可能由其余公理导出。第五公设问题最终导致非欧几何的出现，而这一发现又证明了第五公设的独立性。

公理系统的完备性只涉及到少数的公理系统，如欧氏和罗氏几何的公理系统，大部分公理系统并不具有完备性，如绝对几何、拓扑空间等公理系统。这种不完备的系统更具有重要意义，因为以它为基础可以派生出许多新的空间。证明公理系统的完备性是证明它的所有模型都同构，通俗地说，如果同一公理系统可以作不同的解释，即具有不同的模型，两这些模型里，对用原始概念或定义过的概念来陈述的任何命题，也必相应地作种种解释，而对任一命题的解释真则同真，假则同假，成一一对应，则这一公理系统就是完备的。反之，如果对某个

命题的不同解释有真有假，则公理系统就不完备。例如绝对几何公理系统，因为所有的欧氏几何和罗氏几何的模型也都是绝对几何模型，但对于“三角形内角和”命题来说，有的是“二直角”有的“小于二直角”，即有真有假，因此这公理系统是不完备的。

三 本章小结

用公理方法建立几何学系统时都要经过四个步骤：

（1）原始概念的列举；

（2）定义的叙述；

（3）公理的叙述；

（4）定理的叙述和证明。

用公理方法建立的几何学是由原始概念、定义、公理和定理按着逻辑关系有次序的排列起来的命题系统——逻辑结构，公理是该几何学的基础。本章所建立的欧氏平面几何学和罗氏平面几何学都是如此。

原始概念以及由它们定义出来的一系列概念都叫做几何元素或几何图形，它们可以是任何的“物”，只要它们之间的相互关系满足一定的公理系统的要求就行。满足公理系统的几何元素的集合通常也叫做几何空间，如欧氏二维空间、三维空间，罗氏空间等等，几何图形是它们的子空间。用公理法建立的几何空间是抽象空间，这样的几何学更具有应用的广泛性。

原始元素没有定义，它们可以是满足一公理系统的任何“物”，每一个这样的具体的物，是该公理系统的一个具体解释，或称为该几何学的一个模型。如把欧氏几何中的直线解释为直尺画出的线，桌子的棱，拉紧的绳子，……；把平面解释为平整的桌面、水平面，……，这就是一个物理模型。又如解析几何中把点看成是有序的数组，直线看成是一次方程……，这是

欧氏几何的另一个模型，即笛卡儿模型。

同一种几何学，例如欧氏几何学，可以有不同形式的公理系统，这是因为一个公理系统中的某些公理可以用它们的等价命题来取代，从而构成公理条文、内容不相同的公理系统，但这些不同形式的公理系统，最终只能建立同一种几何空间。因此，确定某几何学的公理系统时可以有选择性。

选择公理系统时，除了要具有某几何学的特性外，还有三个基本问题，即公理系统的无矛盾性；每个公理的独立性和公理系统的完备性。每一个公理系统都必须满足无矛盾性，而独立性和完备性不一定都具备，如线性空间、拓扑空间的公理系统就不具有完备性。证明公理系统的三个基本问题，一般采用模型法。

非欧几何产生以前，人们认为欧几里得空间是唯一的，近代公理法形成以后，说明几何空间可以有无限多。

欧几里得在《几何原本》中采用了不严格的公理方法通常叫做古典公理法，有些教材一直使用这种方法。这个方法不同于现代公理法，它的公理不完全，原始概念和许多性质要依靠直观，受直观的限制。以希尔伯特为代表引进的现代公理法，脱离了直观性的约束，完全从公理出发，用纯理论的形式进行逻辑推理来建立几何学的逻辑结构，这种方法不仅适用于用综合法建立的几何学，也适用于用代数法和微分法等所建立的几何学，而且也适用其他学科。

围绕欧几里得《几何原本》中第五公设的研究，推动了非欧几何的产生，相继出现了罗巴切夫斯基几何学与黎曼几何学。欧氏、罗氏、黎氏三种几何学也分别叫做抛物型、双曲型、椭圆型几何学，而且从常曲率曲面的内在几何学来看，也只有这三种几何学。从用公理法研究几何学来看，罗氏几何与欧氏几何在公理系统上仅仅相差一条平行公理，而黎氏几何学与欧氏几何学或罗氏几何学在公理系统上的区别非常大，除了结

合公理外，其他公理都或多或少有所差别。本书已经讲过，在欧几里得平面上或空间里可以建立罗氏几何和黎氏几何的模型，例如卡莱——克莱因模型和球面模型，因此可知，如果这些几何学中有一个正确，则另外的几何学也正确。

为了便于比较，我们把三种几何学的主要特征列表如下：

	欧几里得几何学	非欧几里得几何学	
		罗巴切夫斯基几何学	黎曼几何学
过直线外一点的不相交直线	只存在一条	存在无限多条	一条也不存在
三角形内角和	二直角	小于二直角	大于二直角
三角形的面积与内角和	与内角和无关	与角欠成正比	与角余成正比
直线的长度	无限长	无限长	有限长但无终点

三种几何学都是无矛盾的体系，它们都在某一个侧面上反映了现实空间。三种不同的几何学在一定条件下的统一，正说明事物的辩证统一关系，说明三种几何学同样正确。

第四章　正交、相似、仿射变换群与欧氏、仿射几何学习指导

一　重点和要求

本章主要讨论几何学分类的群论原则，以及正交、相似、仿射变换群所对应的几何学和它们的基本性质，学习这一章时应着重领会：

1．几何变换的概念；

2．几何学分类的群论原则；

3．正交变换群和仿射变换群的几何．

第一个重点中的几何变换是研究几何学的基本方法，是这一编的基础概念，必须很好理解，才能为以后的学习打下牢固的基础．首先要搞清楚一般映射的定义；"到内"、"到上"及"一一的"映射之间的区别；"恒等"、"逆"、"积"等概念的意义．然后深入了解"变换"的概念以及它与"映射"的关系．要多联系一些具体例子来学习，而且在学习本章和下两章具体变换时，要不断复习和巩固"变换"的概念．

第二个重点中的"几何学分类的群论原则"就是克莱因的观点，它是本编所要介绍的中心思想，是贯穿在各章里的主线．首先要理解好变换群的概念，以及变换群的不变性质和不变量，然后再对几何学分类的群论原则有一个大体的认识，以便带着这种观点去学习以后要讲的各种具体变换群和它们的几何学．学习这部分内容，开始一定会感到很抽象，不得要领，

因为还缺少感性的认识．我们在这里讲它只要求读者有一个概括的认识，待学完以下要讲的正交、相似、仿射、射影变换群及它们对应的几何学之后、就会逐步地体会到这一原则的实质，最后全面掌握它．因此，在这里不要求读者一下子就掌握得很好．

第三个重点是讨论怎样用群论原则对欧氏几何、相似几何和仿射几何给以分类的，它们的主要特征是什么．读者如果时间紧可对相似变换群和它的几何以及各变换在作图上的应用作一般的了解，但要很好地了解正交、仿射变换群及解析表示，了解它们之间的关系，特别对它们的基本不变性质和不变量有个基本的掌握，这在以下各章都要用到．

二 内容分析

1 变换和变换群的概念

（1）映射和变换

几何变换是研究几何学的基本方法．变换的思想是客观事物的运动的反映．实际上，在初等几何中运用几何变换解决各类问题的例子已经是举不胜举了，只不过是没有在这方面加以系统整理就是了．一个最简单的例子是，在比较图形的大小时，要不可避免地运用“运动”的概念．比方说，要比较两个线段的大小，就是通过把一个线段“运动”到另一个线段上去来进行比较的．这里的“运动”，其实就是我们所说的正交变换．对于角和三角形大小的比较，甚至对于更一般的几何图形的比较，也都是借助于运动来进行的，或者更一般地说是借助于某种几何变换来进行的．把形形色色的具体变换汇集在一起加以抽象，便得到最一般的几何变换的概念．

为了弄清几何变换的概念，我们应首先了解一般集合之间的映射的概念和它的基本性质．

集合间的映射，是数学分析中的函数概念的一般化．实际上，映射的概念更为原始，有了它，可以把函数概念刻划得更清楚、深刻．

变换是集合间映射的特殊情形，它是一个集合到它自身上的一个一一映射，而几何变换则是集合的变换的特殊情形．我们把图形（包括平面和空间）看成是点集合，因此，图形间的映射就是点集合间的映射．在几何中，我们所关心的主要是平面（或空间）到它自身上的变换．

当然，我们在初等几何中所说的变换，是指具体图形间的一种对应关系．研究具体图形间的变换固然是十分重要的，事实上，我们在初等几何中，兴趣也往往是集中在具体图形之间的变换上．比方说，对于两个成位似的三角形，我们比较感兴趣的是这两个三角形是如何对应的，诸如这两个三角形的位置和大小关系，对应点、对应角和对应边之间的关系等等，而对于三角形以外的情形，就不那么关心了．但是，作为一个变换，我们总是把它定义在整个平面（或空间）上，让整个平面上（或空间）的点都经历这一变换，这样才有普遍意义，它适用于平面上的所有图形，当然也适用于所要研究的具体图形，即把全平面(或空间)的变换限制到具体的图形上去考虑．例如，当我们要考察圆向着一个直径的压缩的性质的时候，就选择这个直径所在的直线为压缩轴，对整个平面进行压缩，写出这个压缩的变换公式（自然，坐标系要选择适当）．这时，我们就会看出这个圆变成椭圆，而且这种对应关系是通过平面的压缩来实现的．因此，考察整个平面(或空间)的变换，比单独考察各别图形的变换更可取，它不仅反映了图形的变换，也反映了图形周围的变化情况．尤其重要的是，这样可以更有效地讨论变换的性质，从而，反过来又反映了图形的性质．

（2）变换群

两个变换依次施行的结果还是一个变换，这样就可以规定

变换的乘积．正是由于变换可以相乘，才有可能使得平面（或空间）的所有变换构成一个群．这是平面（或空间）的最一般的变换群，而以后所讨论的那些具体的变换群，都是它的子群．

变换的集合依变换乘法构成群是十分重要的．因为在空间中我们规定两个图形是“等价”的，如果在给定的群中存在一个变换，它把一个图形变成另一个图形，由于群的基本性质才使这个“等价”关系成为真正的等价关系．如果我们讨论的是正交变换群，这个“等价”就是“相等”或“合同”；如果讨论的是相似变换，那么这个“等价”就是“相似”．试想，如果上面规定的“等价”不是等价关系，这种等价有什么意义呢？

有了变换群的概念，就可以提出几何学的群论原则了．这个原则使得几何学的分类问题有所遵循，而且揭示了各种几何之间的联系与区别．

在一般性地讨论了变换和变换群以后，自然应该深入地讨论一些具体的变换群以及它们所属的几何．

2．几何学分类的群论原则

平面（或空间）的所有变换的集合，在变换的乘法之下构成群这一事实，对于几何学的发展具有根本的意义．因为对于一些几何性质的深刻认识，是通过对于和这个性质有关的变换群的研究而获得的，这说明我们为什么要致力于变换群的讨论．克莱因的观点的高明之处就在于他利用几何学的群论原则，把几何学进行了分类．依着他的见解，有一个变换群，便有一个属于它的几何学．

概括地说，克莱因的群论原则就是：某一空间上的几何学是研究平面该空间上的某一变换群下图形的不变性质和不变量的，这些不变性质和不变量统称该几何学的几何性质．例如度量性质、仿射性质、射影性质等等，它们代表了该几何学的特征，反映这些几何性质的命题成为该几何学的内容．变换群不

同，图形的不变性质和不变量也不同，从而产生了不同的几何学，通过变换群的从属关系，可以研究各种几何学的从属关系，即所谓子群的几何。于是，表面上看来混淆不清的欧氏几何、仿射几何和射影几何，通过变换群可以使它们严格区分开来，并且搞清了它们的从属关系，最终统一在射影变换群之下。

克莱因的几何学群论原则，不仅对于几何学，而且对于整个数学都产生了巨大的影响。这可以由拓扑学的发展来说明。拓扑学是现代数学的一个重要分支，它是研究最一般的拓扑空间在拓扑变换之下不变性质和不变量的学科。所谓拓扑空间是这样的集合，在它里面可以谈点的邻近性。所谓拓扑变换是正逆两方面都连续的变换，所谓连续，直观地说就是当点的变动很微小时，象点的变动也很微小。容易看出一个拓扑空间的所有拓扑变换的集合构成一个群，而拓扑学正是拓扑变换群下的一种几何。

3．正交变换群和欧氏几何

平面上的正交变换是最简单的一类几何变换，它是现实世界中物体位移的抽象，它的基本特征是保持任意两点间距离不变。因此，两点间的距离是正交变换群的基本不变量，其他的不变量都是由它派生出来的。

我们知道，在综合几何里有一组公理，叫作运动公理，利用运动公理可以推出平面的所有运动（广义的，即包括直线反射）无非是平移、旋转和轴对称（直线反射）这些特殊运动的合成。其实，运动概念已经不是通常所说的位移了，而为直线反射不能通过位移来实现。

通过一系列正交变换性质的讨论，将会明确正交变换和运动的关系。

正交变换保持距离和角度不变。因此，它必然把直角坐标系变成直角坐标系，而且经过正交变换后，任意一点的象点在新

变成的直角坐标系中的坐标，等于原象点在原来的坐标系中的坐标。利用这个重要的事实并借助于坐标变换公式，可得到正交变换的坐标表示，我们正是利用这个坐标表示得到任意正交变换皆可表示为平移、旋转，有时还要加上一个直线反射的积这一基本事实。从而，得到正交变换就是运动这个结论。

我们在本章里主要是用解析法讨论正交变换，但是也可以用综合法讨论，在处理一些具体问题的时候，往往用综合法很简便。例如，在证明任意一个坐标变换都是一系列直线反射的积这一事实时，综合法就显得特别简单。因此，不必拘泥于一种方法，方法的选择要以处理问题方便为准则。解析法也有好处，那就是他便于推广到高维空间上去。

所谓欧氏（正交）几何，就是正交变换群下的几何。因此，欧氏（正交）几何所讨论的是那些在正交变换下不变的性质和不变的量。

平移、旋转和直线反射在解决初等几何的作图问题方面是很有用的，读者可通过例题和习题去掌握它们。

4 相似变换和相似几何

如果说正交变换只是反映了物体的位移，那么相似变换则反映了物体的最简单的形变，它使图形成比例地扩大或缩小。

相似变换不再保持两点间的距离不变，相似变换的特征是对应线段的比是定值。由此可见，正交变换是相似变换的特殊情形，它是相似比为 1 的相似变换。

平面（或空间）的所有相似变换的集合构成一个群，即平面（或空间）的相似变换群，正交变换群则是它的一个子群。

相似变换群所属的几何就是欧氏（相似）几何，它和欧氏（正交）几何的差别在于欧氏（相似）几何中不讨论长度理论和面积理论。

位似变换是相似变换的一个特例，这是一种常见的重要变换。实际上，任意一个相似变换都可表示为一个位似变换和一

个运动的积，利用这个相似变换的分解，很容易得到相似变换的坐标表示。

利用相似变换，特别是位似变换，解决初等几何中的一些问题是很方便的，关于这方面请参看例题和习题。

5　仿射变换和仿射几何

正交变换和相似变换有两个共同的特点，即它们都把共线的三点变成共线的三点，并且保持简单比不变，把这两个特点抽象出来，便得到平面（或空间）上的仿射变换的概念．线段的简单比是仿射变换的基本不变量．

仿射变换和正交变换、相似变换一样，把直线变成直线，保持直线间的平行性．但是仿射变换要改变两直线间的夹角．一个直角坐标系经过仿射变换后，一般地不再是直角坐标系了．因此，直角坐标系在研究仿射变换时，并没有什么特殊的好处．于是，我们引进仿射坐标系．这时，和正交变换类似，仿射变换把仿射坐标系变成仿射坐标系，并且任意一点在原坐标系的坐标和它的象点在新坐标系的坐标相同．因此，仿射变换由它对仿射坐标系的作用所完全决定．因为仿射坐标系由原点和各坐标轴上的单位点所决定，则一个平面的仿射变换由不共线的三点和它们的对应点所完全决定。

借助于仿射变换对于仿射坐标系的作用，得到仿射变换的坐标表示。

平面（或空间）仿射变换的全体形成一个变换群，即平面（或空间）的仿射变换群。相似变换群和正交变换群是它的子群．它还有一些重要的子群，如保持原点不动的中心仿射变换群，保持面积不变的等积仿射变换群等等。仿射变换群的所属几何就是仿射几何。

在仿射变换中，还有一类特殊的变换，即向着直线的压缩．它是一种常见的仿射变换，它的作用有点象相似变换中的位似。

我们在定义仿射变换时，采用的是纯几何的方式，直到研究了仿射变换简单性质以后，才导出了仿射变换的坐标表示。正交变换和相似变换也是这样处理的。其实，我们也可以从仿射变换的坐标表示出发，定义仿射变换，即仿射变换是由公式

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases}$$

定义的变换。其中$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$。利用这个公式容易证明仿射变换把直线变成直线，且保持线段的简单比不变。因此，这样定义的变换就是以前用几何方式定义的仿射变换。用纯代数方式定义的仿射变换，讨论问题简捷方便。当然，它不如用纯几何方式定义直观。

6. 仿射空间

这一部分内容是补充性质的，主要的是介绍仿射空间，目的是使读者进一步地理解仿射变换。

首先给定一个n维向量空间V^n，设A^n是一个集合，它的元素叫做点，用P、Q、R……表示，如果A^n满足下列四条公理，它就叫做n维仿射空间。

（1）A^n中的任意一对点(P,Q)对应V^n中的一个向量，这个向量叫做$\overrightarrow{PQ}$。

（2）A^n中的每个点P和V^n中的每个向量$\vec{v}$对应A^n的一个点Q，使得$\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$。

（3）$\overrightarrow{PQ} = \vec{0}$当且仅当$P = Q$。

（4）如果P、Q、R是A^n的任意三点，则

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

当$n=2$时，设V^2是欧氏平面上所有向量构成的线性空间，而A^2是平面上的所有点的集合，令A^2的两点P、Q对应V^2的以P为始点Q为终点的向量$\overrightarrow{PQ}$，而对$P \in A^2$，$\vec{v} \in V^2$，对应的点Q，满足$\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$，容易验证$A^n$满足上面四条公理，因此它是2维仿射空间，即仿射平面。这里，我们是借助于通常

的欧氏平面构成了一个仿射平面，但实际上并没有牵扯到度量。

由这些公理可直接得到下列事实：

（1） $\overrightarrow{PQ}$ 由 P 和 Q 所唯一确定。

事实上，假定 $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}$ 和 $\vec{\omega}=\overrightarrow{PQ}$ 由公理（4）和（3）得 $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QP}=\vec{v}+\vec{\omega}=\overrightarrow{PP}=\vec{0}$。因此，$\overrightarrow{QP}=-\vec{v}$，但是，$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QP}=\vec{\omega}+(-\vec{v})=\vec{0}$，故 $\vec{\omega}=\vec{u}$，

由此也得到 $\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{QP}$。

（2） $P\in A^n$ 和 $\vec{u}\in V^n$ 唯一决定 $Q\in A^n$，使得 $\overrightarrow{PQ}=\vec{u}$。

事实上，假定 $\overrightarrow{PQ}=\vec{u}$，由公理（4），$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$，$\vec{u}+\overrightarrow{QR}=\vec{u}$，于是，$\overrightarrow{QR}=\vec{0}$，最后由公理（3），$Q=R$。

现在我们引进仿射坐标。

在 A^2 中任选一点 O，称它为原点。对于任意一点 P，设 $\overrightarrow{OP}=\vec{v}$，选定 V^n 的一个基底 $\{\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}\}$，如果 $\vec{v}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$，则称 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为 P 的坐标。特别是，原点 O 的坐标是 $(o,\cdots,o)$，$\vec{v}$ 叫做 P 的位置向量。显然 A^n 的每个点恰有一个位置向量，而 V^n 的每个向量恰为一个点的位置向量。这样，A^n 的点和 V^n 的向量是一一对应的。

我们把〔$0;\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$〕叫做 A^n 的一个仿射坐标系。这是我们以前讲过的平面仿射坐标系的推广。

在仿射空间中可定义 m 维线性簇的概念，它是直线和平面概念的推广。设 S^n 是 V^n 的一个 m 维子空间，对于 A^n 的任意固定点 P，于集

$$\alpha^m=\{Q\in A^n:\overrightarrow{PQ}\in S^m\}$$

叫做 A^n 的从 P 点由 S^m 确定的 m 维线性簇。$m=2$ 时，α^2 叫做平面。$m=1$ 时，α^1 叫做直线。显然 $m=0$ 时，α^0 是一个点。可以证明，一个线性簇 α^m 由唯一的一个 S^m 所确定；由同一子空间确定的不同的线性簇没有公共点，因此叫做平行的。

下面定义仿射变换。

A^n到自身的一个变换σ，如果对于任意点$P=(x_1,\cdots,x_n)$，与它的象$\sigma(P)=P'=(x_1',\cdots,x_n')$之间的关系由公式

$$x_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+a_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

确定。其中(a_{ij})为$n\times n$非异矩阵。

容易验证．A^n的所有仿射变换的集合构成一个群，即仿射变换群．

可以在仿射空间里讨论在解析几何中那些和度量无关的几何问题，如线段，简单比，平行性，等等．我们把在仿射变换下保持不变的几何性质叫做仿射性质．所谓仿射几何就是研究仿射性质的几何．可以证明线段的简单比是仿射性质．关于这些就不详细讨论了．

最后，顺便提一提，如果在线性空间V^n中给定一个内积，那么这时仿射空间A^n便成为欧氏空间。这样，就可以把通常的欧氏平面（或空间）推广到一般的n维欧氏空间。

三　本章小结

1　正交变换

平移公式

$$\begin{cases}x'=x+a,\\y'=y+b,\end{cases}$$

旋转公式

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha\\y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{cases}$$

一般公式

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+a_1\\y'=a_{21}x+a_{22}y+a_2\end{cases}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵。

2　相似变换

位似变换公式

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

一般相似变换公式

$$\begin{cases} x' = k(a_{11}x + a_{12}y) + a_1 \\ y' = k(a_{21}x + a_{22}y) + a_2 \end{cases}$$

其中

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵。

3　仿射变换

中心仿射变换公式

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

其中。　$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$。

压缩公式

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

一般仿射变换公式

$$\begin{cases} x' \quad a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases}$$

其中，$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$。如果 $\Delta = 1$，则称为等积仿射变换。

从以上这些公式可以看出，仿射变换的公式是最一般的。它是线性的，除了$\Delta \neq 0$以外，不加任何要求，如果它的系数阵是正交矩阵，那么它是正交变换；如果系数阵是一个常数K和正交矩阵的积，那么它是相似变换。

第五章　射影变换群与射影几何学习指导

一　重点和要求

本章是学习这一编“几何学与变换群”的重点部分．它以克莱因的群论原则为指导，讨论二维空间（即平面）里的射影几何，介绍射影变换群及其对应的射影几何的基本理论和方法．

学习本章时，要抓住以下四个重点：

1．拓广平面的必要性和方法，对偶原理和齐次坐标．

2　二维射影几何（即平面上的射影几何）的基本理论和方法．

3　射影变换的代数表示．

4　用群的观点说明欧氏几何，仿射几何和射影几何的区别与联系．

第一个重点，首先搞清改造欧氏平面的必要性以及射影平面（或直线）与欧氏平面（或直线）的区别与联系．其次要了解为什么和怎样引进齐次坐标，怎样用齐次坐标表示“共点”、“共线”等基本关系，以及点坐标和直线坐标的关系．最后要了解对偶原理的内容和作用，因为射影几何里几乎到处都使用对偶原理，熟悉了它就会收到事半功倍的效果．

第二个重点，首先要抓住点列（和线束）的交比这一基本概念及交比的性质和它的应用；最后在交比的基础上熟悉完全

四点形和完全四线形的调和性质和应用。其次要了解一维基本形的射影对应和透视对应以及它们的相互关系，从而进一步掌握一维基本形中重要的（有公共底）一维射影变换及其性质；最后要掌握平面上的射影变换及其性质，还要重点地掌握透视变换，因为在射影变换中经常需要利用它来作图。

第三个重点是在射影几何里引进了在射影不变量——交比基础上的坐标系。目的是用强有力的代数工具来研究几何图形的性质，使形与数更好地结合。在这里要注意齐次坐标、非齐次坐标的区别与联系，以及各种代数表达式的几何意义。

第四个重点，首先要掌握所有的射影变换构成群——射影变换群。其次了解射影变换群与其子群——仿射变换群、正交变换群的相互联系和区别（其中尤其要掌握它们的主要不变性质和不变量）。

二 内容分析

1 射影平面的结构、齐次坐标

（1）关于射影平面

为了建立射影对应，改造欧几里得平面是十分必要的。因为我们要研究射影几何，就需要使用中心射影法。但根据欧氏平面上的中心射影法，点与它的射影之间不能一一对应，为了克服这一缺陷，我们对欧氏空间进行改造。而这种改造就是在每条直线上添加一个无穷远点（或称非固有点）构成射影直线，把欧氏平面里每条直线都添加一个无穷远点，这些无穷远点就构成一条无穷远直线，因此在欧几里得平面上添加一条无穷远直线（或称非固有直线），就构成射影平面。

需要注意，有穷元素（点或直线）和无穷远元素在射影几何里处于同样的地位。因为对于中心射影法，有穷元素可以变为无穷远元素（如图5.1中，直线a上A点变为直线a'上的

P'_∞点），而无穷远元素也可以变为有穷元素（如图 5.1 中直线 a 上 P_∞点变为直线 a' 上 A'_∞点）。

其次需要注意射影直线与欧氏直线的不同之处。形式上看射影直线和欧氏直线只差一个无穷远点，其实不仅形式不同，直线的性质也发生了变化。在欧氏直线上添加一个无穷远点构成射影直线，而射影直线是封闭的（如图 5.2）。因为对射影直线来说，一个点不能把它分为两部分，而对欧氏直线，一个点能把它分为两部分。

由于射影直线是封闭的，所以对于它上面的三个点就不能确定哪一个点在另两个之间。在射影直线上为了表示点的顺序关系，不得不引入新的概念——分隔点对来表示。当然线束里直线对的顺序关系也需要用分隔的概念来表示。

关于射影平面上的顺序关系，主要是划分区域的概念与欧氏平面也不同。我们知道一条直线把欧氏平面分为两个区域，两条直线把欧氏平面分为四个区域，三条不交于同一点也不平行的直线把欧氏平面分为七个区域；而在射影平面上，由于射影平面的封闭性，一条射影直线并不能把一个射影平面分开，两条射影直线只能把射影平面分为两个区域，三条不交于同一点的射影直线只能把射影平面分为四个区域。

尽管射影平面与欧氏平而不同，而我们所要讨论的射影几何也是在射影平面上进行的，但是我们仍然没有脱离欧氏几何的范畴，因为下面采用的齐次坐标、交比等等仍然利用了度量的性质，这就是开头我们提到的，在欧氏几何基础上来研究射影性质的原因。

为了对射影平面有个直观的认识，我们在这里根据射影平面的性质，作出射影平面的两种模型。当然射影平面还有各种不同的模型，只要掌握其中一种即可。

（2）齐次坐标

（i）由于点和直线概念的推广，引进无穷远点和无穷远

直线，为把无穷远点和无穷远直线也同普通点和直线一样用坐标表示出来，引进齐次坐标。

点的齐次坐标是用不全为零的有序数组，(x_1,x_2,x_3) 来表示，一个点的齐次坐标可以有无穷多种表示形式。至于齐次方程和非齐次方程之间的转换，只要用第三个坐标分别去除前两个坐标就行了。但应该注意的是，无穷远点和直线没有非齐次坐标和方程。

（ii）在射影几何里，为了充分利用对偶原理及简化论述过程，常常同时使用点坐标和线坐标。

一点 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,a_3)$ 的线坐标方程为

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0$$

而以流动坐标 u_1,u_2,u_3 为线坐标的一次方程

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0$$

表示一个点，其点坐标为 (a_1,a_2,a_3)。

（3）对偶原理

对偶原理在射影几何里占有重要地位，因为根据它可使射影几何的研究收到事半功倍的效果。例如研究了点几何的一些内容，根据对偶原理就可以直接掌握与它对偶的线几何的内容。

在使用对偶原理的时候，首先必须了解对偶的元素以及由它们所构成的对偶图形。如在平面上，点的对偶元素是直线（直线的对偶元素是点）；而在空间里，点的对偶元素却是平面，直线的对偶元素是直线。只有是对偶的两个概念才能使用对偶原理。当然，在掌握对偶原理内容的基础上，更应侧重于能熟练地使用它。对于任何一个射影几何的命题，要能正确地叙述出它的对偶命题，对于任意图形，要能正确地表达并绘出它的对偶图形。

由于引进了点坐标和直线坐标，直线在点坐标下有方程，点在直线坐标下也有方程，它们有对偶关系，只要研究一种坐

标（如点坐标）就可以了。

（4）复射影平面

在这里引进复元素，目的是把射影平面拓广为复射影平面。在复射影平面上，不仅消除了有穷和无穷元素的差别（引入齐次坐标），而且也消除了虚与实的差别。

运用非齐次坐标时，坐标为虚数，元素就是虚的。而运用齐次坐标时，当坐标为虚数时仍可表示实的几何元素；主要的不是看这些坐标是虚或实，而是由它的比值来决定。

2 点列、线束的交比和调和比

（1）点列和线束的交比

由于三个点的简单比只是仿射变换的不变量，不是射影变换的不变量。要定义射影变换就需引进新的概念——四点的交比。因为它是两个简单比的比，因此交比又叫做复比。交比是射影变换的基本不变量，在整个射影变换中，几乎处处都要用到它，因此这一概念非常重要。

交比值与四点的排列顺序有关。四个点的排列顺序有24种，但其中只有 6 种不同的值，其它值都与这 6 种之一相同。为了弄清24种交比中哪 4 个是相等以及深入掌握交比这一概念，必须着重掌握交比的四个重要性质，即：

（i）基础点对与分点对交换，交比值不变；

（ii）基础点对的两个字母，或分点对的两个字母交换，交比值为原来的倒数；

（iii）同时变换两个点对的字母，交比值不变；

（iv）变换中间的两个字母，或两端的两个字母，交比值等于 1 减去原有交比值。

还有一些特殊的交比值，如：

$(AB,CA)=\infty$　　　　$(AB,CB)=0$

$(AB,CC)=1$

特别是：

$(ABCD_{\infty}) = (ABC)$，$(ABC\ D) = (BAD)$

$(AB_{\infty}CD) = (CDA)$，$(A\ BCD) = (DCB)$

这些交比值对于灵活处理一些有关问题常常用到，都应该熟悉。

另外，利用交比可以确定直线上点的位置。如确定点列上的四个点是否分隔，常由它们的交比值来确定。

关于线束中四直线的交比定义、性质都与四点的交比完全类似，只要根据对偶关系，很容易推出。

（2）完全四点形与完全四线形的调和性

在射影变换中，除了交比这一概念外，完全四点形与它的对偶图形完全四线形的概念也是最重要的概念，它在射影几何中也占有重要地位。特别是完全四点形和完全四线形与调和性质有关，而调和性质是射影变换中一种重要不变量。

为此，首先要弄清楚完全四点形和完全四线形的定义以及它们的对偶关系。

其次，完全四点形调和性的定理非常重要，因为根据这一调和性质可以给出求已知三点的第四调和点的方法。而在实际应用中，用到更多的是它的两个推论。由此可得：一直线 AZ 上的点对A，B与 P，Z为调和共轭的充要条件是 A，B 是一个完全四点形的一对对顶点，P 与 Z 是通过第三对顶点的两条对边与直线 AZ 的交点（如图5.27）。

关于完全四线形的定义及调和性，都是完全四点形的对偶，根据对偶原理就可以推出。读者应注意它们叙述形式的对偶性，从中逐渐看出对偶原理的作用。

3　平面上的射影变换

（1）一维基本形间的射影对应定义有以下几种：

（i）斯丹纳定义：如果两个一维基本形的元素之间成一一对应，并且任意四对对应元素的交比都相等，则这种对应叫做一维基本形间的射影对应。

（ii）彭斯莱定义：两个一维基本形〔π〕与〔π'〕间的对应元素，可以用n个一维基本形〔π_1〕，…，〔π_n〕透视链连接，即〔π〕$\overline{\wedge}$〔π_1〕$\overline{\overline{\wedge}}$…$\wedge$〔$\pi_n$〕，则这两个一维基本形成射影对应。

（iii）斯陶特定义：两个一维基本形作成的一一对应，如果其中一个图形的每四个调和元素，对应第二个图形的四个调和元素，这样的对应叫做斯陶特射影对应。

这三种定义的作用实际上是相同的，因为它们都是等价的，也就是用任何一个都可以推证出其它两个。所以在射影几何里，我们采用哪个定义都可以。

从上述三种关于射影对应的定义来看，显然证明斯陶特的定义中要求的内容比斯丹纳的定义较少，因此斯陶特的定义是放宽要求的。另外斯陶特定义具有更多的几何性质，因为它从调和元素出发，可以不用交比（即与度量无关）而用完全四点形。

（2）一维基本形成射影对应及成透视对应的判别条件：

（i）两个一维基本形成射影对应的条件：由三对对应元素完全确定。

有了这个定理，使我们在研究一维基本形之间的对应关系时，只要研究它的三对对应元素就可以了。

（ii）两个射影的一维基本形成透视对应的条件：它们的公共元素自对应。

（iii）射影对应与透视对应的相互关系：两个一维基本形的射影对应，由两次透视对应合成。

（3）有公共底的一维基本形的射影变换：

由于一维基本形的射影变换除了保留结合关系和交比不变外，还保留了顺序关系，因此学习有公共底的一维基本形射影变换之前必须明确以下几点：

（i）射影对应是有序对应；

（ii）射影对应的方向是同向或反向；

（iii）直线上的点是连续的。

在有公共底的两个不同点列的射影对应中，二重点有重要的作用。由于实二重点不多于两个，因此实二重点可能有两个、一个或不存在；根据二重点的个数可以把射影对应分为双曲型，抛物型或椭圆型三种。

在有公共底的同向点列的射影对应中有双曲型、抛物型或椭圆型三种，而反向点列的射影对应都是双曲型的（即反向点列一定有两个二重点）。

根据对偶原理，线束也有同样的结论。

（4）平面上的射影变换

仿照一维基本形射影变换的定义就可以得到平面上的射影变换。

透视变换是一种特殊的射影变换——对应点连线过定点（透视中心）。在射影变换的作图中，经常使用的是透视轴和透视中心。

决定平面上射影变换的条件：由每三点不共线的四对对应点唯一决定。

4 射影变换群的几何——射影几何及其子群的几何。

本节主要目的是：（i）在前几节基础上对射影几何作一小结；（ii）以克莱因的群论原则为工具，把几何学加以分类并把它们统一起来，从而更好地了解几种变换群的从属关系，由于仿射变换群、正交变换群都是射影变换群的子群，因此最重要的是首先要掌握好射影变换群。

（1）首先从射影变换的公式说明所有射影变换构成群（可作积，有逆）。

由于我们熟悉欧氏几何，因而在这里使用欧氏平面的一些性质（度量性，平行性），导出射影几何的某些性质，然后经过验证肯定它们是射影性质，这样学起来便于接受。当然也可

以用纯射影方法（如用公理法）来建立纯射影几何。

（2）几种几何的相互关系：

（i）从所属关系上看：

射影群⊃仿射群⊃相似群⊃正交群。

（ii）从内容上看：

射影几何⊂仿射几何⊂欧氏（相似）几何⊂欧氏（正交）几何。

（iii）为了更清楚地比较四种几何，见讲义中的比较表即可。其中最主要的是搞清四种几何的基本不变量。

三 本章小结

本章主要介绍由射影变换所构成的射影变换群和它所对应的射影几何；介绍了它们的基本性质和应用；并在前一章和本章的基础上，以克莱因的群论原则为指导给出了射影变换，仿射变换、相似变换、正交变换的相互关系（从所属范围和内容两个方面），用变换群的观点统一了它们所对应的四种几何。

主要内容概括为：

1 射影平面的结构：

（1）无穷远元素的引入

（2）元素的结合关系和顺序关系

（3）齐次坐标（点坐标和线坐标）

（4）复射影平面：引入复元素

（5）对偶原则：对偶图形（如点列和线束）、对偶命题（如笛沙格定理）和对偶原理——二对偶命题有一个成立另一个必成立。

2 点列和线束的交比和调和比。

（1）定义：点列上四个点 A、B、C、D 的简单比之比，即 $(AB,\ CD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}$。

（2）交比的性质：

（i）基础点对与分点对交换，交比值不变。即$(AB,CD)=(CD,AB)$

（ii）基础点对的两个字母或分点对的两个字母交换，交比值为原来的倒数。即 $(AB,DC)=\frac{1}{(AB,CD)}$

（iii）同时交换点对的两个字母，交比值不变。即$(BA,DC)=(DC,BA)=(AB,CD)$

（iv）交换中间或两端的两个字母，交比值等于1减原交比值。即$(AC,BD)=1-(AB,CD)$

（3）交比的特殊值——调和比

当$(AB,CD)=-1$时，称A、B、C、D调和共轭。

（4）完全四点形与完全四线形的调和性质：

（i）在完全四点形的对边三点形里，每条边上有一组调和共轭点；其中两个点是对边点，另两个点是这条边与通过第三个对边点上一对对边的交点。

（ii）在完全四点形的每条边上，有一组调和共轭点，其中两个点是顶点，另一对点对里，一个是对边点，另一个点是这个边与对边三点形的边的交点。

3　一维基本形的射影对应

（1）定义：一维基本形中任意四对对应元素的交比都相等的一一对应，叫数射影对应。

（2）判别条件：

（i）用坐标来判别：$\lambda'=\frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$　$(\alpha\delta-\beta\gamma\neq0)$。

（ii）用交比判别：保持任意一个交比μ不变。

（3）决定射影变换的条件及分类：

（i）决定条件：由三对对应元素完全确定。

(ii) 分类：$\begin{cases} \text{1）双曲型—有两个二重点；} \\ \text{2）抛物型—有一个二重点；} \\ \text{3）椭圆型—没有二重点。} \end{cases}$

（4）射影变换的特例——透视变换

（i）定义：对应点连线过同一点的射影变换。

（ii）决定条件：公共元素自对应。

4　代数表示：

（1）点列交比的代数表示：

$$(AB,CD)=\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_4)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_1)}$$

（2）线束交比的代数表示：

$$(l_1l_2、l_3l_4)=\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_1)}$$

（3）一维射影对应的代数表示：

非齐次坐标　$x'=\frac{a_{11}x+a_{12}}{a_{21}x+a_{22}}$，

齐次坐标$\begin{cases} \rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{cases}$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$

（4）二维射影对应的代数表示：

$$\begin{cases} \rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ \rho x_3'=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{cases} \quad |a_{ij}|\neq 0$$

5．四种几何的相互关系：

（1）从所属关系上：

射影群⊃仿射群⊃相似群⊃正交群

（2）从内容上：

射影几何⊂仿射几何⊂欧氏（相似）几何⊂欧氏（正交）几何

（3）四种几何的主要区别见本章的比较表即可。

第六章　二次曲线的射影、仿射、度量性质学习指导

一　重点和要求

本章主要是在前两章的基础上用统一的射影观点和方法，研究二次曲线的射影、仿射和度量性质，认识它们之间的联系和区别．因此本章是第四、五章理论的应用．

学习本章时要抓住以下三点：

1．二次曲线的射影性质；

2．二次曲线的仿射性质；

3．二次曲线的度量性质．

第一点，学习二次曲线的射影性质时，首先要明确二阶曲线和二阶曲线的定义以及它们之间的相互关系（通过马克劳林定理给出）．其次，要了解基本定理的意义和作用，即二阶曲线上任意二点都可作为线束的中心；了解巴斯加定理和布利安桑定理的内容及其作用；以便应用它解决二次曲线的作图问题．还要对于二次曲线的极点、极线了解它们的相互关系及作用．最后，要明确二次曲线的射影分类．

第二点，学习二次曲线的仿射性质时，首先要搞清它与射影性质的主要区别．其次，要了解在仿射几何里二次曲线的中心、直径、渐近线等的定义与在欧氏几何里的定义之间的关系．最后，要掌握二次曲线仿射分类的根据以及它与射影分类的区别．

第三点，学习二次曲线的度量性质时，首先要明确如何用

射影观点解释和研究二次曲线的度量性质．其次，要了解圆点的定义和性质以及如何利用它来定义欧氏几何里的角度．最后，要明确各种二次曲线的焦点、准线的定义与极点、极线的关系．

二 内容分析

1 二次曲线的射影质

（1）这里首先叙述如何由两个一级射影线束构成二阶曲线和用两个一次射影点列构成二级曲线，即二阶曲线和二级曲线的定义．

二阶曲线是由点构成的图形，而二级曲线是由直线构成的图形．这里需要注意，当两个一级线束是非透视的射影线束时，它们构成常态的二阶曲线；当两个线束不仅是射影的而且是透视的一级线束时，它们构成变态的，即分解的二阶曲线．

同理，根据对偶原理，由两个非透视的一次射影点列可构成常态的二级曲线；由两个透视的一次射影点列可构成变态的二级曲线．

关于叙述的方法，我们在这里都采用对偶的形式，分写在两侧．容易看出，这种叙述方法是方便的．有了左侧的叙述之后，将左侧的词句加以适当的改变就得到右侧的叙述．从这里我们可以看出对偶原理的作用．因此，一般说来，对偶的两个定理只证一个，另一个必成立．

（2）性质

（i）二阶曲线与直线至多有两个交点．

证明这个性质要从两个方面进行．首先证明直线 s 上两个一次射影点列的二重点 X 是二阶曲线的点，其次二次点列与直线 s 的交点 X 也是 s 上两个一次射影点列的二重点，即证明充要条件．

（ii）构成二阶曲线的一级射影线束中心也是二阶曲线的点，而且在这两点有切线存在。

不难看出，这里所说的切线，与数学分析中曲线的切线有同样意义，即曲线的切线是割线的极限位置。

关于二级曲线的性质，根据对偶原理同样可以得出。

（3）二阶曲线基本定理（定理6·1）的意义和作用。

用两个一级射影线束可以构成一个二阶曲线，并且两个线束的中心也属于该二阶曲线。乍一看来，线束中心好像和二阶曲线的其它点有不同的地位，其实没有什么不同，基本定理就证明了这一点。

基本定理证明的关键是要注意三个点X、X'和O在一条直线上，即后面提到的巴斯加线。知道了这个问题，证明就不难理解了。

有了基本定理，我们就可以说二阶曲线上任意二点都可作为线束的中心。

定理6·2给出了确定一条常态的二阶曲线的充要条件：即无四点共线的任意五点。这个结论经常使用。

由基本定理我们得知，二阶曲线上的每个点都可以看作线束的中心，而每个中心都有二阶曲线的一条切线，因此过二阶曲线上每一点都有二阶曲线的一条切线。

这里还要注意包络线束的定义，由此我们看出二阶曲线上的点与包络线束的关系。

（4）巴斯加定理与布利安桑定理。

这两个定理在画法几何和制图学里占有一定的地位，它反映了射影几何的实际意义。关于巴斯加定理的结论，由于在基本定理证明中已证得点X、X'、O确实在一条直线上，而布利安桑定理是巴斯加定理的对偶形式，当然不用另证。

注意：巴斯加定理和它的逆定理都成立。而且二阶曲线内

接六角形的顶点排列顺序可以是任意的。由于六个点在二阶曲线里不同的排列顺序一共60种，因此可以得到60个不同的巴斯加六角形，有60条巴斯加线。

关于巴斯加定理（或布利安桑定理）的推论，这些只不过是巴斯加六角形的两个顶点重合而变为五角形、四角形、三角形等特殊情形；只要把巴斯加六角形顶点字母的写法搞清楚，很容易把它们的内容叙述出来，当然图形也不难画出。

由于圆是二次曲线的特殊情形，因此巴斯加定理也可用于圆上（在欧氏平面上）。

对于顶点属于两条直线的六角形，它也是巴斯加定理的特殊情形，一般把它叫作巴普斯定理。这个定理也是初等几何的一个定理，当然可用初等方法证明，在这里也可用美耐劳斯定理（第四章）去证明。

巴斯加定理和布利安桑定理的主要作用是利用巴斯加线（或布利安桑点）去解决二次曲线的作图问题。

（5）二级曲线的极点与极线。

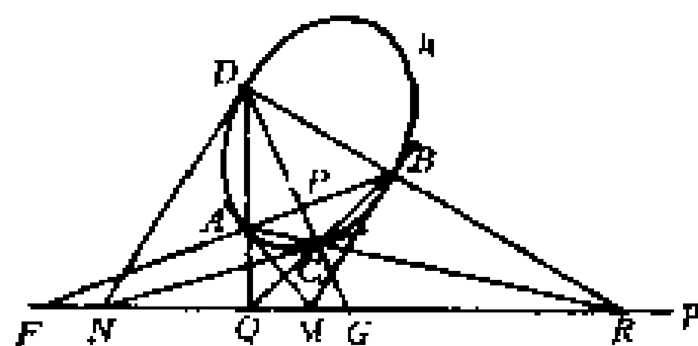


图 7.18

在极点、极线的问题中，要看到(图7.18)对不确定的P点，无论从内接四角形 $ACBD$ 来看，或者从完全四角形 $ACBD$来看，对边交点 Q、R 与对顶切线的交点 M、N 和点 A、B、P 及 D、C、P 的第四调和点 E、F 等六个点在一条直线上；同时无论取什么样的割线 AB、CD，只要它们通过P点，则上面六个点总是处在相同的直线上，也就是说对于确定的P点，直线 p 是唯一的，也是确定的。因此，虽然我们可以用不同形式来定义P点的极线，但所定义的极线是同一直线。

由此可以推出不同的点有不同的极线。因为如果 P、Q 是

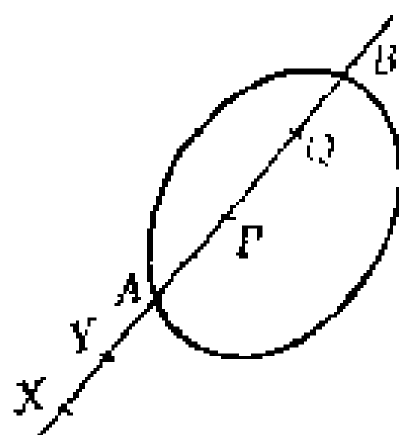


图 7.19

不同的两点（图7.19）联 PQ 与曲线交于 A，B 二点，设 X 是 ABP 的第四调和点，而 A、B、Q 的第四调和点为 Y，则 X、Y 是不同的点．但点 P 的极线应该是过 X，点 Q 的极线应该过 Y，因此它们的极线不同．

在已知直线的极点定义当中，极点的存在由实际作图来保证，即无论已知直线是什么位置，总可以找出一个点，使已知直线是这个点的极线；因此这个点是已知直线的极点，至于极点的唯一性是由极线的唯一性所决定的．

极点、极线的相对位置是：如果极点在曲线内部，则它的极线与曲线不相交；如果极点在曲线上，则极线与曲线相切，并且已知点是切点；如果极点在曲线外部，则极线与曲线相交．

（6）马克劳林定理

通过此定理明确了二阶曲线与二级曲线的相互关系：即二阶曲线是二级曲线切点的集合，反之二级曲线是二阶曲线切线的集合，因此二阶曲线与二级曲线是一致的．

（7）二次曲线的射影分类

根据二次曲线的秩和（选取自极三点形为坐标系的）二次曲线方程的标准形，将二次曲线分为：

二阶曲线
- 常态二阶曲线　秩 = 3
  - 实的：$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$
  - 虚的：$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$
- 变态二阶曲线
  - 秩 = 2
    - 二实直线：$x_1^2-x_2^2=0$
    - 二虚直线：$x_1^2+x_2^2=0$
  - 秩 = 1　二重合直线：$x_1^2=0$

2　二次曲线的仿射性质

在射影变换里，如果把无穷远直线仍变成无穷远直线，这

样的不变性质就是仿射性质，即保持无穷远直线不变的变换是仿射变换。

（1）二次曲线的中心——对于一条二次曲线T，无穷远直线的极点是它的中心.若极点是有穷远点,则二次曲线叫有心二次曲线；若中心是无穷远点，则二次曲线叫无心二次曲线。

设无穷远直线l_∞关于Γ的极点为C（图7.20），过C点作直线与二次曲线Γ交于点P_1、P_2，与无穷远直线l_∞交于点P,由极点与极线的定义　　$(CP, P_1P_2) = -1$

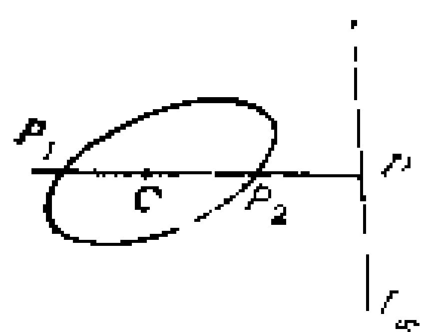


图　7.20

但是P是无穷远点，所以C是P_1P_2的中点。即通过C点的弦都以C为中点。与欧氏几何里关于中心的定义是一致的。

（2）二次曲线的直径——对于一条二次曲线Γ,无穷远点的极线是它的直径。

根据配极对应的性质，可见有心二次曲线的直径都过中心，无心二次曲线的直径互相平行。

共轭直径——彼此通过对方极点的二直径。因为每一直径平分共轭直径的所有平行弦,故它与欧氏几何里的定义也一致。

（3）渐近线——过二次曲线Γ与无穷远直线p_∞的交点T、T'的二切线是它的渐近线。

二次曲线Γ与无穷远直线p_∞的交点和中心连线就是渐近线。若交点是二实点，就有两条实渐近线，二次曲线是双曲线；若交点是二虚点，就有两条共轭虚渐近线，二次曲线是椭圆；若交点是一个实点（二重点），则无穷远直线就是渐近线，二次曲线是抛物线。

（4）二次曲线的仿射分类

在齐次仿射坐标(x_1, x_2, x_3)下，常态二次曲线的方程式为：

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

它的系数a_{ij}，所成的行列式为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

根据系数行列式D及 a_{33} 的代数余子式 A_{33} 的值把二次曲线仿射分类为：

- 常态二次曲线（$D \neq 0$）
  - 有心二次曲线（$A_{33} \neq 0$）
    - 椭圆（$A_{33} > 0$）
      - 虚椭圆 $x^2+y^2+1=0$
      - 实椭圆 $x^2+y^2-1=0$
    - 双曲线（$A_{33} < 0$） $x^2-y^2-1=0$
  - 无心二次曲线（$A_{33}=0$） 抛物线 $y^2-2x=0$

这里需要注意的是二次曲线的仿射分类与二次曲线的射影分类不同之处。在射影变换里无穷远直线与其它直线处于同等地位，而在仿射变换里无穷远直线变为自身，因此 $x^2+y^2-1=0$ 与 $x^2-y^2-1=0$ 表示不同的曲线。

3　二次曲线的度量性质

前节已讨论过把无穷远直线变为自身的不变性质是仿射性质。为了统一用射影观点解释和研究二次曲线的度量性质，我们在仿射性质的基础上，保持无穷远直线及其上的两个虚圆点还变成自身的不变性质称为度量性质。

（1）圆点与迷向直线：

有了圆点和迷向直线这两个概念，根据拉格尔定理和非迷向直线互相垂直的判别定理，就可以把欧氏几何里的角度和垂直性等度量性质用交比和调和比这样的射影性质表示出来。即有了圆点、迷向直线等概念，就把欧氏几何里的垂直性和射影几何里的调和共轭性联系起来了。故对欧氏几何的度量性质，可给予射影解释。

（2）主轴、焦点和准线

主轴只不过是互相垂直的共轭直径，焦点是过圆点所引二

次曲线切线的有穷交点(固有点),准线是焦点的极线.故对二次曲线的焦点和准线的研究必须按二次曲线的不同类型来进行.

(i)圆点的焦点是圆心(唯一).准线是无穷远直线.

(ii)有心二次曲线(除圆外),过圆点可作四条切线,所以有四个焦点(二虚二实),也有四条准线(二虚二实).

(iii)无心二次曲线(抛物线)有两条迷向切线,故只有一个焦点(在主轴上),有一条准线(过迷向切线的切点).

三 本章小结

本章讨论二次曲线的射影性质、仿射性质和度量性质.通过这些几何性质的讨论,对二次曲线在各种几何里的性质将有更深刻的认识,从而对二次曲线进行射影分类、仿射分类和度量分类(关于度量分类、即是解释几何中关于二次曲线的分类,共九种).

1 二次曲线的射影性质

(1)射影定义:射影线束对应直线交点的集合.

(2)基本定理:以二次曲线上任意二点为中心构成的二线束成射影对应.

(3)巴斯加定理:二次曲线内接六角形的三对边交点共线.

布利安桑定理:二级曲线外切六边形的三对顶点连线共点

(4)极点、极线的定义:一点P关于二次曲线的共轭点的轨迹叫极线,P点叫极点.

性质:

(i)若P点的极线过点Q,则Q点的极线必过点P.

(ii)二次曲线上P点的极线是二次曲线过该点的切线.

(5)二阶曲线、二级曲线的定义:

马克劳林定理:二次曲线即是常态二阶曲线切线的集合,

也是二级曲线切点的集合。

（6）射影分类：

二阶曲线
- 常态二阶曲线　秩 = 3
  - 实的：$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$
  - 虚的：$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$
- 变态二阶曲线
  - 秩 = 2
    - 二实直线：$x_1^2-x_2^2=0$
    - 二虚直线：$x_1^2+x_2^2=0$
  - 秩 = 1　二重合直线：$x_1^2=0$

2　二次曲线的仿射性质（以无穷远直线为特征）

（1）中心：二次曲线的无穷远直线所对应的极点。

（2）直径：二次曲线的无穷远点所对应的极线。

（3）渐近线：无穷远直线和二次曲线的交点同中心的连线。

（4）仿射分类：

常态二次曲线 $(D\neq 0)$
- 有心二次曲线 $(A_{33}\neq 0)$
  - 椭圆 $(A_{33}>0)$
    - 虚椭圆：$x^2+y^2+1=0$
    - 实椭圆：$x^2+y^2-1=0$
  - 双曲线 $(A_{33}<0)$　$x^2-y^2-1=0$
- 无心二次曲线 $(A_{33}=0)$　抛物线　$y^2-2x=0$

3　二次曲线的度量性质

（1）圆点与迷向直线

（i）圆点：圆与无穷远直线的交点。

（ii）迷向直线：平面上任一点与圆点（无穷远点）连接的二直线。

（iii）垂直的判别条件：二非迷向直线被通过它们交点的二迷向直线调和分隔。

（2）主轴、焦点和准线：

（i）圆：焦点一个、准线一条；

（ii）有心二次曲线（除圆外）：焦点四个、准线四条；

（iii）无心二次曲线：焦点一个、准线一条。

第三部分　高等几何习题解答

第一章　几何学的公理方法概述习题解答

1．解　见第一章§1．

2．解　见第一章§2．

3．解　概括地说，公理法的结构如下：

（1）原始概念的列举；

（2）定义的叙述；

（3）公理的叙述；

（4）定理的叙述和证明．

4．解　见第一章§1．

5．解　见第一章§1．

6．解　建议读者根据第一章§2提出的公理法的结构和原理自行分析中学教材，得出自己的看法．

第二章　几何学中的逻辑原则和方法习题解答

§ 1——§ 2

1．解　（1）正方形是属概念，正多边形是种概念．

（2）等式是种概念，方程是属概念．

（3）整数是属概念，有理数是种概念．

（4）弦是种概念，直径是属概念．

2．解　平行四边形、四边形、多边形都是菱形这个概念的种概念，其中平行四边形是最邻近的种概念．

3．解　（1）最邻近的种是“弦”，属差是“通过圆心”．

（2）最邻近的种是“线段”，属差是“两端点在圆周上”．

（3）最邻近的种是“直线上的点的集合”，属差是“介于两点之间”．

（4）最邻近的种是“梯形”，属差是“有一个内角是直角”．

4．解（1）一动点到两定点的距离之和等于定长的点的轨迹叫作椭圆．

（2）一动点到一定点与到一定直线的距离之比小于1的点的轨迹叫作椭圆．

（3）坐标满足方程 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ $(a>0,b>0)$ 的点的集合叫作椭圆．

5．解（1）不正确．这种定义违反定义规则1．即定

义概念的外延宽于被定义概念的外延。例如筝形的对角线互相垂直。

（2）正确。理由是：由对角线互相垂直且平分的条件可以得到这个四边形的四条边都是相等的。故可知这个四边形是一个四边都相等的平行四边形即菱形。

（3）不正确。这种定义违反了定义规则1，即定义概念的外延窄于被定义的概念的外延，把那种对角线互相垂直但不相等的平行四边形排除在菱形的范围之外，而这种平行四边形的四条边是相等的（即属于菱形范围之内）。

（4）不正确。这种定义违反了定义规则1，即定义概念的外延宽于被定义的概念的外延。

6．解　见第二章§2。

7．解　原命题：对顶角相等，　真

逆命题：相等的角是对顶角。　假

否命题：不是对顶角则不相等。　假

逆否命题：不相等的角不是对顶角。　真

8．解　若三条线段中，任何两条线段之和大于第三条线段，则它们可围成三角形。

9．解（1）在一圆中，过圆心的直线必是弦的中垂线。这不是逆定理。

（2）在一圆中，过圆心且与弦垂直的直线必平分该弦。这是原定理的逆定理。

（3）在一圆中，过圆心且平分弦的直线必垂直于该弦。这是原定理的逆定理。

10．证明（1）设H不在直线AB、BC、AC之一上。不妨设H在$\triangle ABC$的内部（H在$\triangle ABC$的外部证法相同）并设直线CH与AB交于点F，$\angle AFC=\alpha$，$\angle BFC=\alpha'$（图1）。

$\because\quad HA^2=AF^2+HF^2-2AF\cdot HF\cdot\cos\alpha$

$BC^2=BF^2+CF^2-2BF\cdot CF\cdot\cos\alpha'$

$= BF^2 + CF^2 + 2BF \cdot CF \cdot \cos\alpha$

$\therefore \quad HA^2 + BC^2 = AF^2 + HF^2 + BF^2 + CF^2 + 2(BF \cdot CF - AF \cdot HF)\cos\alpha \quad (1)$

$\because \quad HB^2 = BF^2 + HF^2 + 2BF \cdot HF \cdot \cos\alpha$

$CA^2 = AF^2 + CF^2 - 2AF \cdot CF \cdot \cos\alpha$

$\therefore \quad HB^2 + CA^2 = AF^2 + BF^2 + CF^2 + HF^2 + 2(BF \cdot HF - AF \cdot CF)\cos\alpha \quad (2)$

图 1

（1）－（2）得

$0 = 2(BF \cdot CF - AF \cdot HF)\cos\alpha - 2(BF \cdot HF - AF \cdot CF)\cos\alpha$

$0 = 2\cos\alpha(BF \cdot CF - AF \cdot HF - BF \cdot HF + AF \cdot CF)$

$= 2\cos\alpha[BF(CF - HF) + AF(CF - HF)]$

$= 2\cos\alpha(CF - HF)(BF + AF)$

$\because \quad CF - HF \neq 0, \quad BF + AF \neq 0$

$\therefore \quad \cos\alpha = 0$

$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad CH \perp AB$

同理可证 $BH \perp AC$。

$\therefore$ H为 $\triangle ABC$ 的垂心。

（2）设H与 $\triangle ABC$ 顶点 A、B、C 之一重合，不妨设H与A重合（H与B或H与C重合证法相同）。

$\because \quad HA = 0, \quad HB = AB, \quad HC = AC$

$\therefore \quad BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\therefore \quad \angle A = \frac{\pi}{2}$

这时H为 $\triangle ABC$ 两高 AB 与 AC 的交点，

$\therefore$ H为 $\triangle ABC$ 的垂心。

（3）设H在直线 AB、BC、CA 之一上，且又不与 A、

B、C 之一重合，不妨设 H 在直线 AB 上不与 A、B 重合（其它情况证明方法相同）（图 2）。连接 C、H，设 $\angle AHC$ 为 α，$\angle BHC$ 为 α'。

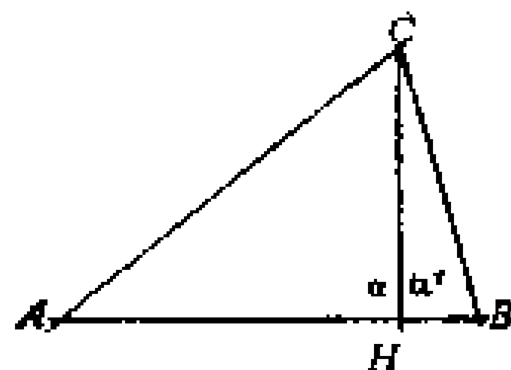


图 2

$\because\quad AC^2 = HA^2 + HC^2 - 2HA\cdot HC\cdot\cos\alpha \qquad (1)$

$BC^2 = HB^2 + HC^2 + 2HB\cdot HC\cdot\cos\alpha \qquad (2)$

（1）式两端同加 HB^2，（2）式两端同加 HA^2 然后两式相减得

$$0 = 2HA\cdot HC\cdot\cos\alpha + 2HB\cdot HC\cdot\cos\alpha = 2HC(HA+HB)\cos\alpha$$

$\because\quad HC \neq 0 \qquad HA + HB \neq 0$

$\therefore\quad \cos\alpha = 0$

$\therefore\quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

$\because\quad AB^2 + CH^2 = BC^2 + AH^2$

$\therefore\quad AB^2 = BC^2 - CH^2 + AH^2 = BH^2 + AH^2$

这是不可能的，所以 H 不能在 $\triangle ABC$ 的边及延长线上（H 在边的延长线上证法同上）。

综上所证，H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

〔注：本题的条件也是必要条件，读者试证之。〕

§ 3 —— § 6

11．解　（1）凡在所含的文字取任何数值时都成立的等式是恒等式。

这个等式中的文字取任何数值等式都成立。

这个等式是恒等式。

（2）凡最大公约数为 1 的两个数互质。

这两个数的最大公约数是 1．

这两个数互质．

（3）圆内接四边形内对角之和均为 π。

这两个角是圆内接四边形的一组内对角。

这两个角的和为 π

12．**解** 穷举法和枚举法从形式上看都是对一个要研究的事理就各种可能情况一一加以证明，但是它们有着根本的区别。

穷举法是一种间接证法，它是将否定事项的各种情况一一驳倒，从而确定原来题断成立。

枚举法是将原命题的各种情况一一证明成立后，归纳出一般性结论的真实性。

13．（1）**证明** A、B、Q 三点的位置关系有下面三种情况：1）$\overline{AQB}$；2）$\overline{AB}\,Q$；3）$B\,\overline{AQ}$。

1）设 $\overline{AQB}$．过 P 作直径 PA'、PB'（图 3），则 A'、Q、B' 共线（因 $\angle A'QP=\angle B'QP=\frac{\pi}{2}$）。

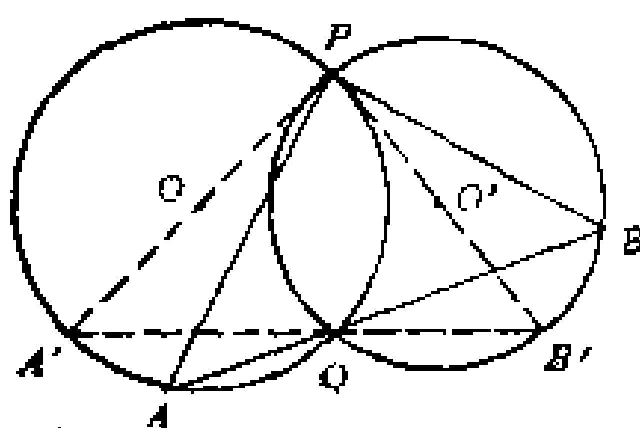


图 3

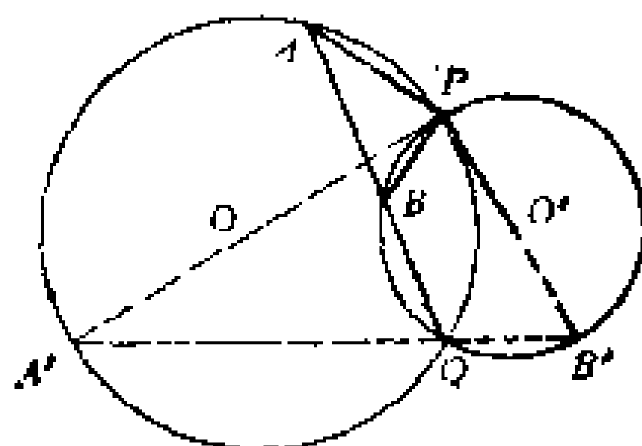


图 4

若 A 与 A' 重合，则 B 必与 B' 重合，显然原题结论成立。现在假设 AB 与 $A'B'$ 不重合。

$\because$ $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$

$\therefore$ $\angle OPO'=\pi-(\angle A'+\angle B')=\pi-(\angle A+\angle B)$

$=\angle APB$

2）设 $\overline{ABQ}$．过 P 作直径 PA'、PB'（图 4），则 A'、Q、B' 共线。

∵ $\angle A' = \angle A, \angle B' = \angle ABP$

∴ $\angle OPO' = \pi - (\angle A' + \angle B') = \pi - (\angle A + \angle ABP)$

$= \angle APB$

3）设 $B\overline{A}Q$，过 P 作直径 PA'、PB'（图 5）. 则 A'、Q、B' 共线。

∵ $\angle B' = \angle B, \angle A' = \angle BAP$

∴ $\angle OPO' = \pi - (\angle A' + \angle B') = \pi - (\angle BAP + \angle B)$

$= \angle APB$

由 1）、2）、3）可知原题结论成立。

图 5

图 6

（2）证明　由于 $\angle B$ 可分为三种情况：1）$\angle B = \frac{\pi}{2}$；2）$0 < \angle B < \frac{\pi}{2}$；3）$\frac{\pi}{2} < \angle B < \frac{2}{3}\pi$.

1）设 $\angle B = \frac{\pi}{2}$（图 6）.

∵ $\angle B = \frac{\pi}{2}$

∴ D 与 B 重合

又∵ $\angle B = 2\angle ACB$

∴ $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$

∴ $AB = BC$

∵ $BM = \frac{1}{2}BC$

∴ $BM = \frac{1}{2}AB$

2）设 $O<\angle B<\frac{\pi}{2}$，过M作 AB 的平行线交 AC 于N，连结DN（图 7）．则

$$\angle NMC=\angle B=2\angle C \quad 且\ MN=\frac{1}{2}AB$$

∵ $\angle ADC=\frac{\pi}{2}$

$AN=NC$

∴ $DN=NC$

$$\angle NDC=\angle C=\frac{1}{2}\angle NMC$$

∵ $\angle NMC=\angle NDC+\angle DNM$

∴ $\angle NDC=\angle DNM$

∴ $DM=MN=\frac{1}{2}AB$

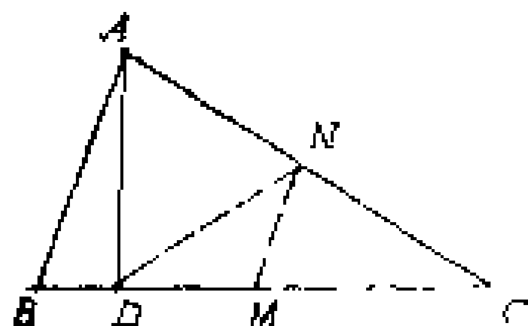


图 7

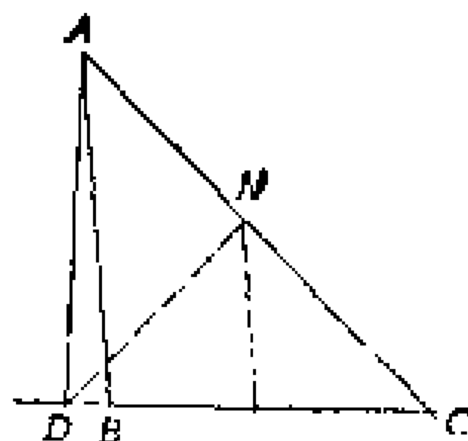


图 8

3）设$\frac{\pi}{2}<\angle B<\frac{2}{3}\pi$，过$M$作 AB 的平行线交 AC 于N，连结ND（图 8），则

$$\angle NMC=\angle ABC=2\angle C$$

且 $MN=\frac{1}{2}AB$

∵ N为 AC 的中点

∴ $DN=NC$

$$\angle NDC=\angle DCN=\frac{1}{2}\angle NMC$$

∴ $\angle NDC=\angle DNM$

∴ $DM=MN=\frac{1}{2}AB$

由上述所证，得原结论成立。

（3）**证明**　过切点且与两圆相交的两条直线有三种情况，下面就各种情况一一加以证明。

图　9

图　10

图　11

1）有一条直线与连心线重合（不伤设 AB 就是这样的直线)（图 9）．

∵　$\angle ACP = \angle BDP = \frac{\pi}{2}$

∴　$AC \parallel BD$

2）设同圆上的交点在连心线同侧．作出过切点 P 的公共切线 MN（图10）．

∵　$\angle CAB = \angle CPM = \angle DPN = \angle DBP$

∴　$AC \parallel BD$

3）设同圆上的交点在连心线的两侧，作出过切点 P 的公共切线 MN（图11）．

∵　$\angle ACP = \angle APM = \angle BPN = \angle BDP$

∴　$AC \parallel BD$

综上所述就证得了命题的成立。

14．（1）**证明**　设对角线条数为 L_n，n 为凸多边形的边且 $n \geqslant 4$．

图　12

当$n = 4$时，$L_4 = \frac{1}{2} \cdot 4(4-3) = 2$成立。

当$n = 5$时，$L_5 = \frac{1}{2} \cdot 5(5-2) = 5 = L_4 + 3$（图12）．

当 $n=6$时，$L_6=9=L_5+4$。

…… ……

当$n=k-1$时，$L_{k-1}=\frac{1}{2}(k-2)(k-5)+(k-1-2)$。

假设 $n=k$ 时成立，即

$$L_k=\frac{1}{2}k(k-3)=\frac{1}{2}(k-1)(k-4)+(k-2)$$

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}L_{k+1}&=L_k+(k+1-2)\\&=\frac{1}{2}k(k-3)+(k-1)\\&=\frac{1}{2}(k^2-3k)+(k-1)\\&=\frac{1}{2}(k^2-3k+2k-2)\\&=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-3]\end{aligned}$$

这说明$n=k+1$时也成立。所以

$$L_n=\frac{1}{2}n(n-3)$$

（2）证明　1）当内部凸多边形为三角形时，命题成立。现证如下：

已知 $P_1P_2\cdots P_n$ 为一凸 n 边形，而$\triangle P_1P'_3P_n$的顶点P'_3在n边形内部(图13)。

延长 $P_1P'_3$，设与凸 n 边形的边P_rP_{r+1}交于点P（也可以与某一顶点重合），则

$$P_1P_2+\cdots+P_rP>P_1P'_3+P'_3P$$

$$P'_3P+PP_{r+1}+\cdots+P_{n-1}P_n>P'_3P_n$$

图　13

上面两式两端分别相加得

$$P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_rP+PP_{r+1}+\cdots+P_{n-1}P_n>P_1P'_3+P'_3P_n$$

∴　n边形$P_1P_2\cdots P_n$ 的周长>$\triangle P_1P'_3P_n$ 的周长

可见1）成立。

2）若内部凸多边形边数为 k 时成立，则当内部凸多边形边数为 $k+1$ 时本命题也成立，现证明如下：

已知 $P_1P_2P'_3P'_4\cdots P'_{k+1}$ 为任意凸 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 在其内所作的任意凸 $k+1$ 边形．延长 $P_1P'_{k+1}$ 设与 n 边形的边 P_rP_{r+1} 交于 P 点，连结 $P_2P'_{k+1}$（图14）．

∵ $P_2P'_3\cdots P'_{k+1}$ 为 k 边形

∴ $P_2P_3+P_3P_4+\cdots+P_rP+PP'_{k+1}>P_2P'_3+P'_3P'_4+\cdots$
$+P'_kP'_{k+1}$

又∵ $PP_{r+1}+P_{r+1}P_{r+2}+\cdots+P_nP_1>PP'_{k+1}+P'_{k+1}P_1$

∴ $P_2P_3+\cdots+P_rP+PP_{r+1}+\cdots+P_nP_1>P_2P'_3+\cdots+$
$+P'_kP'_{k-1}+P'_{k+1}P_1$，即2）的情形成立。

由1）、2）可知命题成立。

图 14

图 15

15．（1）证明（图15）E 是正方形 $ABCD$ 边 CD 的中点，F 是 CE 线段的中点。

用分析法证明：

作 $\angle BAF$ 的平分线 AG，假设 $\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAF$，只须有 $\angle DAE=\angle BAG$，因而只须有 $\triangle ADE\cong\triangle ABG$．因为 $\angle D=\angle B$，$AD=AB$，所以要使 $\triangle ADE\cong\triangle ABG$，只须有 $BG=DE$，即 G 为 BC 的中点．

延长 AG 与 DC 延长线交于 H 点。

若 G 为 BC 的中点，只须有 $\triangle ABG\cong\triangle HCG$ 但这两个三角形中已有两个角对应相等，故只须有 $AB=CH$ 即可。

∵ $\angle FAH = \angle FHA$

∴ $FH = FA$

∵ $FA = \sqrt{AB^2 + \left(\frac{3}{4}AB\right)^2} = \frac{5}{4}AB$

∴ $CH = FH - FC = \frac{5}{4}AB - \frac{1}{4}AB = AB$

这就保证了等式 $\angle DAE = \frac{1}{2}\angle BAF$成立。

下面用综合法证明：

作$\angle BAF$的平分线交直线BC、DC分别于G、H两点。

∵ $\angle FAH = \angle BAH = \angle FHA$

∴ $FH = FA$

∵ $FA = \sqrt{AB^2 + \left(\frac{3}{4}AB\right)^2} = \frac{5}{4}AB$

∴ $CH = FH - FC = \frac{5}{4}AB - \frac{1}{4}AB = AB$

∴ $\triangle CHG \cong \triangle BAG$

∴ $CG = BG$ 即G为BC的中点。

∴ $\triangle ADE \cong \triangle ABG$

∴ $\angle DAE = \angle BAG = \frac{1}{2}\angle BAF$

（此题还可用另外方法证明，建议读者自己试证一下。）

（2）证明 （图16）、BE、CF分别是$\triangle ABC$中$\angle ABC$、$\angle ACB$的平分线，$AE \perp BE$，$AF \perp CF$。

用分析法证明：

延长AE、AF交BC于G、H。

若使$EF \parallel BC$，只须有$\angle AFE = \angle AHC$或EF是$\triangle AGH$的中位线。

图 16

由于从$\angle AFE = \angle AHC$来考虑条件不好找，所以从EF是$\triangle AHG$的中位线出发来考虑。

若使 EF 是 $\triangle AHG$ 的中位线，只须 E、F 分别是 AG、AH 的中点，所以只须 BE、CF 分别是 $\triangle ABG$ 和 $\triangle ACH$ 的一条中线即可。

事实上，由于 $AE\perp BE$ 且 BE 是 $\angle ABG$ 的平分线，所以 BE 是 $\triangle ABG$ 的中线。

同理知 CF 是 $\triangle ACH$ 的中线，所以 E、F 分别是 AG、AH 的中点。这就保证了 $EF\parallel EC$ 。

用综合法证明：

延长 AE、AF 交 BC 于 G、H。

$\because$ BE 是 $\angle ABG$ 的平分线且 $BE\perp AG$

$\therefore$ $\triangle ABG$ 是等腰三角形，E 为 AG 中点

同理可得 F 为 AH 的中点。

$\therefore$ EF 是 $\triangle AHG$ 的中位线即 $EF\parallel BC$

（3） **证明** （图17）E、F、G、H 是四边形 $ABCD$ 各边中点，I、J 是四边形 $AECD$ 两对角线 AC、BD 中点。

图 17

用分析法证明：

连结成四边形 $EFGH$、$EJGI$

假设 EG、FH、IJ 三线共点

应有 EG 和 FH 的交点与 EG 和 IJ 的交点重合，这只须有四边形 $EFGH$ 和四边形 $EJGI$ 都是平行四边形，即 $EF\underset{=}{\parallel}GH$，$EJ\underset{=}{\parallel}GI$。

由已知 E、F、G、H 是边 AB、BC、CD、DA 的中点，则有

$EF=\frac{1}{2}AC$，$EF\parallel AC$，$GH=\frac{1}{2}AC$，$GH\parallel AC$ 故 $EF\underset{=}{\parallel}GH$。

同理可得 $EJ\underset{=}{\parallel}GI$。

这就保证了 EG、FH、IJ 都过 EG 的中点 O。

用综合法证明：

连结四边形 $EFGH$。

∵ E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，

∴ $EF=\frac{1}{2}AC$ 且 $EF\parallel AC$

$GH=\frac{1}{2}AC$ 且 $GH\parallel AC$

∴ $EFGH$ 是平行四边形，则 EG 与 FH 互相平分于点 O.

再连结四边形 $EJGI$，同理可得 $EJGI$ 也是平行四边形，则 EG 与 IJ 也互相平分。

由于线段 EG 的中点唯一，所以 IJ 通过 EG 的中点 O. 即 EG、FH、IJ 三线共点。

16. (1) 证明 (用反证法) (图18) E、F 是四边形 $ABCD$ 的边 AD、BC 的中点，$EF=\frac{1}{2}\left(AB+CD\right)$.

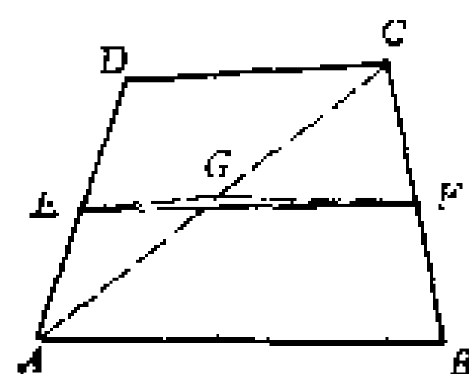


图 18

假设 $AB\nparallel CD$.

连结AC并取AC 的中点G，连结 EG、FG，则有

$GE\parallel CD$ 且 $GE=\frac{1}{2}CD$

$GF\parallel AB$ 且 $GF=\frac{1}{2}AB$

由假设知 E、G、F 不能共线，于是有

$EF<GF+GE=\frac{1}{2}(AB+CD)$

这于已知矛盾，所以假设不成立故 $AB\parallel CD$.

(2) 证明 (i)设三个圆的圆心共线 (图19)，这时它们的公共弦 AB、CD、EF 都垂直于连心线 $O_1O_2O_3$，所以有

$AB\parallel CD\parallel EF$

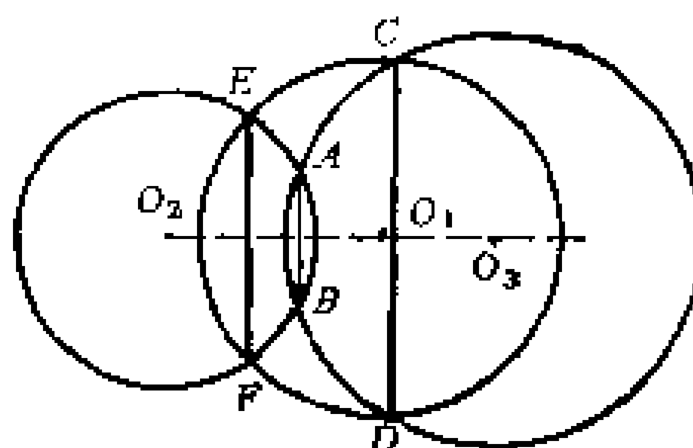


图19

(ii) 设三个圆的圆心不共线 (图20)，因 CD 与EF各垂直于相交的连心线 O_1O_3、O_1O_2，所以 CD 与 EF 必相交于一点 O.

连结 AO，设 AO 交 $\odot O_2$、$\odot O_3$ 于点 B' 和 B''，则有

$$OA\cdot OB' = OE\cdot OF = OC\cdot OD = OA\cdot OB''$$

$\therefore\quad OB' = OB''$

$\therefore\quad B' \equiv B''$

即 $AOB''B'$ 是 $\odot O_2$ 和 $\odot O_3$ 的公共弦，所以 B、B'、B'' 是一个点即 AB 也通过 O 点。

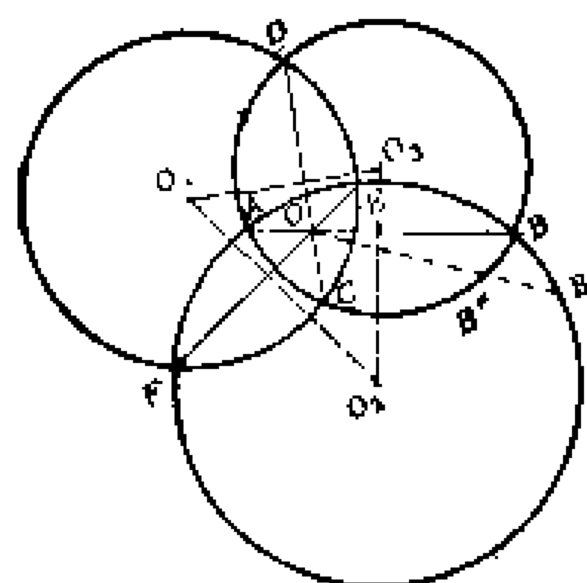


图 20

（3）证明（用反证法）假设四边形 $ABCD$ 没有外接圆，那么过 A、B、C 三点必可作一圆不过 D 点，但此圆与 AD 所在直线除 A 外一般必有第二个交点 D'（D' 不与 D 重合）。

由于 D' 在 AD 直线上之位置不外有下列四种：

（i）D' 在线段 DA 的延长线上（图21）。

连结 $D'C$，则有

$\angle CD'D = \angle ABC$

$\because\quad \angle ABC + \angle ADC = \pi$

$\therefore\quad \angle CD'D + \angle ADC = \pi$

这与三角形内角和等于 π 矛盾，故（i）这种情况不成立。

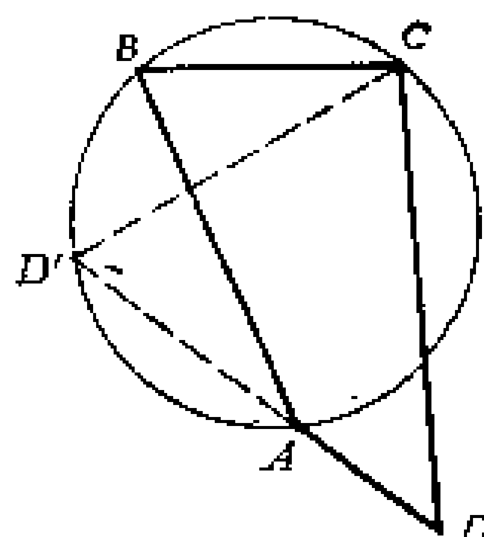


图 21

（ii）D' 与 A 重合，即 AD 与圆相切于 A（图22）。

连结 AC，则有

$\angle DAC = \angle ABC$

$\because\quad \angle ABC + \angle ADC = \pi$

$\therefore\quad \angle DAC + \angle ADC = \pi$

这也与三角形内角和为 π 矛盾。故（ii）不成立。

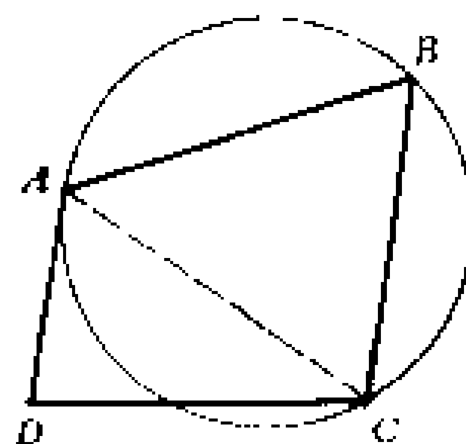


图 22

（iii）D' 在线段 AD 之间（图23）。

连结 $D'C$，则有

$$\angle AD'C+\angle ABC=\pi$$

∵ $\angle ADC+\angle ABC=\pi$

∴ $\angle AD'C=\angle ADC$

这与三角形外角定理矛盾，故

（iii）这种情况也不成立。

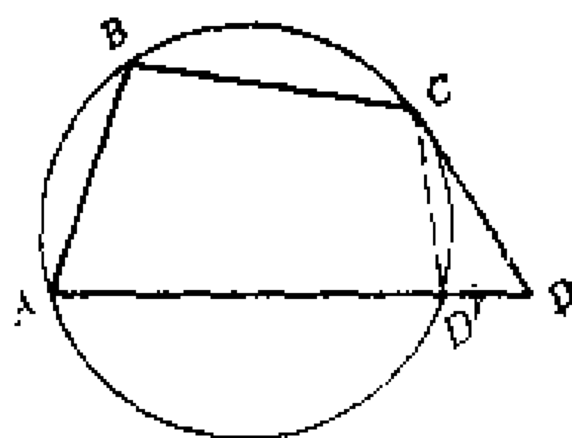


图 23

（iV）D' 在线段 AD 的延长线上（图24）。

连结 $D'C$，则有

$$\angle AD'C+\angle ABC=\pi$$

∵ $\angle ADC+\angle ABC=\pi$

∴ $\angle ADC=\angle AD'C$

这也与三角形外角定理矛盾，所以这种情况也不成立。

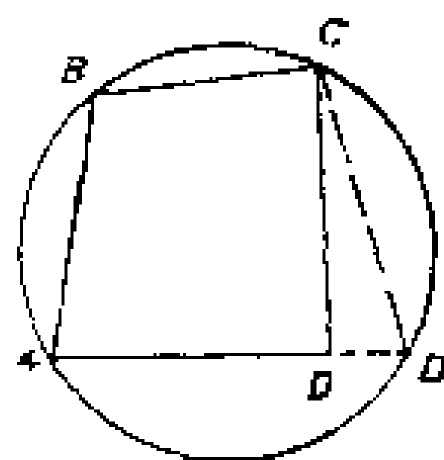


图 24

综上可以得出过四边形 $ABCD$ 四顶点可作一个圆。

〔注：用穷举法时，须将反面情形层层驳倒，不可有遗漏，此题习惯上多就（i）、（iii）两种情形反驳，这样就不周到了〕。

第三章　用公理法建立几何学结构的范例习题解答

§ 1

1．解　见第三章§1．

2．解　见第三章§1．

3．证明　设点P是$\triangle ABC$的内点，直线l通过顶点A和点P（图25）．

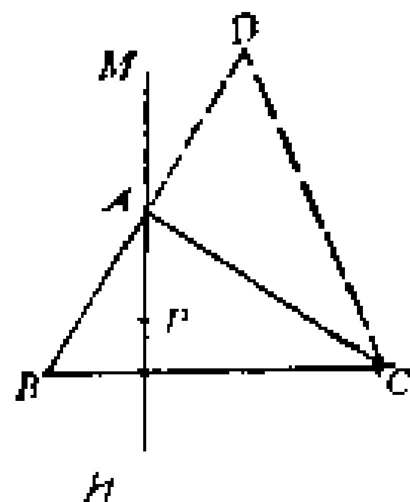


图 25

延长BA，在其延长线上任取一点D，连结CD．则直线l与$\triangle BDC$的一条边BD相交了，现在我们来证明直线l不与$\triangle BDC$的边CD相交．

在半线AP的延线上任取一点M（这样取主要是为了叙述方便）．

以线段AC所在的直线为界线，把平面分为两个区域，则D、P位于不同的区域，A与C在界线上，但由于A、C是不同的两个点，所以半线AP与线段CD不相交．

再以线段AB所在的直线为界线，把平面分为两个区域，则M、C位于不同的区域，A与D在界线上，但由D的取法可知A、D是不同的两个点，所以半线AM与线段CD也不相交．

综上可知直线l与线段CD不相交．由帕士命题知直线l必与$\triangle BDC$的边BC相交．

4．证明　对于此题的一种证明方法可以仿照第三章定理

1.2 的证法，现在我们给出另一种证明方法。

在已知四点所在的直线外取一点E，连结EB，在EB反向延线上取一点F、作直线FC，连结AE，DE（图26）.我们可以看到直线FC不与线段BE相交（假设FC与线段BE相交，则FC与FB这两条直线除了点F外，还有另一个公共点，则FC与FE重合，从而有点B重合于点C，这与已知矛盾）．我们还可以看到FC不与线段AB相交（假设FC与线段AB相交，则应该有$A\overline{C}B$，这与已知矛盾），因而可以断定直线FC与线段AE不相交，不然将与用帕士命题于$\triangle ABE$及直线FC所得出的结果矛盾。

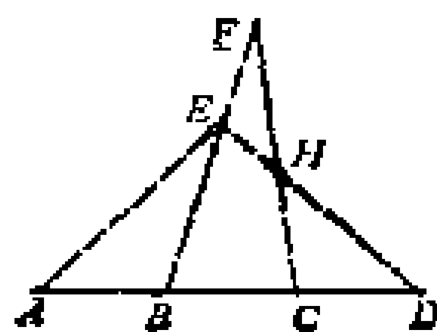


图 26

把帕士命题用于$\triangle BED$及直线FC上，可以得到直线FC和线段ED交于内点H，就是$D\overline{H}E$，再把帕士命题用于$\triangle AED$及直线FC上，由$\overline{D}HE$以及FC与线段AE不相交，得到直线FC必与线段AD相交于C即$A\overline{C}D$。

由$A\overline{B}C$和$A\overline{C}D$，再用第三章定理1.2便可得到$A\overline{B}D$，于是命题得证。

〔注：上面的证法用到了帕士命题，这个命题用处是很广的．对于这个命题读者应很好掌握．为此，请读者仿上面的证法把第三章定理1.2证明一下〕

5．**证明** 为了证明时叙述方便，把原命题用符号来表示：若$A\overline{C}B$，点M与点C不相同且有$A\overline{M}B$，则必有$A\overline{M}C$或$C\overline{M}B$。

假设结论不成立，就是$A\overline{M}C$及$C\overline{M}B$都不成立．那么对于A、M、C三点，可能成立的介于关系是： 1）$A\overline{C}M$；2）$M\overline{A}C$。

若是1）$A\overline{C}M$，将$A\overline{C}M$与$A\overline{M}B$合并就会得到$C\overline{M}B$这与假设$C\overline{M}B$不成立矛盾。

若是 2） $M\overline{A}C$，将 $M\overline{A}C$ 与 $A\overline{C}B$合并就会得到$M\overline{A}B$，这与已知 $A\overline{M}B$矛盾。

综上所述就证明了原命题结论成立。

6．证明　设O是$\angle(k, h)$的顶点，在边h、k上各取一点A、B使$OA=OB$（图27）．连结AB，则线段AB上的点（除点A和B外）都是$\angle(k, h)$内部的点。

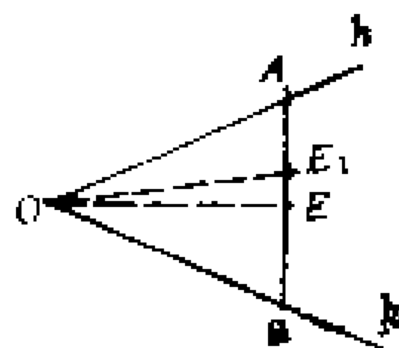


图 27

取线段AB的中点E，连结OE，则射线OE属于$\angle(k, h)$的内部，即射线OE介于k与h之间。

对于$\triangle AEO$与$\triangle BEO$，

∵　$OA=OB$，$AE=BE$，$OE=OE$

∴　$\triangle AEO\cong\triangle BEO$

∴　$\angle AOE=\angle BOE$

因此OE是$\angle(k, h)$的平分线．存在性得证。

设OE_1是另一条角分线，点E_1和E是线段AB上的不同的点。

∵　$OA=OB$，$OE_1=OE_1$，$\angle AOE_1=\angle BOE_1$

∴　$\triangle AOE_1\cong\triangle BOE_1$

∴　$AE_1=BE_1$

因此E_1是线段AB的中点，这与线段中点唯一性矛盾．故角的平分线唯一性得证。

7．解　见第三章§1．

8．证明　设l是任一直线，C是l外的一点．从点C引l的垂线CA，A为垂足（图28）．

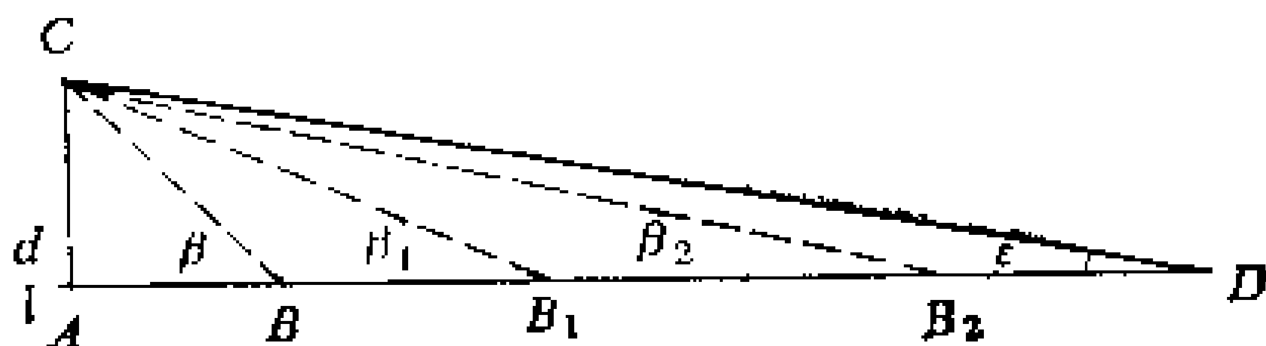


图　28

从点A出发，在l上向右（向左也是同样的）截取线段AB，使$AB=AC$。

连结BC，再从B点出发向右截取线段BB_1，使$BB_1=BC$。连结B_1C，再截取B_1B_2，使$B_1B_2=B_1C$，连结B_2C，依次作下去，就会得到角的序列

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \cdots,\ \beta_n\cdots(\beta_n=\angle AB_nC)$$

考察各以d（如图所示），β，β_1，$\cdots$，β_{n-1}，$\cdots$做为外角的三角形CAB，CBB_1，CB_1B_2，$\cdots$，$CB_{n-1}B_n\cdots$根据三角形外角定理1.41，则有下列不等式：

$$d\geqslant 2\beta,\ \beta\geqslant 2\beta_1,\ \beta_1\geqslant 2\beta_2,\ \cdots,\ \beta_{n-1}\geqslant 2\beta_n$$

于是得出

$$\beta_n\leqslant\frac{1}{2^n}d$$

由此可见，当$n\longrightarrow+\infty$时，$\beta_n\longrightarrow 0$。因而从充分大值n开始，一切的β_n都可充分小。设ε为已知锐角，则$\beta_n<\varepsilon$，故取充分大的号码k，使$\beta_{k+1}<\varepsilon$成立。则当D沿线段AB_{k+1}移动时，而$\angle CDA$从值$d>\varepsilon$到值$\beta_{k+1}<\varepsilon$连续地变动，所以会达到一瞬间，使这时候的$\angle CDA$等于已知的任意锐角ε，这就是所要证明的。

9．**解** 在绝对平面几何中凸四边形内角和不大于四直角，而外角和不小于四直角。

因为凸四边形可以分成两个三角形，由于三角形内角和不大于二直角，所以两个三角形内角和（即四边形内角和）不大于四直角。又因为凸四边形内外角和为八直角，故外角和不小于四直角。

10．**证明** 设点O是$\odot O$的中心，P是$\odot O$内部一个点，a是过点P的一条直线，现在来证明a与$\odot O$相交于两个点。

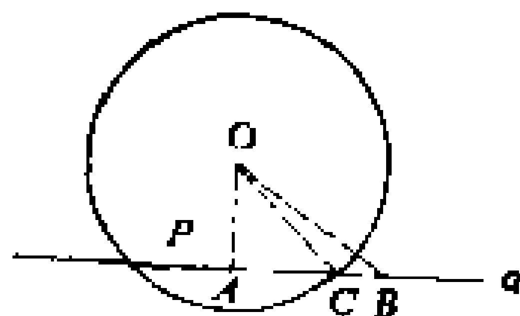


图 29

由中心O向直线a作垂线得到垂足A（图29），则有

$OA \leqslant OP < r$（r为圆的半径）

所以点A在$\odot O$的内部。

在直线a上作线段$AB=r$（B在A的右侧，当然在其左侧也可以）。因为$OB > AB = r$，所以点B在$\odot O$的外部。

在线段AB上作如下的分割：

（1）线段AB的任何一个点M_1，如果$OM_1 < r$，则属于第一类。

（2）线段AB上其余的点属于第二类。

现在来验证这样的分割法符合戴德金分割原理：

1° 这样的分割方法显然是肯定的，而且是互斥的，所以线段AB上的点一定的属于某一类而且只属于某一类。两类都不是空集，因为第一类里有点A，第二类里有点B。

2° 如果点M_1属于第一类，点M_2属于第二类即$OM_1 < OM_2$于是有$AM_1 < AM_2$，就是说M_1在M_2的前而（在此我们不妨设前后顺序为A到B的方向）。

根据戴德金原理，直线a上存在着分割点C，现在证明$OC=r$。

（i）假设$OC<r$，则点C属于第一类，也就是第一类中最后面的点。由C向B作线段CM_2，使$CM_2 < r-OC$，则M_2是第二类中的点。但是由$\triangle OCM_2$立刻就有$OM_2 < OC + CM_2 < OC + r - OC = r$，即$OM_2 < r$，则$M_2$应属于第一类，这与$M_2$属于第二类矛盾，故$OC<r$不成立。

（ii）假设$OC>r$，则点C属于第二类，也就是第二类中的最前面的点。由C向A作线段CM_1，使$CM_1 < OC - r$，则M_1是第一类中的点。但是由$\triangle OCM_1$有$OM_1 > OC - CM_1 > OC - (OC - r) = r$，即$OM_1 > r$这与$M_1$属于第一类矛盾，所以$OC>r$也不成立。故只有$OC=r$，即点$C$在$\odot O$上。也就是说直线$a$与圆有交点，故交点的存在性证明完了。

由于图形的对称性，在 OA直线的另一侧还存在第二个交点C'，故直线 a 与$\odot O$一共有两个交点。

现在证明交点不能多于两个。

假设直线 a 与$\odot O$ 除了 C 和 C' 两个交点外，还有第三个交点C''，显然$\triangle OCC'$和$\triangle OC'C''$都是等腰三角形，并且各以CC'和$C'C''$为底边。设 E 和 F 是两个底边的中点，则 OE、OF 是过点 O 关于直线 a 的两条不同的垂线，这是不可能的，于是直线交圆命题就完全证毕。

〔注：这个命题证起来是比较复杂的，给出这个题目是使读者了解和掌握运用戴德金分割原理的方法。戴德金分割原理是非常重要的命题，而讲义中没有例子，故通过此题予以补充。〕

§ 2

11．解　见第三章 § 2

12．证明　设AB 和CD 分别是直线 AC 的垂线和斜线，$\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta\neq\frac{\pi}{2}$，假设 $\beta<\frac{\pi}{2}$（图30）。

因为 $\alpha+\beta<\pi$，根据欧几里得第五公设知直线 AB一定和CD相交。

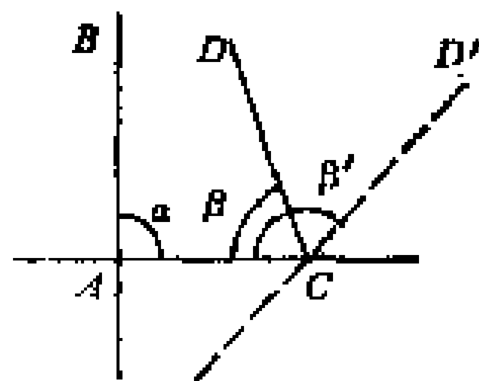


图30

假设斜线 CD' 和直线 AC 所作的角$\beta'>\frac{\pi}{2}$，那么在直线 AC 的另一侧（下半平面）的角就必小于$\frac{\pi}{2}$，所以在直线 AC 的下半平面中，AE和CD'两条直线必定相交。

13．证明　设 A、B，C 是不共线的三点，连结AB，BC，分别作 AB，BC 的中垂线 m，n，则m 与 n 必相交于一点 O（图31）。（如果$m\parallel n$（图32），根据平行公理，直线 AB与 n

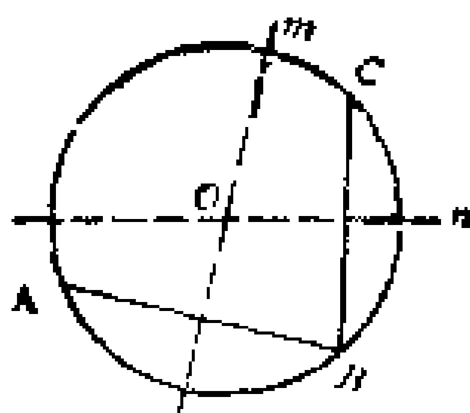


图31

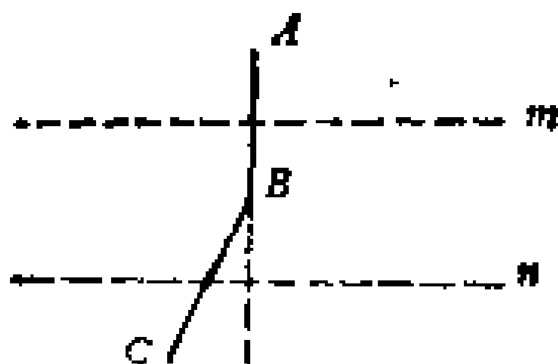


图32

相交且$AB \perp n$，这样，过点B的直线AB与BC同时垂直于n，根据垂线的唯一性知A、B、C三点必共线，这与已知矛盾，所以m与n必相交）

因为$OA=OB=OC$，则A、B、C三点在以O为圆心，OA为半径的圆上（图31）。

下面证明三点所决定的圆是唯一的。

假设过不共线三点A、B，C决定两个圆，圆心分别为O和O'，则O和O'必同时在m和n上，这样直线m和n有两个不同的交点，故m与n重合，于是A、B、C三点必共线，这与已知A、B、C不共线矛盾，所以过不共线的三点可决定唯一的圆。

14．证明　首先我们证明若瓦里斯命题成立，则第五公设成立。

我们现在采取间接证法（我们知道第五公设与平行公理Ⅴ等价，平行公理Ⅴ与“任意三角形内角和等于二直角”等价），假如瓦里斯命题成立，我们证明“三角形内角和等于二直角”。

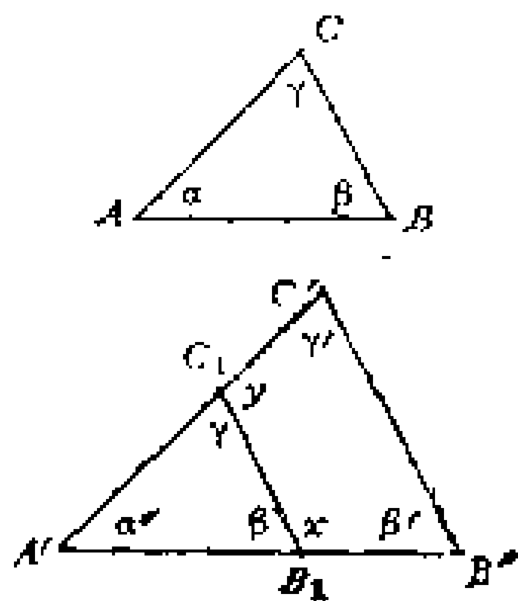


图33

设$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$（图33），$AB<A'B'$则有

$$\alpha=\alpha',\ \beta=\beta',\ \gamma=\gamma'$$

把$\triangle ABC$装进$\triangle A'B'C'$里，使A与A'重合且AB，AC顺

次沿着$A'B'$、$A'C'$，由于$\beta=\beta'$，在新位置B_1C_1的直线BC与直线$B'C'$不相交。所以四边形$B_1B'C'C_1$的内角和$\sigma=\beta'+\gamma'+x+y=4d$。(因 $x=\angle B'B_1C_1=2d-\beta=2d-\beta'$，$y=\angle C'C_1B_1=2d-\gamma=2d-\gamma'$）从而可以得到三角形内角和等于二直角，这就证得第五公设成立。

其次证明若第五公设成立，则瓦里斯命题成立。

因为第五公设成立，所以平行公理Ⅴ成立。通过$\triangle A'B'C'$的边$A'B'$的点B_1引$B'C'$的平行线B_1C_1，由帕士命题知B_1C_1在点C_1交于边$A'C'$，由于$\beta=\beta'$，$\gamma=\gamma'$，所以$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，且$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$不相等（因$A'\overline{B_1}B'$，即$A'B_1<A'B'$）.

15．证明　首先证明若勒让德第二命题成立，则平行公理Ⅴ成立。我们用间接证法证明，即若勒让德第二命题成立，则平行公理Ⅴ的等价命题“三角形内角和为$2d$”成立。

因为我们已经知道三角形内角和不超过二直角，所以我们只要证明假设三角形内角和小于二直角就会出现矛盾即可。

设$\triangle ABC$的一个角是α，把AB、AC两条边延长(图34)。

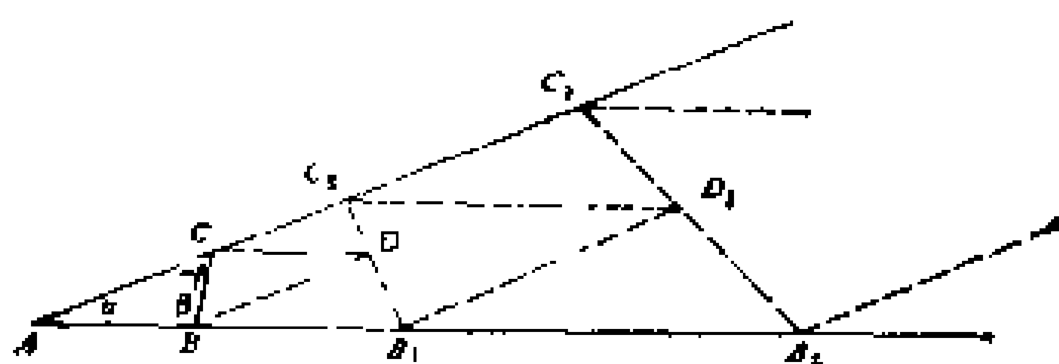


图　34

设$\triangle ABC$的内角和$\Sigma_{(\triangle ABC)}=\alpha+\beta+\gamma=\pi-\varepsilon$，($\varepsilon>0$)以$B$为顶点在$\beta$的外角部分，以$BC$为一边作角$\gamma$。因为$\beta+\gamma<\pi$，所以这个角的另一边一定落在$AB$边含有点$C$的一侧，且必不与$AC$边相交，设此边为$BD$，则$BD$边在$\angle CAB$的内部。今截取$BD$使$BD=AC$，连结$CD$，则有$\triangle ABC\cong\triangle BCD$。同样点$D$一定在$\angle CAB$的内部。由于勒让德第二命题成立，则过$D$可作和

AB 边及 AC 边相交的直线，设这两个交点为 B_1 和 C_1，则 $\triangle AB_1C_1$ 内角和为：

$$\Sigma_{(\triangle AB_1C_1)} = \Sigma_{(\triangle ABC)} + \Sigma_{(\triangle BCD)} + \Sigma_{(\triangle CDC_1)} + \\ + \Sigma_{(\triangle BDB_1)} - 3\pi$$

由于 $\triangle ABC \cong \triangle BCD$，所以 $\Sigma_{(\triangle ABC)} = \Sigma_{(\triangle BCD)} = \pi - \varepsilon$。又因一切三角形内角和都小于 π，则$\Sigma_{(\triangle CDC_1)} < \pi$ $\Sigma_{(\triangle BDB_1)} < \pi$，于是

$$\Sigma_{(\triangle AB_1C_1)} < (\pi - \varepsilon) + (\pi - \varepsilon) + \pi + \pi - 3\pi = \pi - 2\varepsilon$$

仿照上面的作法，以点B_1为顶点，B_1C_1为一边在$\angle AB_1C_1$的外角部分作$\angle C_1B_1D_1 = \angle AC_1B_1$，就可以得到射线 B_1D_1，截取$B_1D_1 = AC_1$，连结C_1D_1，则得

$$\triangle AB_1C_1 \cong \triangle B_1C_1D_1$$

且D_1在$\angle CAB$内部，由于勒让德第二命题成立，因此过 D_1 作一直线与AB、AC分别交于B_2和C_2，不难计算，$\Sigma_{(\triangle AB_2C_2)} < \pi - 2^2\varepsilon$。

用此方法连续作 n 次，则得$\triangle AB_nC_n$，有

$$\Sigma_{(\triangle AB_nC_n)} < \pi - 2^n\varepsilon$$

由阿基米德公理知，不论 ε 多么小，总可以找到 n，使得$2^n\varepsilon - \pi > 0$，即 $\pi - 2^n\varepsilon$ 为负数，这样就得到三角形内角和是负数，这显然是不成立的。所以三角形内角和小于二直角的假设不成立。从而证得若勒让德第二命题成立，则三角形内角和一定等于二直角，即平行公理Ⅴ成立。

其次证明若平行公理Ⅴ成立，则勒让德第二命题成立。

由于平行公理Ⅴ成立，所以第五公设成立。假设D是 $\angle CAB$ 内部任意的点，通过D作一直线使之与AB 边作成角 α，且有 $\angle CAB + \alpha < \pi$ （图35），根据第五公设知此直线一定与 AC 相交。故勒让德第二命题成立。到此勒让德第二命题与平行公理Ⅴ的等价性证明完毕。

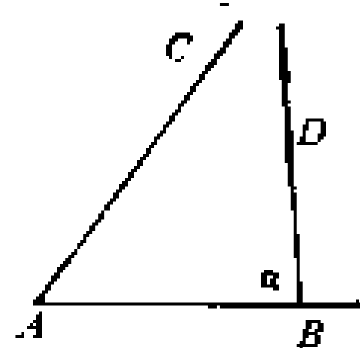


图 35

16. **解** 提示：证明三角形中位线定理与平行公理Ⅴ等价。即说明三角形中位线定理是真正的欧几里得命题。

§ 3

17. **证明** 假设三角形的内角和是一常数。在△ABC的两边AB、AC上分别取B'和C'，连结$B'C'$（图36）。则又成一三角形$AB'C'$。

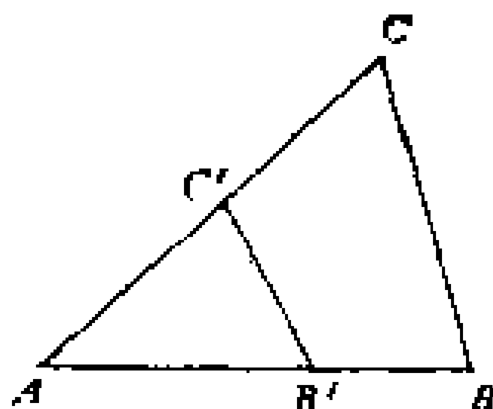


图 36

由假设则有：

$$\Sigma_{(\triangle ABC)}=\Sigma_{(\triangle AB'C')}$$

$\because$ $\angle A$为公共的

$\therefore$ $\angle ABC+\angle ACB=\angle AB'C'+\angle AC'B'$

$\because$ $\angle AB'C'+\angle BB'C'=\pi$

$\angle AC'B'+\angle CC'B'=\pi$

$\therefore$ $\angle AB'C'+\angle AC'B'+\angle BB'C'+\angle CC'B'=2\pi$

$\therefore$ $\angle ABC+\angle ACB+\angle BB'C'+\angle CC'B'=2\pi$

即四边形$BCC'B'$的内角和为四直角，故欧氏平行公理成立，这与罗氏公理矛盾，则假设不成立，所以在罗氏几何中三角形内角和不是一个固定不变的常数。

18. **证明** 假设过不共线的三点必定能作圆，那么根据第三章定理2.26可知欧氏平行公理必定成立，这样就与罗氏平行公理矛盾，所以假设不成立，从而证得了原命题成立。

19. **证明** 设$\angle ACB$是立于半圆上的角，连结OC（O为圆心）（图37）。

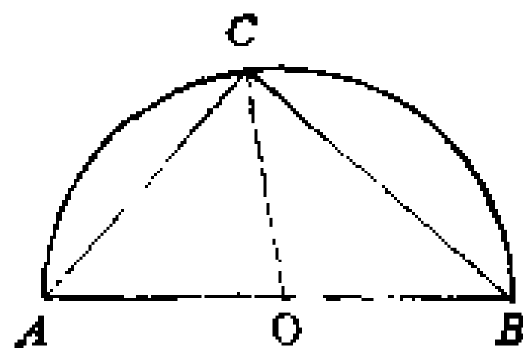


图 37

$\because$ △AOC和△BOC都是等腰三角形

$\therefore$ $\angle OAC=\angle ACO$

$\angle CBO = \angle BCO$

$\because \quad \angle A + \angle B + \angle ACB < \pi$

$\therefore \quad 2\angle ACO + 2\angle BCO < \pi$

$\therefore \quad \angle ACB = \angle ACO + \angle BCO < \dfrac{\pi}{2}$

〔注：从上面三个习题，以及第三章定理3.6、定理3.7的证明中，我们可以看到，在证明与罗氏平行公理有关的命题时，一般地都采用归谬法，最后引出与罗氏平行公理矛盾的结果。第三章定理3.1——定理3.7在讲义中都称作为罗氏平行公理的推论，其实这些命题都是与罗氏平行公理等价的，请读者自己证明一下它们的等价性，从而加深对罗氏几何的了解。〕

20．证明　因AA'、CC'在BB'的异侧，所以AA'，CC'都和BB'没有公共点。

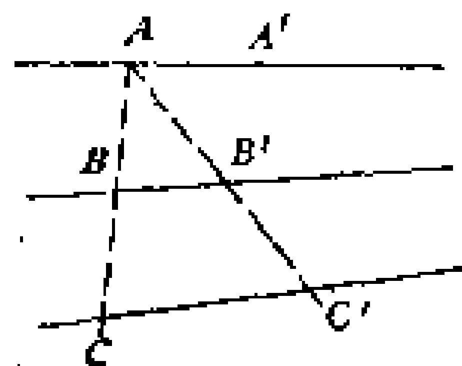


图　38

在直线AA'，CC'上各取一点A、C，由于AA'、CC'在BB'的异侧，则线段AC与直线BB'必交于一点B（图38）．

在直线AA'上取点A'，使A'在点A的AA'与CC'平行方向的一侧。

因为$AA' \parallel CC'$，所以$\angle CAA'$内的任一射线AC'必与CC'交于一点C'．

在$\triangle ACC'$中，直线BB'与AC交于内点B，与CC'不相交，根据帕士命题知直线BB'与边AC'必相交于一点B'．这就是说$\angle BAA'$内的任何射线AC'必与直线BB'相交，于是证明了$AA' \parallel BB'$，平行方向为AA'的方向，利用平行传递性可知$CC' \parallel BB'$．

21．解　见第三章§3．

22．解　设D、E为$\triangle ABC$的边AC、BC的中点，DE为中

点连线（图39）．

由A、C、B向DE作垂线AF、CH、BG，垂足分别为F、H、G，那么$\triangle AFD$、$\triangle CDH$、$\triangle CEH$、$\triangle BEG$都是直角三角形。

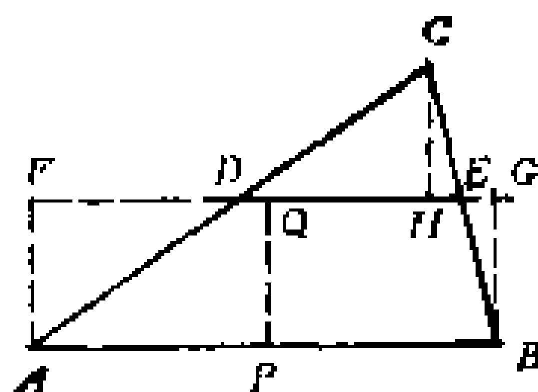


图 39

∵ $CD=AD$

$\angle CDH=\angle ADF$

∴ $\triangle ADF\cong\triangle CDH$

∴ $FD=DH \quad AF=CH$ （1）

∵ $CE=BE \quad \angle CEH=\angle GEB$

∴ $\triangle CEH\cong\triangle BEG$

∴ $HE=EG \quad CH=BG$ （2）

由（1）、（2）知

$AF=BG$

∴ 四边形$ABGF$为萨开里四边形。

取FG、AB的中点Q、P，由第三章定理1.43知PQ是AB、FG的公垂线，所以AB与FG是超平行的，即DE与AB超平行。

对于四边形$APQF$，$\angle APQ=\angle FQP=\angle AFQ=\dfrac{\pi}{2}$，则$\angle FAP$必小于$\dfrac{\pi}{2}$，即$\angle AFQ>\angle FAP$，所以$FQ<AP$，同理可知$GQ<BP$，而$FG=2DE$因而有

$$DE=\frac{1}{2}FG=\frac{1}{2}(FQ+GQ)<\frac{1}{2}AB$$

综上所述有：三角形的两边中点连线与第三边是超平行的并且小于第三边的一半．

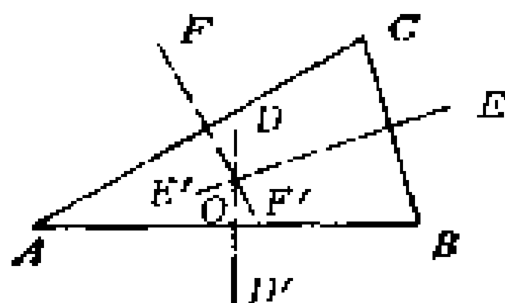


图 40

23．证明 1）设DD'及EE'是AB和BC边的中垂线，且交于点O（图40），则O到A、B、C三点的

距离相等，故O也在AC边的中垂线FF'上，所以如果$\triangle ABC$有两条边的中垂线是会聚线，则第三边的中垂线也和前两条是会聚的，并且有一个公共的点。

2）设中垂线DD'与EE'为离散线（图41）我们来证明FF'也与它们离散。

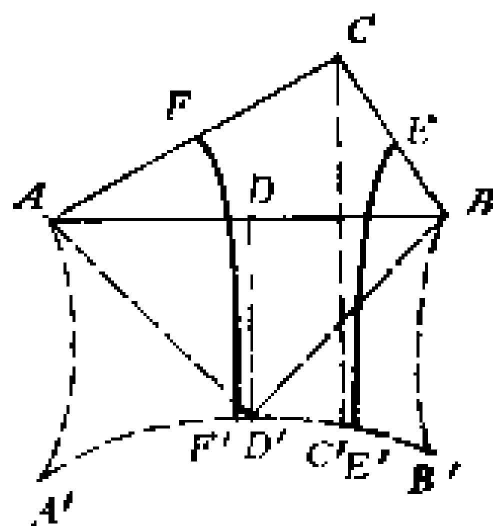


图 41

因为DD'与EE'为离散线，则它们有一条公共垂线设为$D'E'$。由$\triangle ABC$的三个顶点作与$D'E'$垂直的直线，设垂足为A'、B'、C'。对于四边形$AA'B'B$，DD'是AB、$A'B'$的公垂线，连结AD'、BD'，则$\triangle ADD'$与$\triangle BDD'$都是直角三角形且它们是合同的，即$AD'=BD'$，$\angle AD'D=\angle BD'D$。从而有$\angle AD'A'=\angle BD'B'$，由于$\triangle AA'D'$与$\triangle BB'D'$也是直角三角形，且有上面两个等式，故$\triangle AA'D'$与$\triangle BB'D'$合同即$AA'=BB'$。同理可知$BB'=CC'$。

对于四边形$AA'C'C$，因为$AA'=CC'$，$AA'\perp D'E'$，$CC'\perp D'E'$，所以四边形$AA'C'C$是萨开里四边形。

由于FF'为AC的中垂线，所以FF'一定与$D'E'$垂直，因而DD'、EE'、FF'相互离散。

3）设$DD'\parallel EE'$，往证$FF'\parallel DD'\parallel EE'$。

首先由1）和2）的证明知FF'与DD'或EE'三条线中任意两条即不能是聚集的也不能是离散的，故这三条中垂线必是平行的。

其次证明它们在相同的方向上平行。

假设AB是$\triangle ABC$最大的边，E、F为CB和AC的中点，过$\triangle ABC$的顶点作EF的垂线（图42）由于四

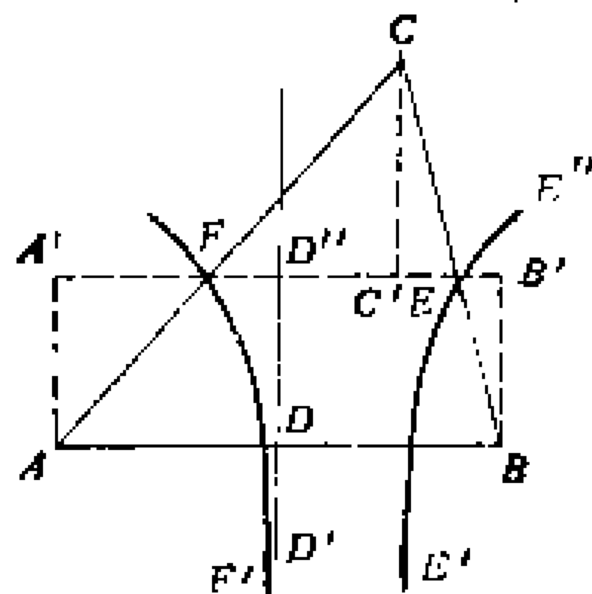


图 42

边形 $AA'B'B$ 为萨开里四边形，因此 AB 的中垂线必垂直交 $A'B'$ 于其中一点D''，E、F 位于 DD''的两侧（其原因留给读者思考）。

由所设 $EE' \parallel DD'$，而 $\angle ED''D=\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle D''EE'$ 或 $\angle D''EE''$为平行距$D''E$所对应的平行角。因为 $\angle D''EE''>\frac{\pi}{2}$，$\angle D''EE'<\frac{\pi}{2}$，因而$\angle D''EE'$是平行角，即$EE'$在由$D''$到$D$的方向上与$DD'$平行。

因为$FF' \parallel DD'$，而 $\angle D''FF'<\frac{\pi}{2}$，所以$FF'$对 DD'的平行方向与EE'对 DD'的平行方向一致，故 FF'、DD'、EE' 在同一方向上平行。

24. 解　在罗氏平面上的任意三角形总存在内心。这只要根据第三章定理1.10和角平分线性质即可证出，它和平行公理无关。

不总存在外心，原因是外心是三角形三边中垂线的交点，由上题已知这三条中垂线不一定必交于一点。

不总存在垂心，因为垂心是三角形三条高的交点，而在罗氏平面上三角形三条高不一定总交于一点，故垂心不总存在，但如果有二条高交于一点，那么第三条高也必通过此交点即此时有垂心。

25. 解　请参照第22题的方法，读者自己来完成。

26. 解　请看下表：

	内角和	内心	外心	重心	垂心	中位线	面积	角欠
欧氏三角形	等于π	一个	一个	一个	一个	平行第三边 等于第三边一半	可以无限大	无
罗氏三角形	小于π	一个	不定	一个	不定	超平行于第三边 小于第三边一半	总有限	有

第四章　正交、相似、仿射变换群与欧氏、仿射几何习题解答

§ 1

1．解　（1）不是，原因是：

$$\sigma(x,y)=(x^2,y^2)$$

$$\sigma(-x,y)=[(-x)^2,y^2]=(x^2,y^2)$$

$$\sigma(-x,-y)=[(-x)^2,(-y)^2]=(x^2,y^2)$$

可见映射 σ 不是一一的，故 σ 不是变换（设 x，y 不全为零）．

（2）是．

（3）是．

（4）不是，原因是：

$$\sigma(x,y)=(\sin x,\cos x)$$

$$\sigma(2k\pi+x,y)=[\sin(2k\pi+x),\cos(2k\pi+x)]$$

$$=(\sin x,\cos x)\quad(k=0,\pm1,\cdots)$$

可见映射 σ 不是一一的，故 σ 不是变换．

2．证明　∵　$(\alpha\beta)(\beta^{-1}\alpha^{-1})=\alpha(\beta\beta^{-1})\alpha^{-1}$

$$=\alpha\alpha^{-1}=\varepsilon$$

另一方面显然有：

$$(\alpha\beta)(\alpha\beta)^{-1}=\varepsilon$$

∴　$(\alpha\beta)^{-1}=\beta^{-1}\alpha^{-1}$

（注：做为练习，请读者自己证明

$$(RST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}R^{-1}$$

其中 R、S、T、都是变换）．

3. 证明　设等边双曲线的方程为

$$x^2 - y^2 = a^2$$

将反演变换式

$$\begin{cases} x = \dfrac{R^2 x'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \dfrac{R^2 y'}{x'^2 + y'^2} \end{cases}$$

代入双曲线方程中得

$$\left(\frac{R^2 x'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 - \left(\frac{R^2 y'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 = a^2$$

整理得

$$R^4(x'^2 - y'^2) = a^2(x'^2 + y'^2)^2$$

这是双纽线方程。

4. 解　$\because$　$\varphi(m) = m'$,　$m' \in M'$

$$\varphi^{-1}(m') = m, m \in M \quad (m \overline{\in} M')$$

$\therefore$　$\varphi^{-1}[\varphi(m)] = \varphi^{-1}(m') = m$

又$\because$　$m \overline{\in} M'$

$\therefore$　$\varphi^{-1}(m)$无意义，故$\varphi[\varphi^{-1}(m)]$无意义

若φ是M的变换，则$\varphi^{-1}[\varphi(m)] = m = \varphi[\varphi^{-1}(m)]$。

5. 证明　设直线上的所有形如

$$\sigma(x) = ax + b$$

的变换的集合为G。

(1) 对于$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in G$, 设$\sigma_1(x) = a_1x + b_1$, $\sigma_2(x) = a_2x + b_2$. $\sigma_2\sigma_1(x) = \sigma_2(a_1x + b_1)$

$$= a_2(a_1x + b_1) + b_2$$

$$= (a_2a_1)x + (a_2b_1 + b_2)$$

即 $\sigma_2\sigma_1 \in G$，也就是对于G中任意二元素的乘法封闭.

(2) $\sigma'(x) = a^{-1}x - a^{-1}b$就是 $\sigma(x)$的逆。显然 $\sigma' \in G$。

所以G是群。

因为对于$\sigma_1(x)$，$\sigma_2(x)$有

$$\begin{aligned}\sigma_1\sigma_2(x)&=\sigma_1(a_2x+b_2)\\&=a_1(a_2x+b_2)+b_1\\&=(a_1a_2)x+(a_1b_2+b_1)\\&\neq\sigma_2\sigma_1(x)\quad\text{（一般情况下不等）}\end{aligned}$$

所以G不是交换群。

§ 2

6．解　设正交变换式为

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+a_1\\y'=a_{21}x+a_{22}y+a_2\end{cases}$$

（1）把对应点坐标代入所设变换式，以及由正交变换式的系数关系有：

$$\begin{cases}-1=a_{12}+a_1\\0=a_{22}+a_2\\0=2a_{11}+a_1\\2=2a_{21}+a_2\\a_{11}^2+a_{21}^2=1\\a_{12}^2+a_{22}^2=1\end{cases}$$

解此方程组得：

$$\begin{cases}a_{22}=-a_{11}\\a_{12}=2a_{11}-1\\a_{21}=1-\dfrac{a_{11}}{2}\\a_1=-2a_{11}\\a_2=a_{11}\end{cases}$$

由$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$可得 $a_{11}'=0$，$a_{11}''=\dfrac{4}{5}$故所求的正交变换式

为：

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \end{cases}$$

（2）把对应点的坐标代入所设变换式，以及由正交变换的系数关系有：

$$\begin{cases} 2 = a_{11} \quad + a_1 \\ 0 = a_{21} \quad + a_2 \\ 1 = a_{11} + a_{12} + a_1 \\ 0 = a_{21} + a_{22} + a_2 \\ a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \end{cases}$$

解此方程组得：

$$a_{22} = 0,\quad a_{12} = -1$$

$$a_{11} + a_1 = 2$$

$$a_{21} + a_2 = 0$$

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$$

由 $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$，可得 $a_{11} = 0, a_{21}^2 = 1$.故所求的正交变换式为：

$$\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x - 1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$$

7．解　设旋转变换式为

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 \end{cases}$$

其中一次项系数满足下面条件：

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1 \quad (1)$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 \quad (2)$$

$$a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2=1 \qquad (3)$$

$$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}=0 \qquad (4)$$

$$a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}=0 \qquad (5)$$

$$a_{13}a_{11}+a_{23}a_{21}+a_{33}a_{31}=0 \qquad (6)$$

将所给各对对应点坐标代入所设变换式中，有

$$a_1=a_2=a_3=0$$

$$a_{12}=a_{22}=a_{23}=a_{33}=0$$

$$a_{32}=a_{13}=1$$

将上面各值代入（4）、（5）、（6）式中得

$$a_{11}=a_{31}=0$$

将上面的值代入（1）中有 $a_{21}=\pm1$，所以所求旋转变换式为

$$\begin{cases} x'=z \\ y'=x \\ z'=y \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x'=z \\ y'=-x \\ z'=y \end{cases}$$

8．解　设所求的平移变换为

$$\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$$

将已知对应点的坐标代入上式有

$$\begin{cases} 0=2+a \\ -1=3+b \end{cases}$$

得

$$a=-2、b=-4$$

所以所求的平移变换为：

$$\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y-4 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'+4 \end{cases}$$

将此变换用于所给的抛物线上：

$$(y'+4)^2-(x'+2)-8(y'+4)+18=0$$

即

$$y'^2-x'=0$$

9．解　中心在原点，以 x 轴为长轴，半轴为 3 和 2 的椭圆方程为：

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \qquad (1)$$

将 x 轴绕原点旋转，使其与直线 $x-2y=0$ 重合．设旋转角为 θ（$\theta\leqslant\pi$），则有

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{1}{2}$$

所以

$$\sin\theta=\frac{1}{5}\sqrt{5},\quad \cos\theta=\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

则旋转变换式为：

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}(2x-y) \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}(x+2y) \end{cases}$$

也可写成

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{5}}{5}(2x'+y') \\ y=\frac{\sqrt{5}}{5}(-x'+2y') \end{cases}$$

将上式代入（1）式有：

$$\frac{1}{9}\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(2x'+y')\right]^2+\frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(-x'+2y')\right]^2=1$$

整理得

$$5x'^2-4x'y'+8y'^2-36=0$$

10．解　设空间任意一点 $P(x,y,z)$，关于平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

的反射对应点为 $P'(x',y',z')$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=-\dfrac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\ \dfrac{x-x'}{A}=\dfrac{y-y'}{B}\\ \dfrac{x-x'}{A}=\dfrac{z-z'}{C}\end{cases}\tag{1}$$

解方程组（1）得：

$$\begin{cases}x'=\dfrac{(B^2+C^2-A^2)x-2ABy-2ACz-2AD}{A^2+B^2+C^2}\\ y'=\dfrac{-2ABx+(A^2-B^2+C^2)y-2BCz-2BD}{A^2+B^2+C^2}\\ z'=\dfrac{-2ACx-2BCy+(A^2+B^2-C^2)z-2CD}{A^2+B^2+C^2}\end{cases}$$

这就是所求的反射公式。

11. 证明　设平移T由一对对应点A、A'确定，以垂直于向量$\overline{AA'}$的任意直线s_1作为一个反射轴（图43），用A_1表示在反射S_1下点A的对应点。

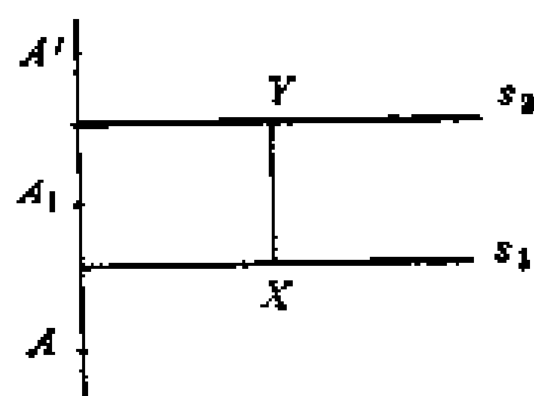


图　43

再取线段A_1A'的中垂线s_2作为第二个反射轴，这时反射S_1把点A变为A_1，而反射S_2把点A_1变为A'，并且点A与A'的距离等于两个反射轴间距离XY的二倍。

$$AA'=AA_1+A_1A'=2XY$$

因为平面上每个点与在变换S_2S_1下的对应点都有这样的性质，所以两个反射的积S_2S_1是已知平移T：

$$T=S_2\cdot S_1$$

12. 证明　设旋转V由中心O与一对对应点A、A'确定，取通过中心O的任意一条直线s_1作为第一个反射轴（图44）。

用A_1表示在反射S_1下点A的对应点，再取线段A_1A'的中垂线s_2作为第二个反射轴。

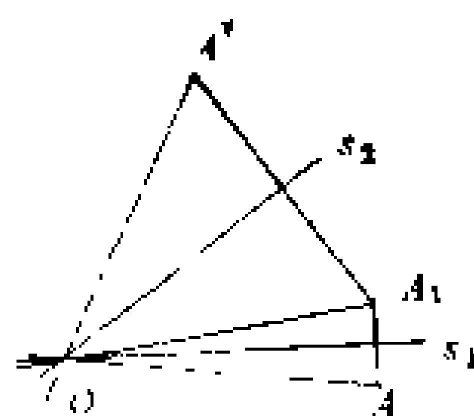


图 44

因为$\triangle A_1OA'$是等腰三角形，所以直线s_2通过点O，这时S_1把点A变为A_1，而反射S_2把点A_1变为A'，并且$\angle AOA'$等于两个反射轴间的$\angle(s_1, s_2)$的二倍：

$$\angle AOA' = \angle AOA_1 + \angle A_1OA'$$
$$= 2\angle(s_1, s_2)$$

因为平面上的每个点与在变换S_2S_1下的对应点都有这种性质，所以两个反射的积S_2S_1是已知旋转V，

$$V = S_2 \cdot S_1$$

13. **证明** 设任意运动都由两个三角形ABC和$A'B'C'$确定的（图45）。

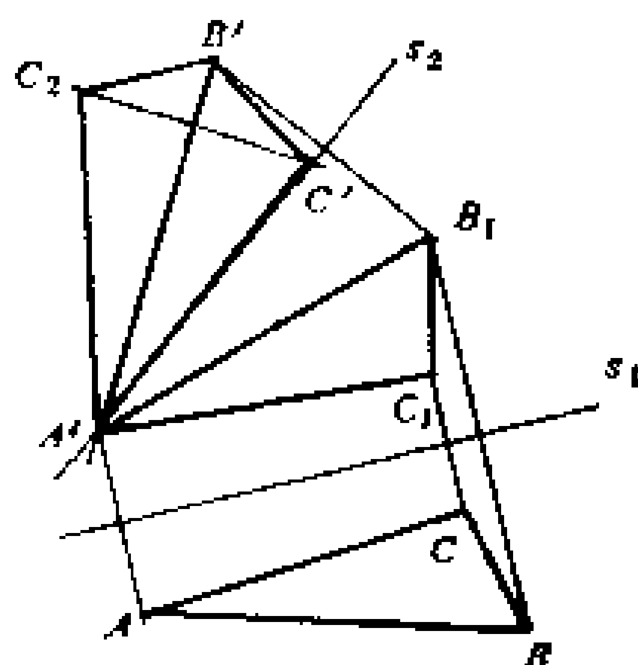


图 45

用s_1表示线段AA'的中垂线，作关于轴s_1的反射S_1，则平面上的点A、B、C变为A'、B_1、C_1。

设s_2是线段B_1B'的中垂线。因为$A'B_1 = AB = A'B'$，所以A'点在直线s_2上。

作关于轴s_2的反射S_2，则平面上的点A'、B_1、C_1变为A'、B'、C_2。

由于$\triangle A'B'C'$与$\triangle A'B'C_2$有两个点重合，所以如果点C_2与C'不重合，那么由下面的条件

$$A'B' = A'B'$$
$$A'C_2 = A'C_1 = AC = A'C'$$

$$B'C_2 = B_1C_1 = BC = B'C'$$

则有C_2关于直线$A'B'$与C'对称。

用s_3表示直线$A'B'$，作关于轴s_3的反射S_3，则平向上的点A'、B'、C_2变为A'、B'、C'。

由此可知，反射积$S_3 \cdot S_2 \cdot S_1$把点A、B、C变为A'、B'、C'，根据运动的性质，它把平面上每个点变为它的对应点。

因此运动可以表示为三次反射的积。在特殊情况下，例如点C'与C_2重合，则少于三次，于是命题得证。

14. **解** 假定四边形$ABCD$是所求的，且$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$AD=d$，$\angle AFD=\alpha$（a、b、c、d为已知四边）（图46）。

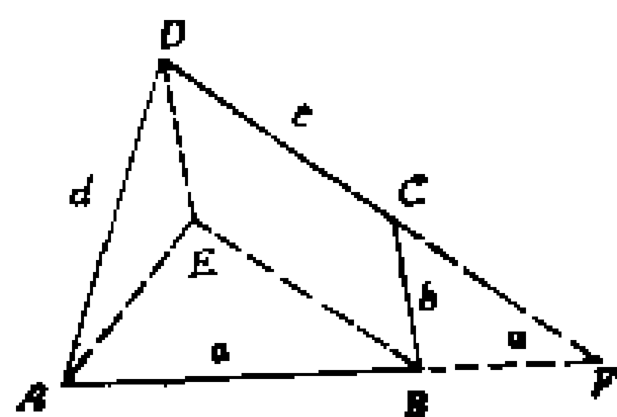


图 46

将边CD平移到BE的位置上，那么$\angle ABE=\alpha$，于是$\triangle ABE$已知边角边，故此三角形可以作出，而$\triangle AED$已知边边边，故又可以作出，从而有下面的作法：

作$\triangle ABE$，使$AB=a$，$BE=c$，$\angle ABE=\alpha$，

以AE为边在$\triangle ABE$外部作$\triangle AED$，使得$AD=d$，$ED=b$。

过B作ED的平行线，从B出发在ED的平行线上截取BC，使$BC=b$且使C与D位于AB的同侧。

则四边形$ABCD$为所求作（图46）。

显然只要a、b、c、d任三者之和大于第四者有一解。

15. **解** 如果O点已作出（图47），试取点B关于XY的对称点B'，并延长AO至A'，则

$$\angle A'OY = \angle AOX = 2\angle BOY = 2\angle B'OY$$

因而OB'是$\angle A'OY$的平分线，

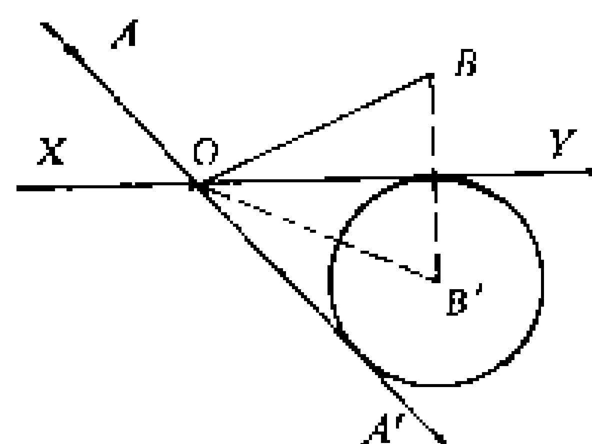


图 47

这样便知B'与AA'、XY等距，故以B'为心可以作圆切于AA'和XY。由于B'为定点，于是$\odot B'$一定，此圆确定后，就可以确定O点，故有下面的作法：

先作点B关于XY的对称点B'，以B'为心作与XY相切的圆B'。

自点A引半线AA'切于$\odot B'$且交XY于O，若X、B'两点分别在AA'的两侧，则O是所求的点（图47）。

由于A、B'位于XY的异侧，故AA'必然交于XY，即点O一定存在，$\odot B'$的切线虽然有两条通过点A，但只有把X、B'两点分开在两侧的那一条合用，因此本题仅有一解。

〔注：自A所引的$\odot B'$的另一条切线AA''适用于X与Y互换位置的情形（图48）。

16. 解　参照讲义第四章§2例3的方法，请读者将此题完成。

17. 解　（图49）希望K、L、M、N、P，依次是五边形

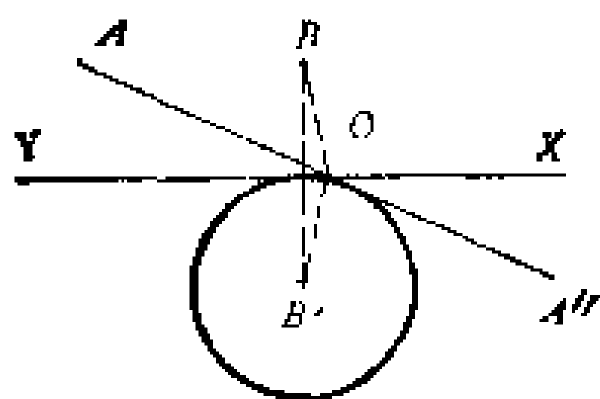


图　48

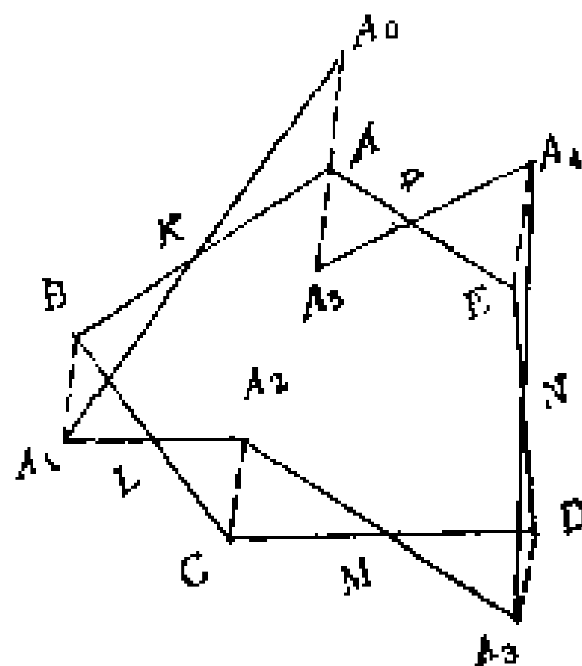


图　49

$ABCDE$的边AB、BC、CD、DE、EA的中点，无异于求一点A，接连以K、L、M、N、P为反射中心施行五次点反射后，使A仍变为A，而我们知道五次点反射的积还是点反射，而在此反射中，只有反射中心是不变点，那么A点非是这个点反射的中心不可了。于是本题变为怎样去求这个点反射的中心的问

题，要求一个点反射的中心，只要能求得随便一双对应点即可。因此可以随便取一点 A_0，接连施行上述五次点反射，将 A_0 变成 A_5，则 A_0A_5 线段的中点就可取为 A，故有下面的作法：

任取一点 A_0，作折线 $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$，使 K、L、M、N、P 依次是 A_0A_1、A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_5 的中点，取 A_0A_5 的中点为 A，作折线 $ABCDE$，使 K、L、M、N 依次是 AB、BC、CD、DE 的中点，连结 EA，则五边形 $ABCDE$ 为所求的五边形（图49）。

由作图已知 K、L、M、N 已经依次是 AB、BC、CD、DE 的中点，现在我们来证明 P 是 EA 的中点：

$\because \quad A_0A \parallel A_1B \parallel A_2C \parallel A_3D \parallel A_4E$

且

$$\overline{A_0A} = -\overline{A_1B} = \overline{A_2C} = -\overline{A_3D} = \overline{A_4E}$$

$$\overline{A_5A} = -\overline{A_0A}$$

$\therefore \quad \overline{A_5A} = -\overline{A_4E}$ 且 $A_5A \parallel A_4E$

因此线段 A_5A_4 与 AE 必然互相平分，由于 P 是 A_5A_4 的中点，所以 P 也是 AE 的中点。

一般地，本题有一解，但在某些情况下，所得五边形可能有些顶点要共线。

（注：上述作图法只能用于奇数边的多边形）。

18. **解** 如果点 M 已作出（图50），则 $P_1Q_1 = a$（a 为定长）。

过 Q_1 作 PM 的平行线交过 P 而与 s 平行的直线 s' 于 K，则有

$$PK = P_1Q_1 = a$$

且 K、H、Q、Q_1 共圆（H 为 s' 与

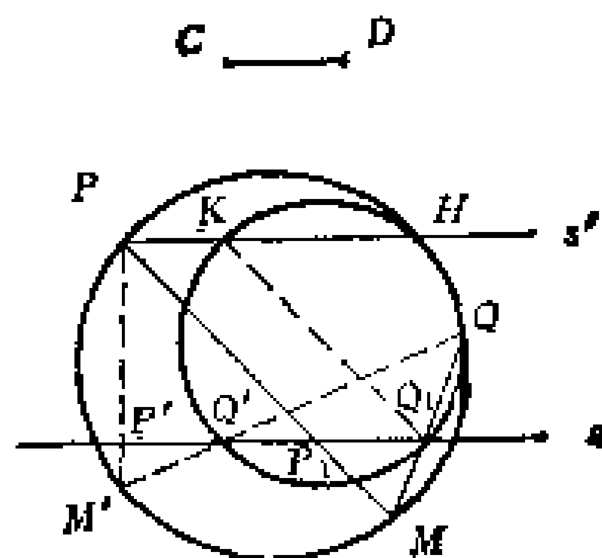


图 50

已知圆的交点）。即是说Q_1在由K、H、Q所确定的圆上，从而得到如下作图：

过P作直线s'，使$s' \parallel s$，设s'与已知圆的另一个交点为H。

在PH上截取点K，使得$PK=a$。

作出由K、H、Q三点所确定的圆，设此圆与s的一个交点为Q_1，过Q_1、Q作直线，设与已知圆的另一个交点为M，则M就是所求的点（图50）。

由于K、H、Q所确定的圆与直线s有三种位置关系：相交、相切、相离，所以此题的解的情况为：二个解、一个解和无解。

19．解　此题比较简单，留给读者自己完成。

20．解　假定直径CD已经作出（图51）。若固定O点，把$\triangle BDO$绕O旋转180°，则B与B'重合，D与C重合，则$CB'=BD$。故C必在线段AB'的中垂线上。从而有如下作图：

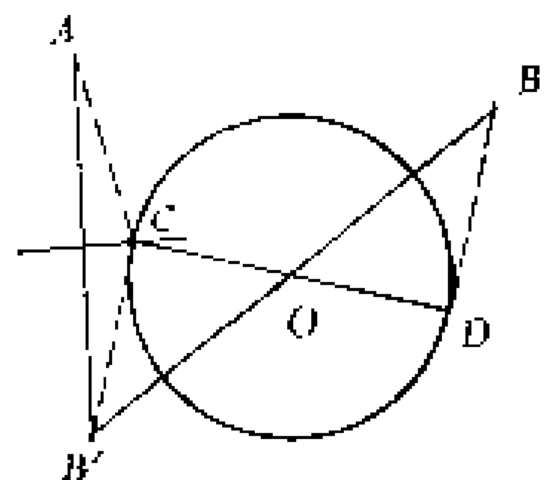


图　51

连结BO，延长BO到B'，使$OB'=BO$。连结AB'，作AB'的中垂线交$\odot O$于C，过C引直径CD，则CD就是所求的直径。

由于AB'的中垂线与$\odot O$的位置关系有三种：相交、相切、相离，故此题有二解、一解或无解。

§ 3

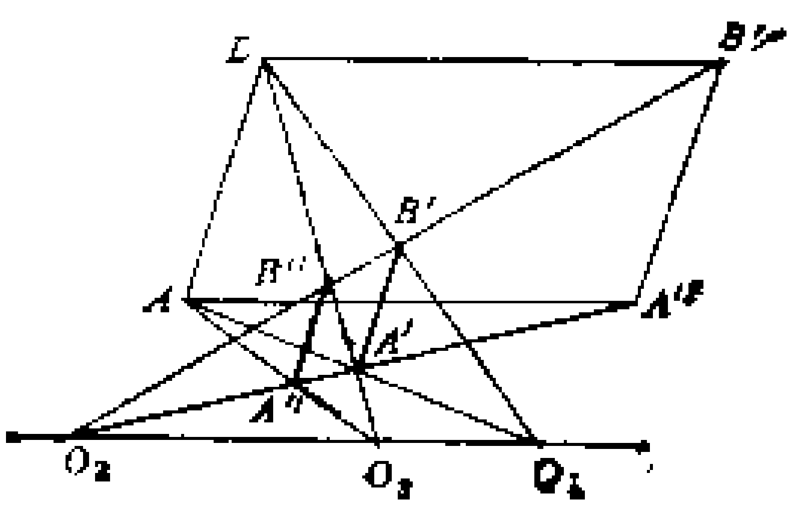


图　52

21．**证明**　根据相似轴定理：AB与$A'B'$位似（中心为O_1），$A'B'$与$A''B''$位似（中心

为O_2、$O_2 \neq O_1$），则$A''B''$与AB位似（中心为O_3）且O_1，O_2，O_3共线。

若$A''B''=AB$则是平移（即O_3为O_∞）（图51）

22. **证明** 设$\odot O(r)$和$\odot O'(r')$是任意两个半径不等的圆。

在$\odot O$中作一半径OA，而在$\odot O'$中作半径$O'A_1'$，使$O'A_1'$与OA同向平行。在$\odot O'$中再作半径$O'A_2'$，使$O'A_2'$与OA反向平行（图53）。

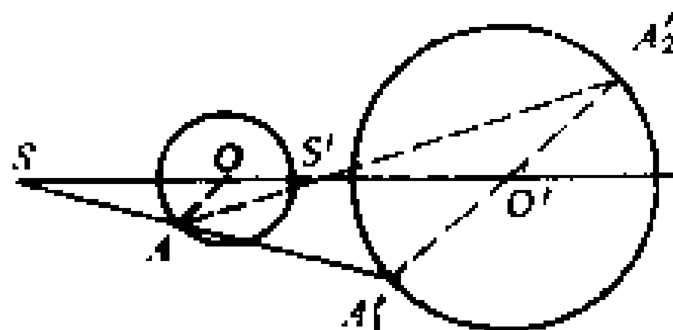


图 53

因为$r \neq r'$，所以直线AA_1'、AA_2'都与两圆的连心线OO'相交，设交点为S和S'，则S是线段OO'的外分点，S'是OO'的内分点，且

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}}=\frac{\overline{O'A_1'}}{\overline{OA}}=\frac{r'}{r},\quad \frac{\overline{S'O'}}{\overline{S'O}}=\frac{\overline{O'A_2'}}{\overline{OA}}=-\frac{r'}{r}$$

这说明了S、S'两点的位置不因A点的选择而变动。

如果以S为相似中心，$k=\frac{r'}{r}$为相似比作位似变换于$\odot O(r)$，那么O'是对应于O的点，A_1'是对应于A的点，故在此变换下，$\odot O(r)$将被变成$\odot O'(r')$。

同理，以S'为相似中心，$k'=-\frac{r'}{r}$为相似比施行位似变换，也可将$\odot O(r)$变为$\odot O'(r')$。

S叫外相似中心，S'叫内相似中心，任意两个半径不等的圆有两个相似中心。

若两圆相切，则切点是相似中心之一：内切时是外相似中心；外切时是内相似中心。

若两圆同心时，它们的两个相似中心都重合于公共的圆心。

23. **解** 假设图已作成，设$\triangle ABD$、$\triangle ACD$的内心为I，J（即AD是所求的直线），则BI、CJ的交点O就是$\triangle ABC$的内心。把A、I、J连成三角形，显然，$\angle IAJ=\frac{1}{2}\angle BAC$，边$IJ$由于$\odot I$和$\odot J$相等而平行于$BC$（$\odot I$、$\odot J$分别是$\triangle ABD$和$\triangle ACD$的内切圆）（图 54）．

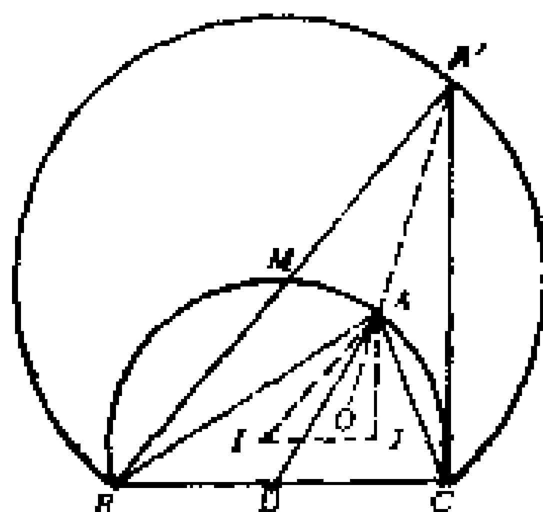


图 54

现在的难处是IJ边尚未确定．但如果我们用O做相似中心，施行位似变换，把$\triangle AIJ$放大成为$\triangle A'BC$，便可以免去这个困难．如何确定A'点的位置？

由$\angle BA'C=\frac{1}{2}\angle BAC$知$A'$点落在以$BC$为弦的一个弓形弧上且又在$OA$上，得$\triangle A'BC$后再将所作的位似变换还原便可求得$\triangle AIJ$，然后可作$AD$，所以有下面的作法：

作$\triangle ABC$的内心O和外接圆的$\overset{\frown}{BAC}$，以这弧的中点M为圆心，$MB(=MC)$为半径画弧，设此弧与半线OA交于A'，以O为相似中心，作出$\triangle A'BC$的位似图形$\triangle AIJ$，作AB关于AI的对称线AD（交BC于D），则AD便是所求作的直线(图 54)).

本题永有一解，若不限制自已知三角形的哪个顶点作直线，则共有三解．

24. **解** 由于同时确定D、E是很难的，故设法把其中一点换为定点，然后考虑另一点与设定条件的关系．比如看D点，BD是所求图形的一部分，现把D换为固定点A，使BD变为定长线段BA，这样有可能运用位

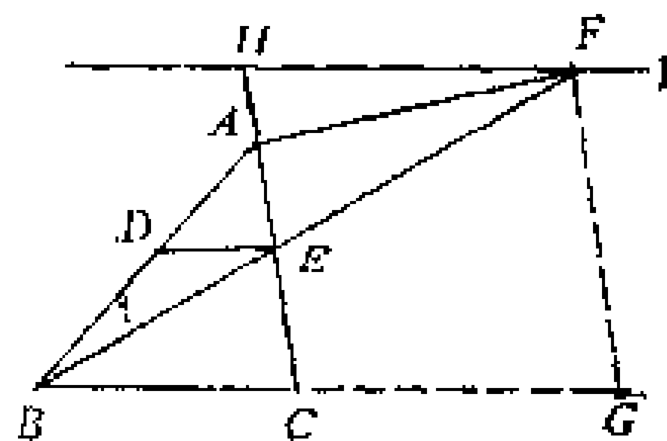


图 55

似变换来解决问题。

现设图已作出（图55）

以B为相似中心施以位似变换，命D点变为A点，而相应地假定E变为F点，C点变为G点。

∵ $BD=DE=EC$

∴ $BA=AF=FG$

即AF、FG均有定长，从而若能确定F点，则E点可得，因而D点亦得，现在来确定F点：AF即有定长，F点就落在以A为心而半径等于这个定长的圆上，又GF有定长和定向（平行于CA)，则F点又必落在平行于BC的一条直线上，而这条直线是可以求得的。一个圆一条直线足够确定F点，故有下面作法：

在半线CA上截取一线段$CH=BA$。过H引直线l，使$l\parallel BC$。

以A为心，AB为半径画弧，设此弧交l于点F，连结BF。设BF与AC交于点E，过E引ED平行于FA且交BA于D，得到的D、E就是所求的点（图55）

当$2AC>AB$，$2AB>AC$时，本题有一解，否则无解。

25．解　假设所求的圆已作出（图56），令a、b的交点为S，则S与所作的圆的中心O的连线应是a、b交角之一的平分线。问题是O如何确定。

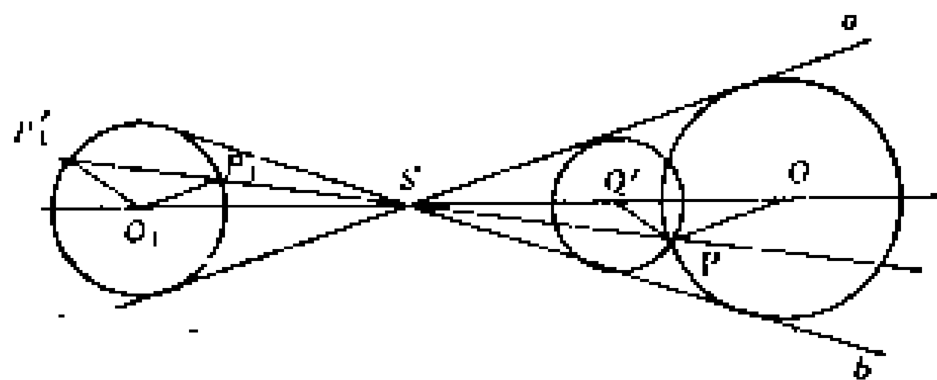


图　56

以S为相似中心施行位似变换，设$\odot O$变为$\odot O_1$，其中P_1是P的对应点（P是已知点）由于相似比可以随意选取，所以实际上O_1乃是在直线SO上任意取定的异于S的点，取定O_1后，

圆 O_1 即可作出，从而P_1将由$\odot O_1$与 SP 确定，故有下面的作法：

由于已知二直线 a 和 b 交成四个角，P 将落在其中之一内部，作出这个角的平分线. 在此平分线上任取一点O_1为圆心作一圆与 a 、b 相切. 连结 a 、b 的交点 S 与已知点 P，设SP与$\odot O_1$交于点P_1。从 P 引直线平行于P_1O_1且与角平分线交于O，则以O为心，以OP 为半径作的圆就是所求的（图56）.

若已知点 P 不与 a 、b 交点重合，此题有二解. 若 P 与 a b 交点重合，则无解。

（注：若已知点 P 恰好位于 a 、b 交角之一的平分线上，或在 a 或 b 上时。将有新的作图法，留给读者作为练习）.

26。解　此题留给读者作练习（可参考其它几何书）希望读者能用多种方法作。在此仅以图形的形式给予提示（图57）

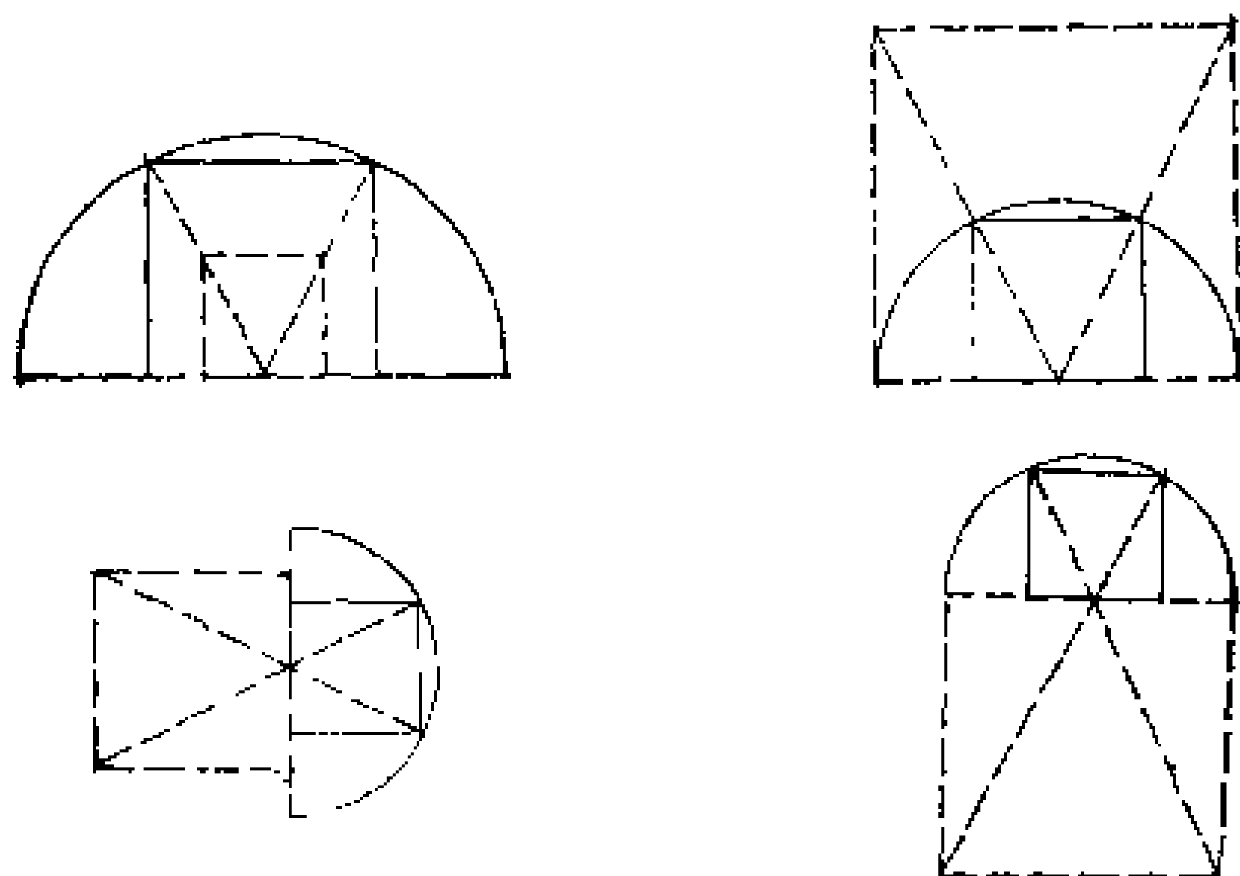


图　57

27。解　设 α 、β 为两已知角，$a+h$为一边同其上的高的和。任作一个$\triangle A'B'C'$使 $\angle B'=\alpha$、$\angle C'=\beta$.

作出$B'C'$边上的高AD'并延长到D''，使 $AD''=a+h$

过D''作一直线与$B'C'$平行交 AB' 和AC'的延长线于B''、C''。

以$B''C''$为边作正方形 $B''C''H'G'$，连结AG'交$B''C''$于G，过G作$GB\perp B''C''$交AB''于B，过B作 $BC\parallel B''C''$ 交 AC'' 于 C。

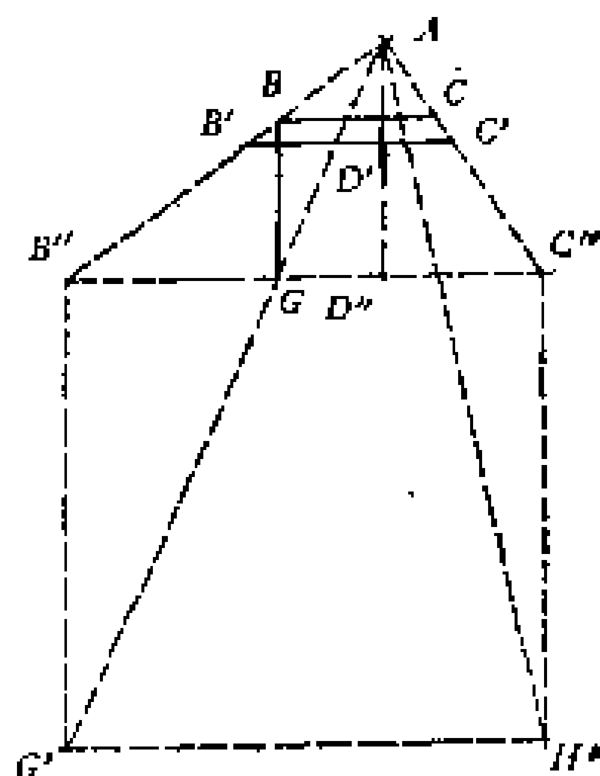


图 58

则$\triangle ABC$为所求作(图58)。

事实上：

$\because$ $BG\parallel B''G'$

$\therefore$ $BG:B''G'=AB:AB''$

$\because$ $BC\parallel B''C''$

$\therefore$ $BC:B''C''=AB:AB''=BG:B''G'$ 即

$BC:BG=B''C'':B''G'$

$\because$ $B''C''=B''G'$

$\therefore$ $BC=BG=DD''$

$\because$ $AD''=AD+DD''=AD+BC=a+h$

$\angle ABC=\angle AB''C''=\angle AB'C'=\alpha$

$\angle ACB=\angle AC''B''=\angle AC'B'=\beta$

$\therefore$ $\triangle ABC$满足所给条件

此题只要$\alpha+\beta<\pi$ 就有一解。

28. **解** 设$\angle AOB$为已知角，点M为其内部一点（图59）。

在OA边上任取一点X'，过O、M引一直线。过X'点作OB的垂线，垂足为N'，以X'为心，以线段$X'N'$为半径画弧交OM于M'。

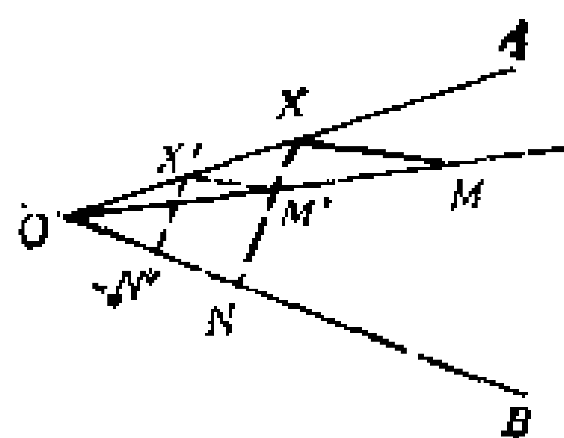


图 59

过M作$X'M'$的平行线交OA于X，则点X为所求作的点。

只要过点X作OB的垂线XN，N为垂足就会证得上面的作图是正确的，请读者自己验证一下。

由于以X'为心，以$X'N'$为半径画弧与OM直线有两个交点，所以对于OA边来说此题可有两解，同理对于OB边也有两解，故此题有四个解。

29．解　此题作法容易，留给读者去完成。

§ 4

30．解

$$\sigma_1\sigma_2:\begin{cases}x''=(x-y)+2(x+2)+3\\ y''=2(x-y)+5(x+2)-1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x''=3x-y+7\\ y''=7x-2y+9\end{cases}$$

$$\sigma_2\sigma_1:\begin{cases}x''=(x+2y+3)-(2x+5y-1)\\ y''=(x+2y+3)+2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x''=-x-3y+4\\ y''=x+2y+5\end{cases}$$

若求σ_1^{-1}和σ_2^{-1}，只须从σ_1和σ_2中求出x、y即可，故有：

$$\sigma_1^{-1}:\begin{cases}x=5x'-2y'-17\\ y=-2x'+y'+7\end{cases}$$

$$\sigma_2^{-1}:\begin{cases}x=y'-2\\ y=-x'+y'-2\end{cases}$$

31．解　设$A(1,2)$，$B(3,6)$，$C(-2,-4)$，$A'(-1,-1)$，$B'(0,0)$，$C'(2,2)$。

因为A、B、C共线，A'、B'、C'也共线，计算它们的简单比，则

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}=\frac{-2-1}{-2-3}=\frac{3}{5}$$

$$(A'B'C') = \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{2+1}{2-0} = \frac{3}{2}$$

由于 $(ABC) \neq (A'B'C')$，因此这样的仿射变换不存在。

（注：此题也可用仿射变换公式验证，这个方法请读者作一下）

32. 解　（2）、（3）是仿射性质。

（1）、（4）不是仿射性质。

33. 解　只有当 P 是三角形三条中线的交点时，P 的象是 $\triangle ABC$ 的象 $\triangle A'B'C'$ 三条中线的交点，而其它几种情况则否。

例如等边三角形 ABC，设 P 是其三边中垂线的交点，显然 P 也是 $\triangle ABC$ 的三条高及三条角分线的交点。由于等边三角形与任一三角形仿射等价，不仿设一非等边 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 仿射等价，由于仿射变换不保角，故 P 的象一般不是 $\triangle A'B'C'$ 的三条中垂线交点。

对于其它两种情况，读者可仿此举反例。

34. 证明　设仿射变换式为

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases} \quad (|a_{ij}| \neq 0) \qquad (1)$$

要决定仿射变换，只须确定（1）式中的参数 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}、a_1、a_2。

设 $A(x_1, y_1)$，$A'(x_1', y_1')$；$B(x_2, y_2)$，$B'(x_2', y_2')$；$C(x_3, y_3)$，$C'(x_3', y_3')$ 为不共线的三对对应点。将上面三对对应点坐标代入（1）式，有

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_1 \\ x_2' = a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_1 \\ x_3' = a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_1 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} y'_1 = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_2 \\ y'_2 = a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_2 \\ y'_3 = a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_2 \end{cases} \qquad (3)$$

从前面三个方程看 x'_1、x'_2、x'_3 不全为0，否则 A'、B'、C' 共线，同理后三个方程中 y'_1、y'_2、y'_3也不全为0。

又

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

所以方程组（2）可决定唯一一组a_{11}，a_{12}，a_1的解，同样方程组（3）可决定唯一一组 a_{21}，a_{22}，a_2 的解。所以不共线的三对对应点，唯一地决定一个仿射变换。

35. 证明　设已知三点$A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$，$A_3(x_3, y_3)$在一条直线上，且$(A_1A_2A_3) = r$。经过仿射变换

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases}$$

得 $A'_1(x'_1, y'_1)$，$A'_2(x'_2, y'_2)$，$A'_3(x'_3, y'_3)$。由于仿射变换保持点与直线之间的结合性，所以A'_1、A'_2、A'_3共线。

$$(A'_1A'_2A'_3) = \frac{A'_1A'_3}{A'_2A'_3} = \frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2}$$

$$= \frac{a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_1)}{a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_1 - (a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_1)}$$

$$= \frac{a_{11}(x_3 - x_1) + a_{12}(y_3 - y_1)}{a_{11}(x_3 - x_2) + a_{12}(y_3 - y_2)}$$

$$= \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = (A_1A_2A_3)$$

故简单比是仿射不变量。

36. 解　设对应点的坐标为 x，x'，则由于仿射变换不改变简单比，所以有

$$(1\ 2\ x) = (-1\ -2\ x')$$

化简得

$$x + x' = 0$$

故其不变点为$x = 0$

37．解　设仿射变换为

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases}$$

则有

$$x' + y' = (a_{11} + a_{21})x + (a_{12} + a_{22})y + a_1 + a_2$$

$\because$　$x = 0$ 对应$x' + y' = 0$

$\therefore$　$a_{12} + a_{22} = 0$　　（1）

$a_1 + a_2 = 0$　　（2）

又有

$$x' - y' = (a_{11} - a_{21})x + (a_{12} - a_{22})y + a_1 - a_2$$

$\because$　$y = 0$对应$x' - y' = 0$

$\therefore$　$a_{11} - a_{21} = 0$　　（3）

$a_1 - a_2 = 0$　　（4）

再有

$$x' + 2y' - 1 = (a_{11} + 2a_{21})x + (a_{12} + 2a_{22})y + a_1 + 2a_2 - 1$$

$\because$　$x + 2y - 1 = 0$ 对应$x' + 2y' - 1 = 0$

$\therefore$　$a_{11} + 2a_{21} = \lambda$　　（5）

$a_{12} + 2a_{22} = 2\lambda$　　（6）

$a_1 + 2a_2 - 1 = -\lambda$　　（7）

解由（1）——（7）组成的方程组得

$$a_1 = a_2 = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$a_{11} = a_{21} = \frac{1}{3}$$

$$a_{12} = -a_{22} = -2$$

所以所求的变换为

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}x - 2y \\ y' = \dfrac{1}{3}x + 2y \end{cases}$$

38. 解　设所求的仿射变换为

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 \end{cases}$$

在直线 $x+2y-1=0$ 上任取两点：$(1,0)$，$(-1,1)$ 则所求的变换将三点 $(1,0)$，$(-1,1)$，$(1,-1)$，变成 $(1,0)$，$(-1,1)$，$(-1,2)$ 三点，将这三对对应点坐标分别代入变换式中，有

$$\begin{cases} 1 = a_{11} + a_1 \\ 0 = a_{21} + a_2 \\ -1 = -a_{11} + a_{12} + a_1 \\ 1 = -a_{21} + a_{22} + a_2 \\ -1 = a_{11} - a_{12} + a_1 \\ 2 = a_{21} - a_{22} + a_2 \end{cases}$$

解上面方程组得：

$$a_{11} = a_{12} = 2,\quad a_1 = -1$$

$$a_{21} = -\frac{3}{2},\quad a_{22} = -2,\quad a_2 = \frac{3}{2}$$

因此所求的变换为

$$\begin{cases} x' = 2x + 2y - 1 \\ y' = -\dfrac{3}{2}x - 2y + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

39. 解　设所求的不变直线为：

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A、B\text{ 不同时为}0)$$

即在所给的变换下，$Ax+By+C=0$ 对应 $Ax'+By'+C=0$

$\because\quad Ax'+By'+C=A(7x-y+1)+B(4x+2y+4)+C$

$$=(7A+4B)x+(-A+2B)y+(A+4B+C)$$

$\therefore\quad 7A+4B=A\lambda \qquad (1)$

$-A+2B=B\lambda \qquad (2)$

$A+4B+C=C\lambda \qquad (3)$

从（1），（2），（3）消去A、B、C 得：

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

展开化简得：

$$(1-\lambda)(7-\lambda)(2-\lambda)+4(1-\lambda)=0$$

解之得

$$\lambda=1、3、6$$

由于当$\lambda=1$时，$A=B=0$，因此不对应不变直线，分别以$\lambda=3$、6，代入（1），（2），（3）中得：

$$A=-B,\quad C=\frac{3}{2}B$$

和

$$A=-4B,\ C=0$$

所以不变直线为：

$$2x-2y-3=0$$

和

$$4x-y=0$$

40. **证明** 设在使二向量内积不变的仿射变换下，点A变成点A'，点B变成点B'，则

$$d^2(A',B')=\overrightarrow{A'B'}^2=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'B'}$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2$$
$$=d^2(A,B)$$

所以有 $d(A',B')=d(A,B)$（d表示两点间的距离）由于这个变换保持两点间距离不变，因此它是正交变换。

41．解　菱形的对边平行性、对角线互相平分性和对边相等性在仿射变换下保持不变；邻边相等性、对角线互相垂直性和对角线平分菱形对顶角的性质都被破坏。

42．解　设所求的仿射变换为

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_1 \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_2 \end{cases}$$

由它把点（0，0）变成点（2，2），可知$a_1=a_2=2$。

因为它把抛物线 $y^2=2x$变成自身，故

$$\begin{cases} x'=a_{11}\dfrac{y^2}{2}+a_{12}y+2 \\ y'=a_{21}\dfrac{y^2}{2}+a_{22}y+2 \end{cases}$$

应满足 $y'^2=2x'$，于是

$$\left(a_{21}\frac{y^2}{2}+a_{22}y+2\right)^2=2\left(a_{11}\frac{y^2}{2}+a_{12}y+2\right)$$

即

$$a_{21}^2\frac{y^4}{4}+a_{21}a_{22}y^3+(a_{22}^2+2a_{21})y^2+4a_{22}y+4$$
$$=a_{11}y^2+2a_{12}y+4$$

对比方程两端的系数，得

$$a_{21}=0,a_{11}=a_{22}^2,\quad a_{12}=2a_{22}$$

现令 $\lambda=a_{22}$，则$a_{11}=\lambda^2$，$a_{12}=2\lambda$，因此，所求的仿射变换为：

$$\begin{cases} x'=\lambda^2x+2\lambda y+2 \\ y'=\lambda y+2 \end{cases}$$

它依赖于参数λ。

43．证明　设仿射变换式为

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_1 \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_2 \end{cases}\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

设$\triangle ABC$三顶点坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，其对应点的坐标分别为(x'_1, y'_1)，(x'_2, y'_2)，(x'_3, y'_3)。

对于三角形的面积，仍然在笛氏直角坐标系中计算（即把对应于主方向的一对直线取作坐标轴）。

$\triangle ABC$的面积为：

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

经过仿射变换后：

$$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_1 & a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_2 & 1 \\ a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_1 & a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_2 & 1 \\ a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_1 & a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{22}y_1 & 1 \\ a_{11}x_2 & a_{22}y_2 & 1 \\ a_{11}x_3 & a_{22}y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}y_1 & a_{21}x_1 & 1 \\ a_{12}y_2 & a_{21}x_2 & 1 \\ a_{12}y_3 & a_{21}x_3 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})S_{\triangle ABC}$$

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

由于仿射变换确定后，其系数行列式是一常值，故三角形面积比是仿射变换下的不变量。

44．证明　设在仿射变换下，点A、B的对应点分别为

A'、B'. 在直线AB上任取一点X，设X的对应点为X'，由于题设知$A' \equiv A$，$B' \equiv B$再由于结合性知 A、B、X、X'共线

$\because \quad (ABX) = (ABX')$

$\therefore \quad X' \equiv X$

即直线AB上每个点都是不变点.

45. 解　设$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是透视仿射对应三角形，k和h是两已知直线（图60）.

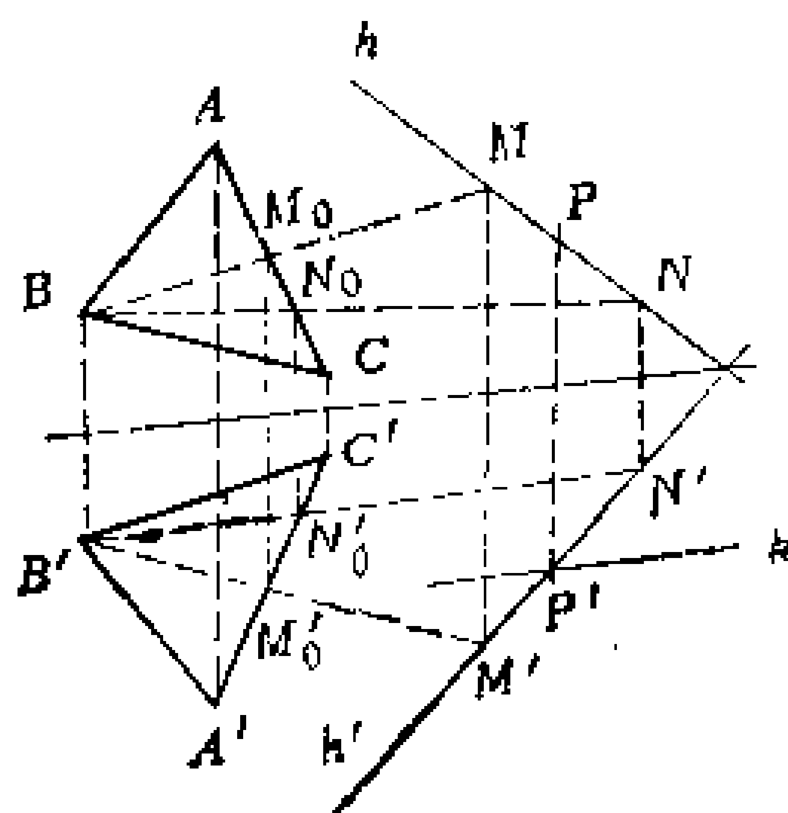


图　60

由于k和h并不一定是仿射对应的，因而首先作出h在已给出的仿射对应下的对应直线h'，设h'与k的交点为P'，那么P'的原象点P一定在h上，则问题得到解决，故有下面作法：

在直线h上任取二点M、N，连结BM、BN与AC分别交于M_0和N_0（若不与AC边交可与另一顶点连结，使其连线与对边交）. 过M_0、N_0作与透视方向平行的直线交$A'C'$于M_0'、N_0'，作直线$B'M_0'$和$B'N_0'$.

过M、N作与透视方向平行的直线MM'和NN'，设MM'与$B'M_0'$交于M'，NN'与$B'N_0'$交于N'，过M'、N'作直线h'，则h'就是h的对应直线.

设h'与k交于P'，过P'作与透视方向平行的直线交h于P，则P、P'就是h与k上的一对对应点. 显然这个作图是合理的.

由于h'与k有三种位置关系：相交、平行、重合，故对应点对可分别作出一对，没有对应点对和无穷多对.

46. 解　设$A'B'$，$C'D'$为椭圆的一对共轭直径，M'是一已知点（图61）为了作出过点M'的椭圆的切线，我们首先把椭圆看作是某一圆的仿射等价图形，那么过M'的椭圆的切

线一定是圆的某一条切线的对应直线，因此我们能作出这条椭圆的切线的原象来问题就可以得到解决，所以有下面的作图：

以 $A'B'$ 为直径作一圆与以 $A'B'$ 为直径的椭圆仿射等价

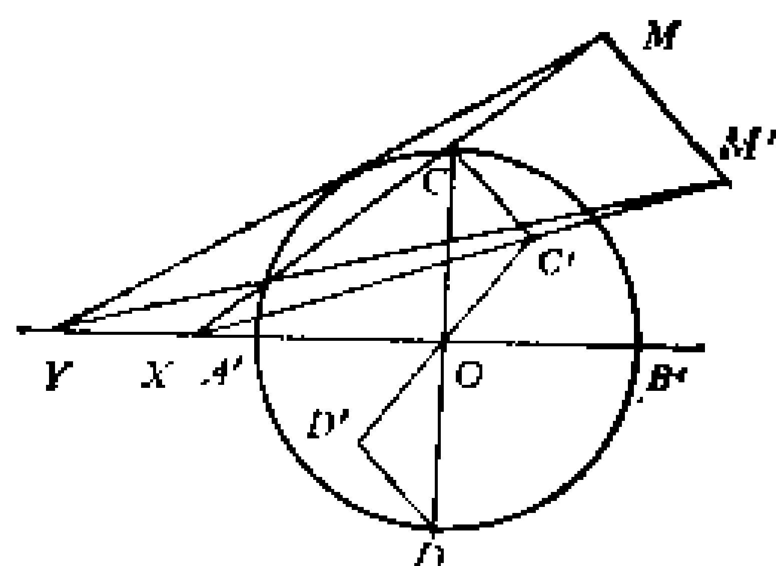


图 61

引直线 $M'C'$ 与 $A'B'$ 交于 X，引直线 XC，过 M' 作 CC' 的平行线交 XC 于 M，则 M 就是 M' 的对应点。

过 M 作圆的切线 YM 交 $A'B'$ 于 Y，引直线 YM'，则直线 YM' 就是所求的切线。

事实上，由仿射对应的同素性知圆的切线 MY 对应椭圆的切线 $M'Y$，因 MY 过点 M，故 $M'Y$ 必过 M'，可见 $M'Y$ 为所求的切线。

47．解 设 $O'E$，$O'F$ 为椭圆的一对共轭方向，$C'D'$ 为椭圆的长轴（图62）．

取与 $O'E$、$O'F$、$C'D'$ 三直线都相交的直线 s（不与 $C'D'$ 垂直）．设 s 与 $O'E$、$O'F$、$C'D'$ 分别交于 E、F、M、并与过 O' 而与 $C'D'$ 垂直的直线交于 N．

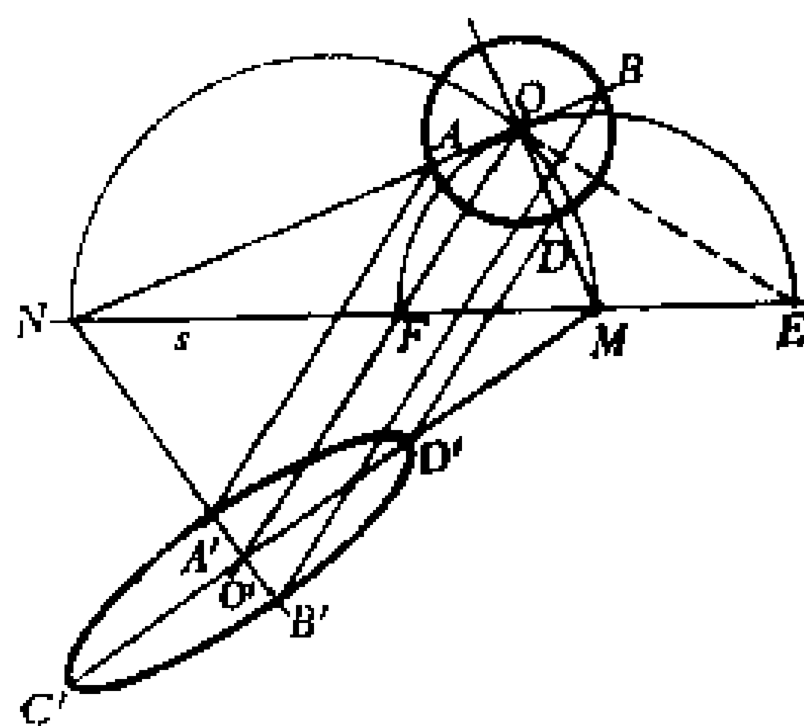


图 62

以 MN、EF 分别为直径作圆，设交点为 O，以 O 为 O' 的对应点，以直线 NE 为透视轴则确定了透视仿射变换。过 D' 作 $O'O$ 的平行线交 OM 于 D，则 D 就是 D' 的对应点。以 O 为心以 OD 为半径作圆，则此圆与椭圆仿射等价。过 N、O 引直

线与⊙O交于A、B两点，分别过A、B引直线$O'O$的平行线与$O'N$交于A'、B'，则线段$A'B'$就是椭圆的短轴。

事实上，由于⊙O的直径AB与位于OM上的⊙O的直径垂直，而$A'B'$、$C'D'$分别是它们的对应直线，所以$A'B'$、$C'D'$是椭圆的共轭直径。由于$\angle NO'M$为半圆上的圆周角，所以有$A'B' \perp C'D'$，所以$A'B'$的确是椭圆的短轴。

48. **解** 设直线XY为透视仿射轴，A、A'为一对对应点，B为平面上任意一点。

首先将B视为原象点。

连结AB交轴于P点。（也可以与轴不交）连结$A'P$，过点B作AA'的平行线交$A'P$于B'，则点B'就是B的对应点(图63)。

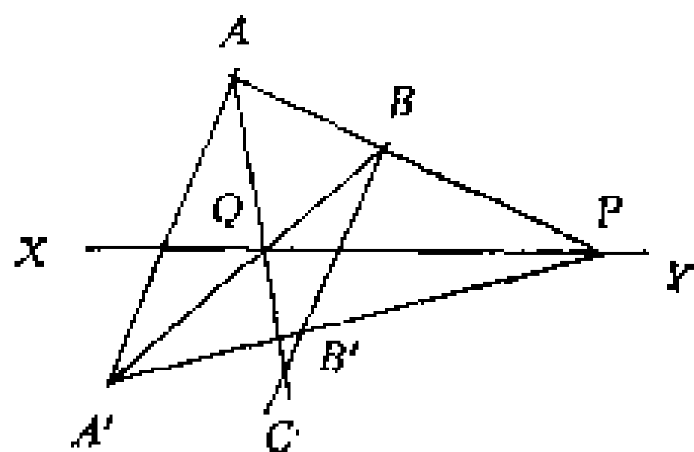


图 63

其次将B视为象点。连结$A'B$交XY于Q（也可以与轴不交），连结AQ，过B作AA'的平行线交AQ于C，则C就是B的原象点。

事实上，A与A'为对应点，P为二重点，所以AB与$A'B'$为一对对应直线且$AA' \parallel BB'$，所以B'为B的对应点，同理可知C是B的原象点。

49. **证明** 设互相平分的任意两个线段为$A'B'$、$C'D'$，交点为O，那么可以以$A'B'$为直径作一个⊙O，作直径CD垂直于$A'B'$，在以$A'B'$为透视仿射轴、CC'为透视方向的透视仿射对应下，⊙O上的点A、B、C、D变为椭圆上的点A'（与A重合）、B'（与B重合）C'、D'。

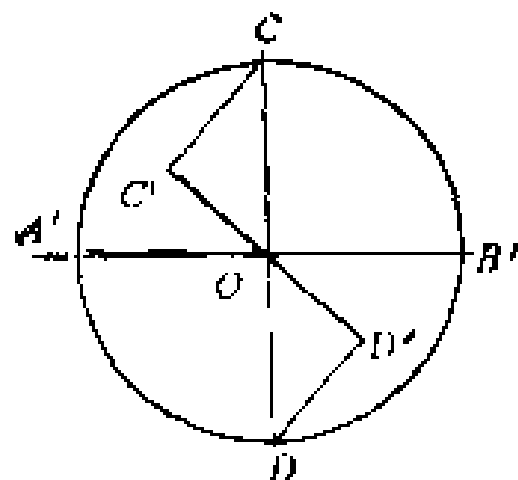


图 64

即⊙O的共轭直径变为椭圆的两条直径，显然$A'B'$与$C'D'$也共轭（图64）。

50　解　设已知圆为⊙O，AB、CD是⊙O的一对共轭直径，任取与AB、CD所在直线相交的直线s，其交点为K、L，以线段KL为直径作一圆（显然此圆过圆心O），在此圆上任取一点O'，以直线s为透视仿射轴，以O与O'为一对对应点，则确定了一个透视仿射对应。

在此仿射对应下，OL对应$O'L$、OK对应$O'k$。过A、B，C、D引直线OO'的平行线，分别交$O'K$、$O'L$于A'、B'、C'，D'、则$A'B'$,$C'D'$就是椭圆的轴（图65）。

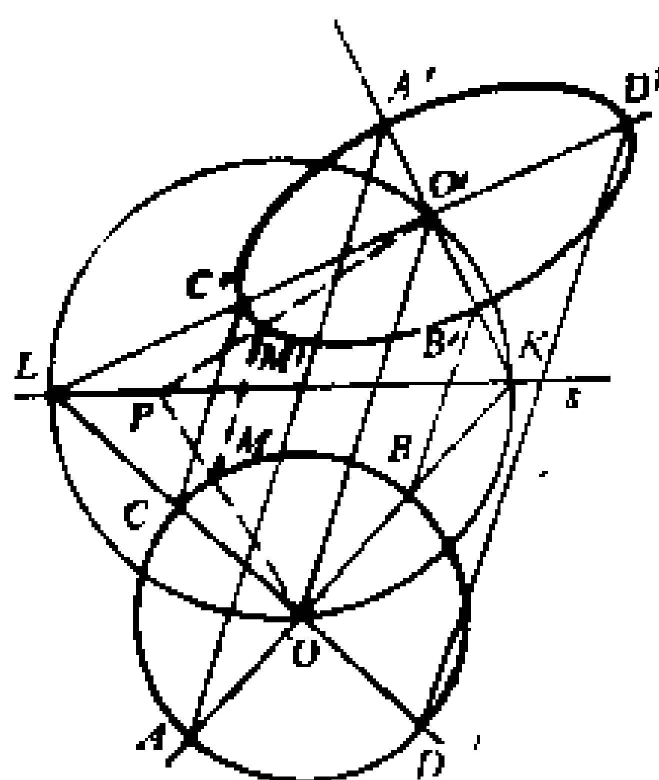


图　65

在⊙O上任取一点M，作直线OM交s于P，连结$O'P$。

过M引直线OO'的平行线交$O'P$于M'则M'就是M的对应点，由于M是⊙O上的点，所以M'是椭圆上的点。由于M的任意性，故可以仿此法作出椭圆上的任意多个点。

第五章　射影变换群与射影几何习题解答

§ 1

1　**证明**　设A、B、C、D、E是直线s上的五个点，点A和点B把直线s上的点集合分为两组，Ⅰ组是不含有无穷远点的线段AB上的点，Ⅱ组是含有无穷远点的线段$AP_\infty B$上的点

∵　A、$B\div C$、D

∴　C、D分别在Ⅰ和Ⅱ组内

不妨设C在Ⅰ组内，D在Ⅱ组内。又因为，A、$B\div C$、E因两C、E也分别在不同的组内，由于C已在Ⅰ组内，故E必在Ⅱ组内。

因为D、E同在Ⅱ组内，所以A、$B\doteq D$、E。

2．**解**　仿照上题的证明，请读者自己完成。

3．（1）**解**　由于所给诸点都不是无穷远点，所以对各点的齐次坐标中的x_3取作1，则各点的齐次坐标为：

$$(0,0,1),\ (1,0,1),\ (0,1,1,),\ \left(2,-\frac{5}{3},1\right)$$

（2）　**解**　由于以$y:x=x_2:x_1$为方向的一条直线上的无穷远点的齐次坐标为$(x_1,x_2,0)$，因此由已知条件可知以$\frac{3}{4}$为方向的无穷远点齐次坐标为$(4,3,0)$．

（3）**解**　由于已知直线方程可写成$y=-3x$，可知其方向为-3，由（2）知此直线上的无穷远点的齐次坐标为$(1,-3,0)$．

（4）**解**　由于x轴方程为$y=0$，所以x轴上的无穷远点

的齐次坐标为$(a, 0, 0)$，其中$a \neq 0$。

由于y轴方程为$x=0$，所以y轴上的无穷远点的齐次坐标为（$0, b, 0$），其中$b \neq 0$。

4．解

$$\because \quad x=\frac{x_1}{x_3}, \quad y=\frac{x_2}{x_3}$$

∴ 各点的非齐次坐标为：

$$(-2,\ -4), \qquad \left(\frac{\sqrt{10}}{2},\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right),$$

（0，1，0）没有非齐次坐标，$\left(0, \frac{4}{3}\right)$

5．（1） 解 原方程可化为：$y=-x+4$，所以此直线上的无穷远点为（$1,-1,0$）。

（2） 解 原方程可化为：$y=-\frac{1}{2}x$，所以此直线上的无穷远点为（$2,-1,0$）。

（3） 解 原方程可化为：$x=-5$，所以此直线上的无穷远点为（$0,1,0$）

6．解 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的齐次坐标方程，应该是用$\frac{x_1}{x_3}$，$\frac{x_2}{x_3}$分别去代替原方程中的$x$和$y$后所得到的方程：

$$\frac{\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2}{b^2}=1$$

即

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-x_3^2=0$$

用同样方法可以求得虚椭圆、双曲线、抛物线的齐次坐标方程分别为：

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+x_3^2=0$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-x_3^2=0$$

$$x_2^2-2px_1x_3=0$$

下面求这四种曲线与无穷远直线l_∞的交点。

由于l_∞的方程为$x_3=0$，则椭圆与l_∞的交点是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}-x_3^2=0\\ x_3=0\end{cases}$$

的解，解上面的方程组得

$$x_1'=\frac{a}{b}ix_2,\quad x_1''=-\frac{a}{b}ix_2,\ x_3=0$$

故交点坐标为$(a,-bi,0)$，$(a,bi,0)$

同理可以求得虚椭圆与l_∞的交点同上。

求双曲线与l_∞的交点：解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{x_2^2}{b^2}-x_3^2=0\\ x_3=0\end{cases}$$

得

$$x_1'=\frac{a}{b}x_2,\quad x_1''=-\frac{a}{b}x_2,\quad x_3=0$$

所以交点坐标为$\left(\frac{a}{b},\ 1,\ 0\right)$，$\left(-\frac{a}{b},\ 1,\ 0\right)$

求抛物线与l_∞的交点：解方程组

$$\begin{cases}x_2^2-2px_1x_3=0\\ x_3=0\end{cases}$$

得

$$x_2=x_3=0,\ x_1=\text{非零的任意数}$$

所以交点坐标为$(x_1,0,0)$，其中$x_1\neq0$。

7．解　由于三角形顶点是三边两两相交的三个交点，所以顶点坐标分别是下面三个方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=0\\3x_1-4x_2+2x_3=0\end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=0\\4x_1+x_2-3x_3=0\end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases}3x_1-4x_2+2x_3=0\\4x_1+x_2-3x_3=0\end{cases} \quad (3)$$

的解。

解方程组（1）、（2）、（3）分别得到下面的三组解：

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{6}{11}x_3\\x_2=\dfrac{1}{11}x_3,\end{cases} \quad \begin{cases}x_1=2x_3\\x_2=-5x_3,\end{cases} \quad \begin{cases}x_1=\dfrac{10}{19}x_3\\x_2=\dfrac{17}{19}x_3\end{cases}$$

所以三角形顶点坐标分别为：

$(-6,1,11)$，$(2,-5,1)$，$(10,17,19)$.

8．解　x 轴方程为 $y=0$，也可以改写成

$$0\cdot x_1+x_2+0\cdot x_3=0$$

所以 x 轴的线坐标为 $(0,1,0)$.

y 轴方程为 $x=0$，也可以改写成

$$x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=0$$

所以 y 轴的线坐标为 $(1,0,0)$.

无穷远直线方程为 $x_3=0$，也可以改写成

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+x_3=0$$

所以无穷远直线的线坐标为 $(0,0,1)$.

过原点斜率为 4 的直线方程为 $y=4x$，也可以改写成

$$4x_1-x_2+0x_3=0$$

所以过原点斜率为 4 的直线的线坐标为 $(4,-1,0)$

9．解　因为直线的线坐标是直线的点坐标方程中 x_i $(i=1,2,3)$ 的系数，所以所给的各线坐标所表示的直线的点坐标方程为：

$x_2+x_3=0$

$x_1+x_2-x_3=0$

$x_1+x_3=0$

$x_1-x_2=0$

10．（1） 解 因为x轴上的无穷远点坐标为（1, 0, 0)，所以此点的线坐标方程为

$u_1=0$

（2）解 因为y轴上的无穷远点坐标为（0, 1, 0），所以此点的线坐标方程为

$u_2=0$

（3）解 因为以$-\frac{1}{2}$为方向的无穷远点坐标为（2, -1, 0），所以此点的线坐标方程为

$2u_1-u_2=0$

（4）解 点(2, 4, -3)的线坐标方程为

$2u_1+4u_2-3u_3=0$

11．（1）解 （解法一）设实直线方程为$Ax_1+Bx_2+Cx_3=0$此直线通过点(1, $-i$, 2)，那么此直线必过点（1, i, 2）将这两个点坐标代入所设的直线方程中得

$$\begin{cases}A-iB+2C=0\\A+iB+2C=0\end{cases}$$

解之得

$A=-2C$，$B=0$

所以所求的直线方程为

$2x_1-x_3=0$

（解法二）根据定义，这点的线坐标方程为

$u_1-iu_2+2u_3=0$

过这点的实直线坐标为（2, 0, -1），化成点坐标方程为

$2x_1-x_3=0$

（解法三）因为过点(1, $-i$, 2)的实直线必通过点（1, i, 2）

故此实直线方程为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -i & 2 \\ 1 & i & 2 \end{vmatrix} = 0$$

整理得 $2x_1 - x_3 = 0$。

（2） 解 （解法一）根据线坐标的定义，这一直线的点坐标方程是

$$ix_1 + 2x_2 + (1-i)x_3 = 0$$

设其上实点为(a_1, a_2, a_3)，则它满足上面方程，则有

$$ia_1 + 2a_2 + (1-i)a_3 = 0$$

即

$$2a_2 + a_3 + (a_1 - a_3)i = 0$$

因此

$$\begin{cases} 2a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 - a_3 = 0 \end{cases}$$

解之得

$$a_1 = a_3 \qquad a_2 = -\frac{1}{2}a_3$$

所以实点为：（2，－1，2）．

（解法二）因为直线 $(i, 2, 1-i)$上的实点是此直线与其共轭直线 $(-i, 2, 1+i)$ 的交点，而这二直线的点坐标方程分别为：

$$ix_1 + 2x_2 + (1-i)x_3 = 0 \qquad (1)$$

$$-ix_1 + 2x_2 + (1+i)x_3 = 0 \qquad (2)$$

解由（1）、（2）构成的方程组得

$$x_1 = x_3, \qquad x_2 = -\frac{1}{2}x_3$$

所以实点为：（2，－1，2）

12．证明 设两复点为x、y，所确定的复直线为l；x、y的共轭复点为$\overline{x}$、$\overline{y}$，则由第五章定理5.2知

$$\overline{x} \in \overline{l}, \quad \overline{y} \subset \overline{l}$$

其中$\overline{l}$为 l 的共轭复直线，故由$\overline{x}$、$\overline{y}$所确定的直线是 l 的共轭复直线。

13. **证明** （证法一）求出过$(1+i, -1+i)$、$(1, 1+i)$的直线方程：

$$\frac{x-1}{1+i-1} = \frac{y-(1+i)}{(-1+i)-(1+i)}$$

即

$$2x+iy-i-1=0$$

因为点 $(i, -1-i)$的坐标满足上面方程，所以给出的三点共线。

（证法二）

$$\because \begin{vmatrix} 1+i & -1-i & 1 \\ 1 & 1-i & 1 \\ i & -1-i & 1 \end{vmatrix} = (1+i)^2+i(-1+i)+(-1-i) \\ -i(1+i)-(1+i)(-1-i) \\ -(-1+i) \\ =0$$

$\therefore$ 所给出的三点共线。

14. **解** 解方程组

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2=5x_3^2 & (1) \\ (x_1-3x_3)^2+x_2^2=8x_3^2 & (2) \end{cases}$$

由（1）得$x_2^2=5x_3^2-x_1^2$，代入（2）中得

$$(x_1-3x_3)^2+5x_3^2-x_1^2=8x_3^2$$

整理得：

$$x_3(x_3-x_1)=0$$

$$x_3'=0, \quad x_3''=x_1$$

将$x_3'=0$代入（1）得

$$x_2'=ix_1, \quad x_2''=-ix_1,$$

将$x_3''=x_1$代入（1）得

$x_2''' = 2x_1$,　$x_2'''' = -2x_1$

所以两圆的四个交点为：

(1,i,0)，　(1,$-i$,0)

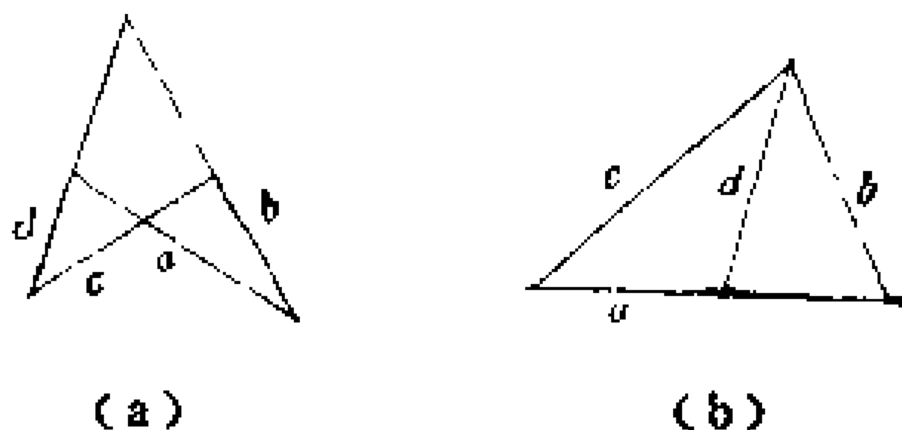
(1,2,1)，　(1,-2,1)

15．解　原图形（a）：在同一平面上四点A、B、C、D（无三点共线）其中两两相连，得六条直线。

对偶图形（a）：在同一平面上四条直线a、b、c、d（无三条共点）其中两两相交得六个点（图66(a)）。

原图形（b）：三点形ABC及A与对边上一点D的连线。

对偶图形（b）：三线形abc及a与过对顶点直线d交点（图66（b））。



（a）　　（b）

图66

16．解　"设一个变动的三线形，它的两顶点各在一定直线上，而三边始终通过共线的三个定点，那么第三个顶点也在一定直线上。"

§2

17．解　若，$(ABM) = -2$，则有

$$\frac{AM}{BM} = -2,\quad AM = -2BM$$

只要把线段AB三等分，则第二个分点就是所求的点M（图67）。

若，$(ABM) = -1$，则有

$$\frac{AM}{BM} = -1,\quad AM = -BM$$

只要把线段AB二等分，则中点就是所求的点M（图68）。

若 $(ABM)=-\frac{1}{2}$，则有

$$\frac{AM}{BM}=-\frac{1}{2}，\ 2AM=-BM$$

只要把线段AB三等分，则第一个分点就是所求的点M(图69)。

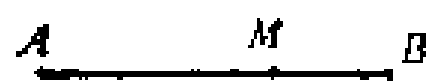


图67

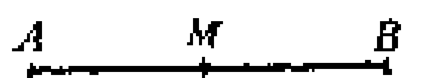


图68

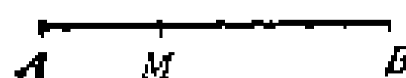


图69

若，$(ABM)=0$，则有

$AM=0$

因此点M与A点重合（图70）

若 $(ABM)=\frac{1}{2}$，则有

$$\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}，\ 2AM=BM$$

只要把线段BA延长至M，使$BA=AM$，则点M就是所求的点（图71）。

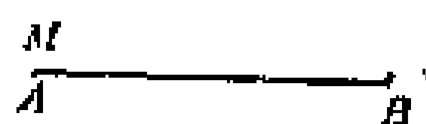


图70

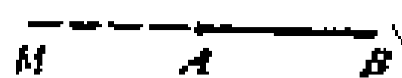


图71

若$(ABM)=1$，则有

$$\frac{AM}{BM}=1，\ AM=BM$$

因此M为无穷远点（图72）。

若 $(ABM)=2$，则有

$$\frac{AM}{BM}=2，\ AM=2BM$$

只要把线段AB延长至M，使$BM=AB$，则点M就是所求的点（图73）。

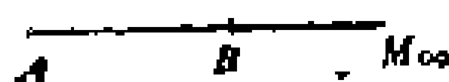


图72

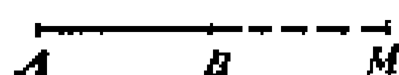


图73

18　证明　$(AB,PQ)(AB,QR)$

$$=\frac{(ABP)}{(ABQ)}\cdot\frac{(ABQ)}{(ABR)}$$

$$=\frac{(ABP)}{(ABR)}=(AB,PR)$$

19　解　设，$AB=BC=CD$，$(AB,CD)=\lambda$，则有

$$(AB,CD)=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$$

$$=\frac{2\times 2}{1\times 3}$$

$$=\frac{4}{3}=\lambda$$

$$(AB,DC)=\frac{1}{\lambda}=\frac{3}{4}$$

$$(AC,BD)=1-\lambda=-\frac{1}{3}$$

$$(AC,DB)=\frac{1}{1-\lambda}=-3$$

$$(AD,CB)=1-\frac{1}{1-\lambda}=4$$

$$(AD,BC)=\frac{\lambda-1}{\lambda}=\frac{1}{4}$$

20.　解　P_1、P_2、P_3 的非齐次坐标为：(1,1)，(1,-1)，(1,0)

设P_4的坐标为(x_4,y_4)

∵　$(P_1P_2,P_3P_4)=3$

∴　$(P_1P_2,P_3P_4)=\frac{(0-1)(y_4+1)}{(0+1)(y_4-1)}=\frac{y_4+1}{1-y_4}=3$

∴　$y_4=\frac{1}{2}$

由于P_1、P_2、P_3、P_4共线，而P_1、P_2、P_3都在 $x=1$这条直

线上，所以 P_4 也应在此直线上，所以有 $x_4=1$。则P_4点坐标为 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

21. **解** 设D点坐标为 x_4

∵ $(AB,CD)=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$

$$=\frac{(-2)\cdot(x_4-1)}{(-3)\cdot(x_4-0)}$$

$$=\frac{2\cdot(x_4-1)}{3x_4}=-3$$

∴ $x_4=\frac{2}{11}$

22. **证明** 根据交比的性质知 A、B、C、D四点的交比所有值为：

$$(AB,CD)=\gamma,\quad (AB,DC)=\frac{1}{\gamma}$$

$$(AC,BD)=1-\gamma,\quad (AC,DB)=\frac{1}{1-\gamma}$$

$$(AD,BC)=\frac{\gamma-1}{\gamma},\quad (AD,CB)=\frac{\gamma}{\gamma-1}$$

∵ $(AB,CD)=-1=\gamma$

∴ $\frac{1}{\gamma}=-1=\gamma,\quad 1-\gamma=2=\frac{\gamma-1}{\gamma}$

$$\frac{1}{1-\gamma}=\frac{1}{2}=\frac{\gamma}{\gamma-1}$$

23 **证明** 设$(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3\lambda_4)=k$，则

$$\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2}=k\cdot\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_2}$$

即

$$(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)=k(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_1)$$

$(\lambda_3-\lambda_1)[(\lambda_4-\lambda_1)+(\lambda_1-\lambda_2)]$

$=k(\lambda_4-\lambda_1)[(\lambda_3-\lambda_1)+(\lambda_1-\lambda_2)]$

$(1-k)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)+(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)$

$=k(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)$

等式两边同用$(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)$去除，得

$$\frac{1-k}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}-\frac{k}{\lambda_3-\lambda_1}$$

当$k=-1$时（即$(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3\lambda_4)=-1$），有

$$\frac{2}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}$$

24． 证明

$\because\quad (AB,CD)=\dfrac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$

$$=\frac{(AO+OC)(BO+OD)}{(BO+OC)(AO+OD)}$$

$$=\frac{AO\cdot BO+OC\cdot OD+BO\cdot OC+AO\cdot OD}{AO\cdot BO+OC\cdot OD+BO\cdot OD+AO\cdot OC}$$

又$\because\quad OC=-OD,\ OC^2=AO\cdot BO$

$\therefore\quad (AB,CD)=\dfrac{OC^2-OC^2+BO\cdot OC+AO\cdot OD}{OC^2-OC^2+BO\cdot OD+AO\cdot OC}$

$$=\frac{BO\cdot OC+AO\cdot OD}{-(BO\cdot OC+AO\cdot OD)}$$

$$=-1$$

25．证明　必要性。设x_1、x_2为方程 $a_{11}x^2+2a_{12}x+a_{22}=0$ 的两个根，x_1'、x_2' 为方程 $b_{11}x^2+2b_{12}x+b_{22}=0$ 的两个根。由 $(x_1x_2,x_1'x_2')=-1$ 有

$$\frac{x_1-x_1'}{x_2-x_1'}\cdot\frac{x_2-x_2'}{x_1-x_2'}=-1$$

整理得

$$2x_1x_2-(x_1+x_2)(x'_1+x'_2)+2x'_1x'_2=0 \qquad (1)$$

由韦达定理知：

$$x_1x_2=\frac{a_{22}}{a_{11}}, \quad x_1+x_2=-\frac{2a_{12}}{a_{11}}$$

$$x'_1x'_2=\frac{b_{22}}{b_{11}}, \quad x'_1+x'_2=-\frac{2b_{12}}{b_{11}}$$

代入（1）式得：

$$2\frac{a_{22}}{a_{11}}-\left(-\frac{2a_{12}}{a_{11}}\right)\left(-\frac{2b_{12}}{b_{11}}\right)+2\frac{b_{22}}{b_{11}}=0$$

即

$$2a_{22}b_{11}-4a_{12}b_{12}+2a_{11}b_{22}=0$$

$$\therefore \quad a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12}+a_{22}b_{11}=0$$

充分性只须把如上证明结果逆推即可。

26．（1）证明　（图74）

考察完全四点形 $AC'PB'$，点 B 和点 C 是对边点，A_1 和 A' 是通过第三个对边点的一对对边与对角线 BC 的交点，所以 B、C、A_1、A' 是一组调和点，故有 $(BC, A_1A')=-1$。

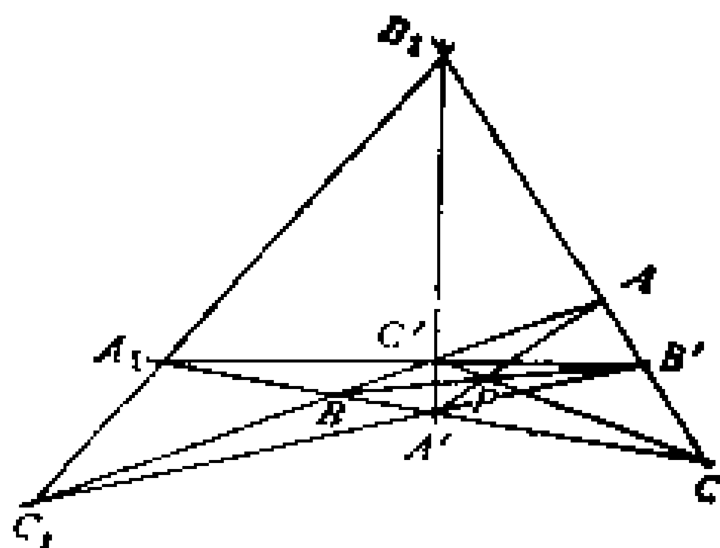


图　74

考察完全四点形 $BC'PA'$，点 C 和点 A 是对边点，B_1、B' 是通过第三个对边点的一对对边与对角线 CA 的交点，所以 C、A、B_1、B' 是一组调和点，故 $(CA, B_1B')=-1$。

考察完全四点形 $A'CB'P$，点 A 和点 B 是对边点，C_1 和 C' 是通过第三个对边点的一对对边与对角线 AB 的交点，所以 A、B、C_1、C' 是一组调和点，故 $(AB, C_1C')=-1$。

（2）　证明　对于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$，A 与 A' 对应，B 与 B' 对应，C 与 C' 对应，显然对应顶点的连线交于点 P，所以对应边 AB 与 $A'B'$、BC 与 $B'C'$、CA 与 $C'A'$ 的交点共

线.

27. 解 若 $\frac{\angle(a,m)}{\angle(b,m)}=-\frac{1}{3}$, 则$3\angle(a,m)=-\angle(b,m)$

∵ $\angle(a,b)=120°$

∴ $\angle(a,m)=30°$, $\angle(b,m)=-90°$

∴ $(abm)=\frac{\sin(\widehat{a,m})}{\sin(\widehat{b,m})}=-\frac{1}{2}$

若 $\frac{\angle(a,m)}{\angle(b,m)}=-1$

∵ $\angle(a,b)=120°$

∴ $\angle(a,m)=60°$, $\angle(b,m)=-60°$

∴ $(abm)=\frac{\sin(\widehat{a,m})}{\sin(\widehat{b,m})}=-1$

若 $\frac{\angle(a,m)}{\angle(b,m)}=0$, 则$\angle(a,m)=0$

∵ $\angle(a,b)=120°$

∴ $\angle(b,m)=-120°$

∴ $(abm)=0$

若 $\frac{\angle(a,m)}{\angle(b,m)}=\frac{1}{4}$, 则$4\angle(a,m)=\angle(b,m)$

∵ $\angle(a,b)=120°$

∴ $\angle(a,m)=-40°$, $\angle(b,m)=-160°$

∴ $(abm)=\frac{\sin(\widehat{a,m})}{\sin(\widehat{b,m})}\doteq 1.8794$

若 $\frac{\angle(a,m)}{\angle(b,m)}=5$, 则$\angle(a,m)=5\angle(b,m)$

∵ $\angle(a,b)=120°$

$\therefore \quad \angle(a,m)=150^\circ$，$\angle(b,m)=30^\circ$

$$\therefore \quad (abm)=\frac{\sin(\widehat{a,m})}{\sin(\widehat{b,m})}=1$$

28．**证明**　设 $PA=a, PB=b$，$PC=c$，$PD=d$(图75)．设$\odot O$的直径为$2r$．则有

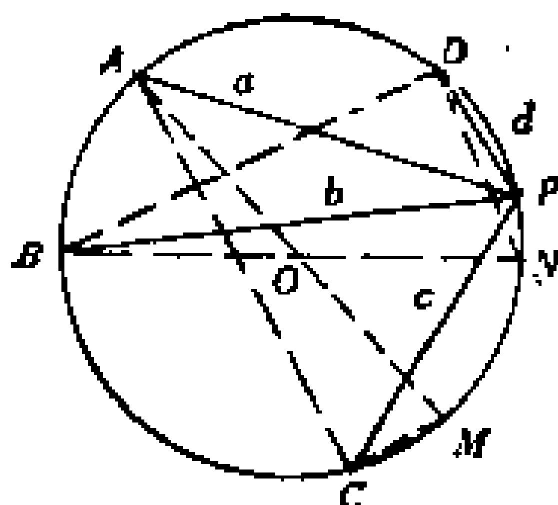


图75

$$(PAPB,PCPD)$$
$$=(ab,cd)$$
$$=\frac{(abc)}{(abd)}$$

$$=\frac{\sin(\widehat{a,c})\cdot\sin(\widehat{b,d})}{\sin(\widehat{b,c})\cdot\sin(\widehat{a,d})}$$

过A作$\odot O$的直径 AM，连结 AC、MC，则有

$$\angle(a,c)=\angle AMC$$

$$\therefore \quad \sin(\widehat{a,c})=\sin\angle AMC=\frac{AC}{AM}=\frac{AC}{2r}$$

过B作$\odot O$直径BN，连结BD、ND，则有

$$\angle(b,d)=\angle BND$$

$$\therefore \quad \sin(\widehat{b,d})=\sin\angle BND=\frac{BD}{BN}=\frac{BD}{2r}$$

同理可得

$$\sin(\widehat{b,c})=\frac{BC}{2r}$$

$$\sin(\widehat{a,d})=\frac{AD}{2r}$$

$$\therefore \quad (ab,cd)=\frac{\sin(\widehat{a,c})\sin(\widehat{b,d})}{\sin(\widehat{b,c})\sin(\widehat{a,d})}$$

$$=\frac{\frac{AC}{2r}\cdot\frac{BD}{2r}}{\frac{BC}{2r}\cdot\frac{AD}{2r}}$$

$$=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$$

由于⊙O与A、B、C、D都已确定，所以 AC、BD、BC、AD是定数，故$(PA\ PB, PC\ PD)$是常数。

29 **解** 由于四直线都过原点，则已知四直线属于同一线束。首先可以把 l_2.l_4 的方程改写为：

l_2: $4x+2y=0$

l_4: $\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y=0$

因此l_2、l_4的方程分别表示为：

$(x-y)+3(x+y)=0$

$(x-y)+\frac{1}{2}(x+y)=0$

$\therefore\quad (l_1l_2, l_3l_4)=1-(l_1l_3, l_2l_4)$

$$=1-\frac{3}{\frac{1}{2}}=-5$$

30. **解** 设 l_1、l_3为直线束的两条基本直线，由于 l_2、l_4 是此线束中的直线，故可设l_2的方程为：

$(2x_1+x_2-x_3)+\lambda_1(x_1-x_2+x_3)=0$

而 l_4的方程可以写成

$(2x_1+x_2-x_3)+1\cdot(x_1-x_2+x_3)=0$

$\because\quad (l_1l_2, l_3l_4)=-\frac{2}{3}$

$\therefore\quad (l_1\,l_3\ \ l_2\,l_4)=1-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}$

$\therefore\quad \frac{\lambda_1}{1}=\frac{5}{3}\qquad \lambda_1=\frac{5}{3}$

故l_2的方程为：

$$2x_1+x_2-x_3+\frac{5}{3}(x_1-x_2+x_3)=0$$

即

$$11x_1-2x_2+2x_3=0$$

31 解 在直线 l 外任取一点 S

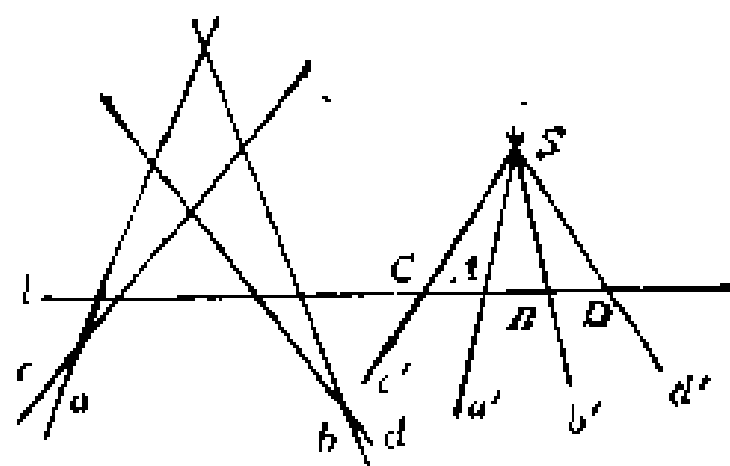


图76

过点 S 作直线a、b、c、d 的平行线 a'、b'、c'、d'，设a'、b'、c'、d' 与 l 分别交于点 A、B、C、D。则此四点就是所求作的点（图76）。

事实上，$a'\parallel a$，$b'\parallel b$，$c'\parallel c$，$d'\parallel d$，则 a'、b'、c'、d'所确定的无穷远点分别为 A_∞、B_∞、C_∞、D_∞。

∵ $(AB,CD)=(a'b',c'd')$

$(a'b',c'd')=(A_\infty B_\infty,C_\infty D_\infty)$

∴ $(AB,CD)=(A_\infty B_\infty,C_\infty D_\infty)$

32. 解（解法一）用完全四点形来作：

过 A、B 任意引二直线，设它们相交于点D，过M引一直线与AD、BD分别相交于E、F。

连结AF和BE，设AF与BE交于点G。

连结DG设与AB交于点C。则点C就是所求的点（图77）。

事实上，E、G、F、D是完全四点形的四个顶点。A、B是两个对边点，M、C是过第三个对边点的一对对边与对角线AB的交点，所以 A、B、M、C 是一组调和点，即$(AB,MC)=-1$。

（解法二）用相似三角形来作：

过A、B引直线AP与BP_1，且使$AP\parallel BP_1$，再过M任意引一直线与AP、BP_1分别交于P、P_1。

延长 P_1B 至 P_2使 $P_1B=BP_2$

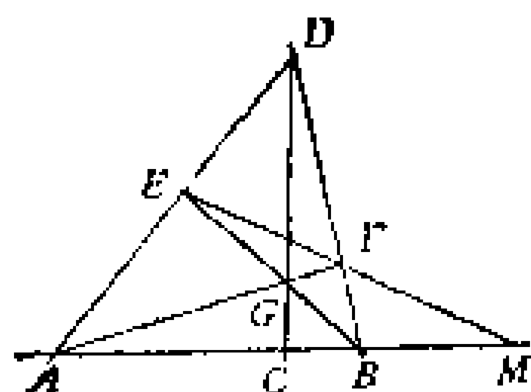


图77

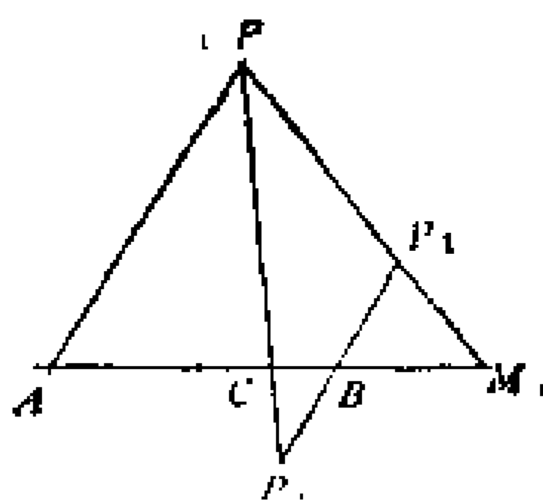


图78

连结 PP_2，设 PP_2与AB交于点C，则C为所求的点(图78)

∵ $\triangle APM \backsim \triangle BP_1M$

∴ $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{AP}{BP_1}$

∵ $\triangle APC \backsim \triangle BP_2C$

∴ $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{AP}{P_2B}$

∵ $P_1B=BP_2$

∴ $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{AC}{CB}$

∴ $\dfrac{AM}{BM}\cdot\dfrac{BC}{AC}=(AB,MC)=-1$。

（解法三）用圆来作：

以 AB 为弦任意作一个$\odot O$，取较小的弧的中点为D，以 MD 为直径再作一个圆$\odot O_1$，设$\odot O_1$与$\odot O$除点D外的交点为 E，连结DE设与AB交于C点，则C就是所求的点（图79），

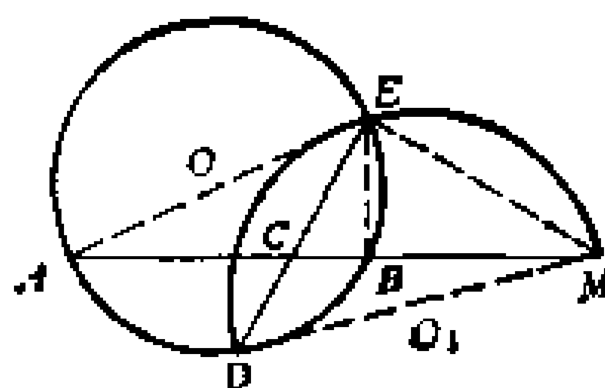


图79

事实上，连结EB、AE、ME，

∵ $ME\perp CE$，$\angle AEC=\angle CEB$

∴ CE是$\angle AEB$的平分线，ME是$\angle AEB$的邻补角（即$\triangle AEE$的外角）平分线，则四直线 AE、BE、CE、MB 为一

组调和直线，即

$$(EA\ EB, EC\ EM) = -1$$

∵ $(AB, MC) = (EA\ EB, EM\ EC)$

∴ $(AB, MC) = -1$

33． 解 任作一直线 l 使之与 a、b、c 分别交于 A、B、C。作与点 C 调和共轭点 D（方法如上题）。

连结线束中心 S 和 D，则直线 SD 就是所求的第四条直线（图80）。

∵ $(ab, cd) = (AB, CD)$

$(AB, CD) = -1$

∴ $(ab, cd) = -1$

故直线 $d(=SD)$ 为所求的直线。

34． 解 设 $\triangle ABC$ 三边 a、b、c 上的无穷远点分别为 A_∞、B_∞、C_∞（图81）。

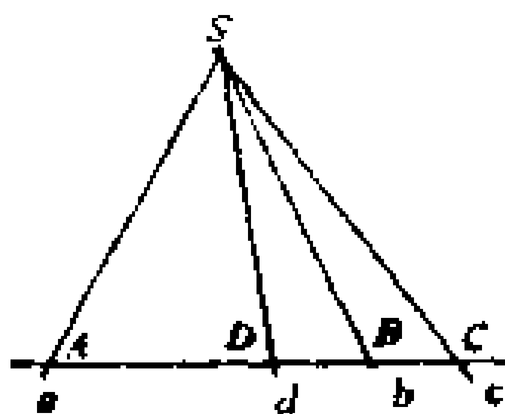


图80

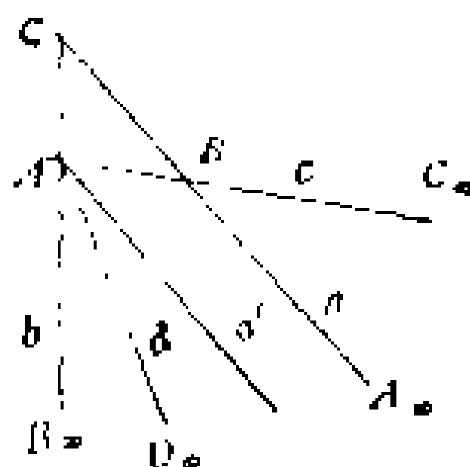


图81

过顶点 A 作 a 的平行线 a'，仿照上题作线束 $A(a', b, c\cdots)$ 中三条直线 a'、b、c 的第四调和直线 d，则直线 d 所确定的无穷远点 D_∞ 就是所求的点。

这是因为 $a' \parallel a$，所以 a' 也确定无穷远点 A_∞。

∵ $(A_\infty B_\infty, C_\infty D_\infty) = (a'b, cd)$

而 $(a'b, cd) = -1$

∴ $(A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty) = -1$

故点 D_∞ 为所求的点。

35．**证明**　（图82）首先考察完全四点形 $ABCD$，可知边 AC 上的四个点 A、C、Y、L 是一组调和点．即 $(AC,YL)=-1$．

再考察完全四点形 $YBZL$，设 LB 与 YZ 交于 N，MN 交 YL 于 C'（图中的 C' 未画出），显然在边 YL 上的四点 Y、L、C'、A 是一组调和点，即，$(YL,AC')=-1$，由于 $(YL,AC)=-1$ 故 $C'\equiv C$．所以 YZ、BL、CM 共点．

36．**证明**　设 A，B、C 是完全四线形的三个共线顶点，P、Q、R 是对顶三线形的三个顶点（图83）．则

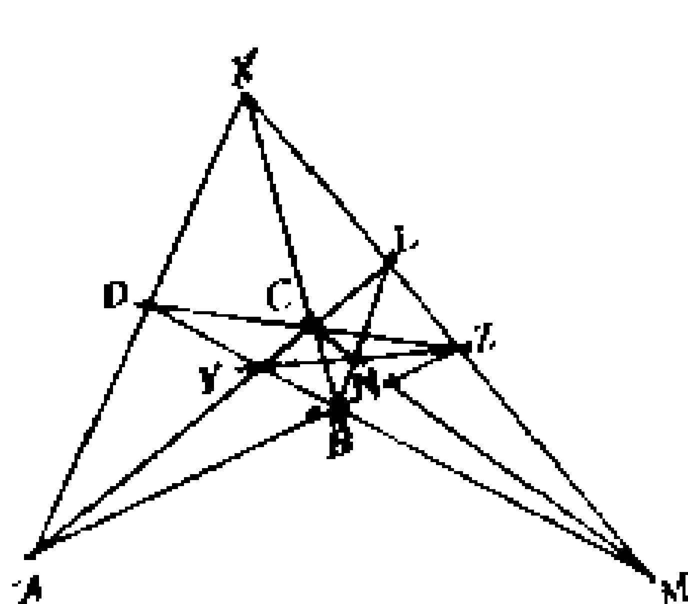


图82

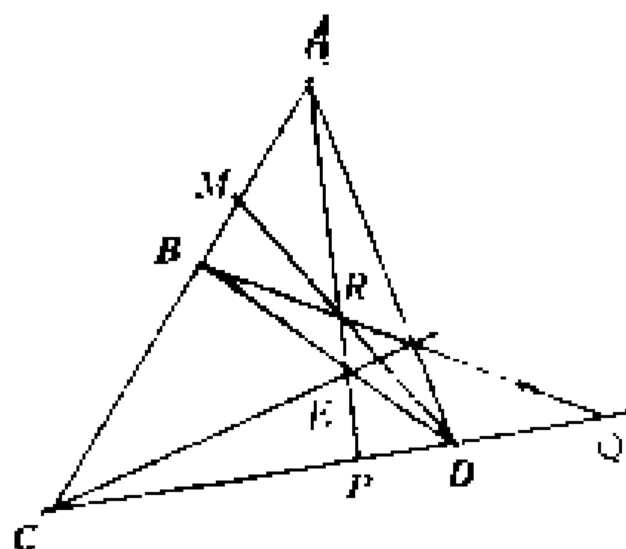


图83

$(RP,AE)=-1$

设 RD 交 AC 于 M'（此点在图中未画出），则

$(AB,CM')=-1$，

由于已知 $(AB,CM)=-1$，所以 $M'\equiv M$，故 M 在 RD 上（其中 R 是过 A、B 的对顶线的交点．D 是顶点 C 的对顶点），从而证明了原题的结论正确．

对偶命题：

设 a、b、c 是完全四点形的三条共点的边，m、c 与 a、b 调和共轭．则 a、b 上的对边点的连线通过 m 与 c 的对边的交点．

§3

37．**证明**　设点列 $l(A,B,C,D,\cdots)\barwedge l'(A',B',C',D',\cdots)$ 过点 A 任作一直线 l_1，在 l_1 上作与点列 $l'(A',B',C',D',\cdots)$ 恒同的点列 $l_1(A_1,B_1,C_1,D_1\cdots)$ 并且使点 A_1 与 A 重合，则点列

$l_1(A_1, B_1, C_1, D_1 \cdots)$与$l(A, B, C, D, \cdots)$是透视的(图 84)，即点列$l_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)$就是点列$l'(A', B', C', C', D', \cdots)$移动到与点列$l(A, B, C, D, \cdots)$透视的位置。$l_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)$与$l(A, B, C, D, \cdots)$是透视的原因是：因为$l(A, B, C, D, \cdots) \overline{\wedge} l'(A', B', C', D', \cdots)$而$l'(A', B', C', D', \cdots)$与$l_1(A_1, B_1, C_1, D_1 \cdots)$是恒同的、所以$l(A, B, C, D, \cdots) \overline{\wedge} l_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)$，又因为$A(A_1)$是自对应的，故有$l(A, B, C, D, \cdots) \overline{\overline{\wedge}} l_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \cdots)$

38. **解** 可仿照上题的方法来证，请读者自己来完成。

39. **证明** 设$s(A, B, C, \cdots) \overline{\wedge} S(a, b, c, \cdots)$，以$AB$为弦，$\angle(a, b)$为圆周角画圆；再以$BC$为弦，$\angle(b, c)$为圆周角画圆。这两个圆除交点$B$外，还有一个交点$S'$。现在把线束$S(a, b, c, \cdots)$的中心移到$S'$点，使直线$a$重合于$S'A$线。那么，经过这种移动，直线$b$重合于$S'B$，直线$c$重合于$S'C$。现在证明这种移动使得点列上其它各点全在线束中所对应的直线上，也就是说其它各点和它们所对应的直线也处于透视位置(图85)。

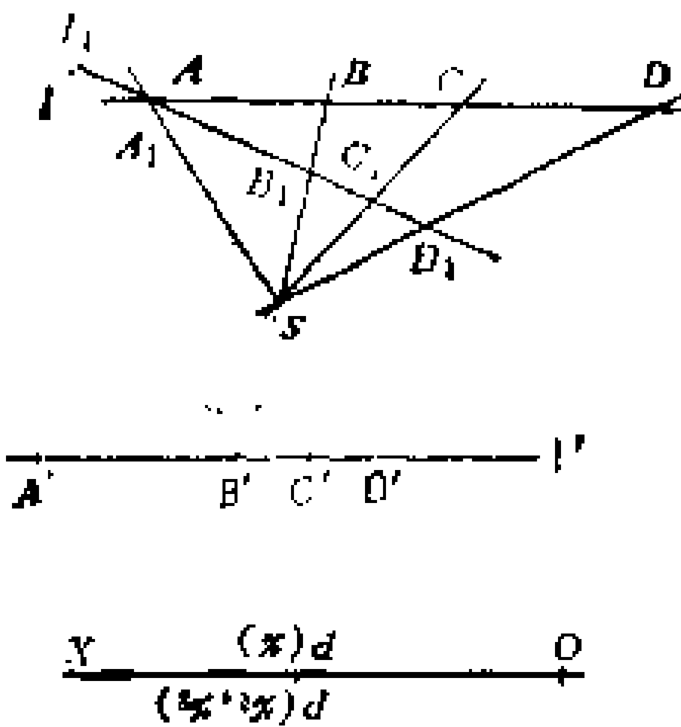


图 84

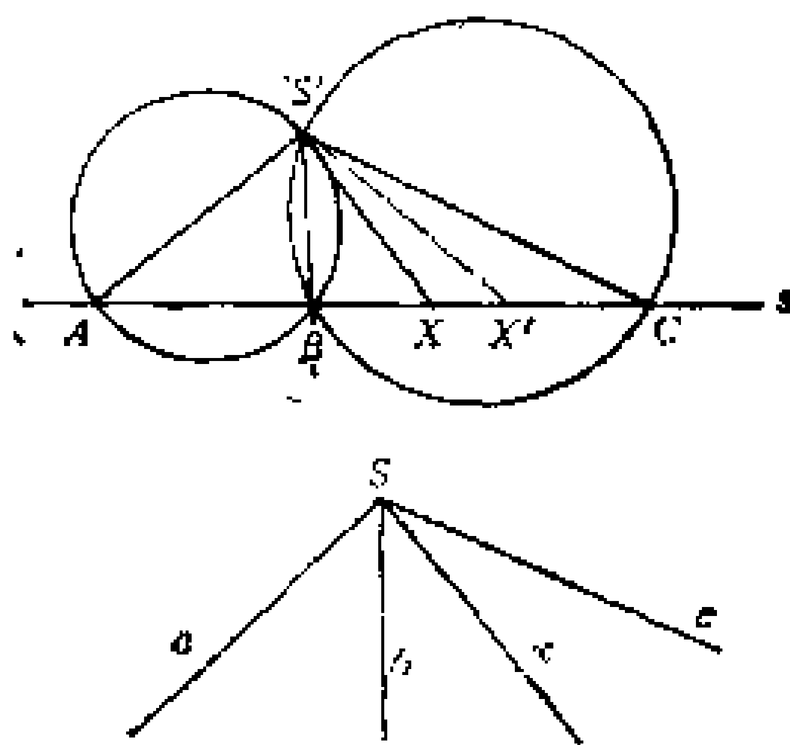


图 85

假设X是点列上除A、B、C以外的任意第四点；x是线束中和X对应的直线。经过上述办法后，我们来证明点X在直线x上。假设直线x交点列的底于点X'，我们只要能证明$X' \equiv X$就成了。

由假设

$$(A, B, C, X, \cdots) \overline{\wedge} (a, b, c, x, \cdots)$$

移动之后

$$(a, b, c, x \cdots) \overline{\wedge} (S'A, S'B, S'C, S'X', \cdots)$$
$$(S'A, S'B, S'C, S'X', \cdots) \overline{\overline{\wedge}} (A, B, C, X', \cdots)$$

所以

$$(A, B, C, X, \cdots) \overline{\wedge} (A, B, C, X', \cdots)$$

由于$A \equiv A$，$B \equiv B$，$C \equiv C$，则有$X \equiv X'$。

40. **解** 设$S_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \cdots) \overline{\overline{\wedge}} S_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \cdots)$，透视轴为 s。

以 S_1S_2 为直径作一圆。设此圆与 s 的交点为M，连结S_1M、S_2M，则S_1M、S_2M就是所求的两条射线（图86）

事实上$\angle S_1MS_2$是直径所张的角，所以有S_1M与S_2M垂直。

讨论：设圆心O到透视轴s的距离为h，圆的半径为r。

当$r > h$时，有两对互相垂直的对应射线；

当$r = h$时，有一对互相垂直的对应射线；

当$r < h$时，没有互相垂直的对应射线。

41. **证明** 设$S_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \cdots) \overline{\wedge} S_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \cdots)$且有：$\angle(a_1, a_2) = \angle(b_1, b_2) = \angle(c_1, c_2)$，$d_1$、$d_2$ 为任意一对对应直线（图87）。

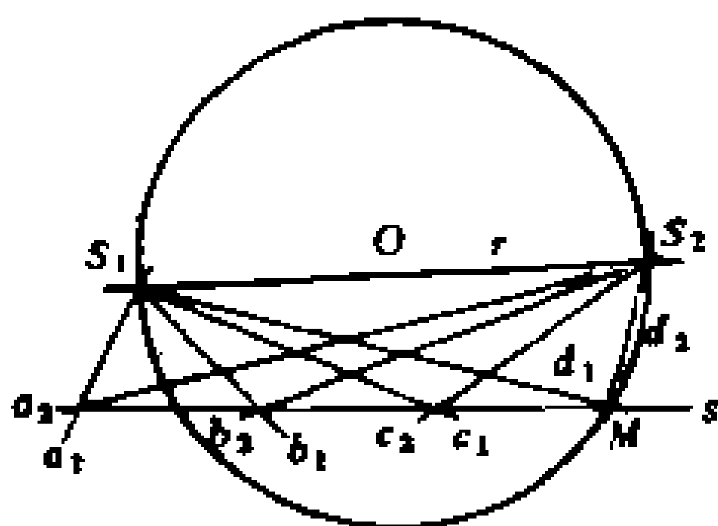


图 86

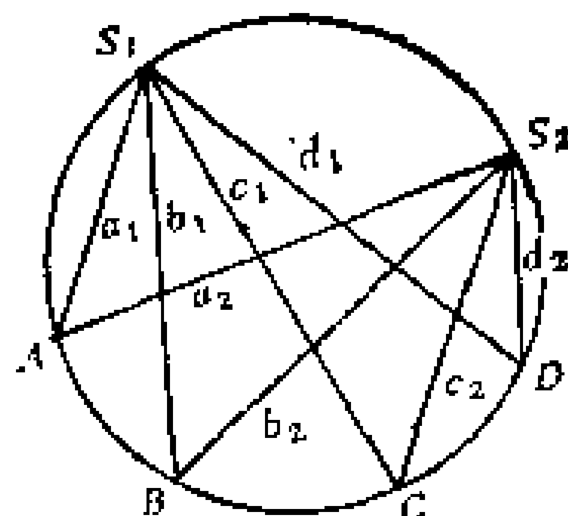


图 87

$\because$ $S_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \cdots) \overline{\wedge} S_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \cdots)$

$\therefore$ $(a_1b_1, c_1d_1) = (a_2b_2, c_2d_2)$

即

$$\frac{\sin(\widehat{a_1,c_1})\cdot\sin(\widehat{b_1,d_1})}{\sin(\widehat{a_1,d_1})\cdot\sin(\widehat{b_1,c_1})}=\frac{\sin(\widehat{a_2,c_2})\cdot\sin(\widehat{b_2,d_2})}{\sin(\widehat{a_2,d_2})\cdot\sin(\widehat{b_2,c_2})}$$

$\because\quad \angle(a_1,a_2)=\angle(b_1,b_2)=\angle(c_1,c_2)$

$\therefore\quad \angle(a_1,b_1)=\angle(a_2,b_2),\ \angle(b_1,c_1)=\angle b_2,c_2)$

$\angle(a_1,c_1)=\angle(a_2,c_2)$

$$\therefore\quad \frac{\sin(\widehat{b_1,d_1})}{\sin(\widehat{a_1,d_1})}=\frac{\sin(\widehat{b_2,d_2})}{\sin(\widehat{a_2,d_2})}$$

即

$(b_1a_1d_1)=(b_2a_2d_2)$

由$\angle(a_1,b_1)=\angle(a_2,b_2)$及简单比的唯一性可知：

$\angle(b_1,d_1)=\angle(b_2,d_2),\angle(b_1,b_2)=\angle(d_1,d_2)$

$\therefore\quad \angle(a_1,a_2)=\angle(b_1,b_2)=\angle(c_1,c_2)=\angle(d_1,d_2)$

42 解 设$l(A,B,C,\cdots)\overline{\wedge}l'(A',B',C',\cdots)$

过 A、A' 作一直线，在其上任取点 S_1 和 S_2。

连结 S_1B、S_2B'、S_1C、S_2C' 设 S_1B与S_2B' 交于 B_0，S_1C与S_2C' 交于C_0。过B_0、C_0作一直线l_0；设l_0与AA'交于A_0。

过点 S_1 作 l 的平行线l''，设 l''与 l_0交于点L_0，连结 S_2L_0，设S_2L_0与l'交于L'。则L'为第一个点列的无穷远点 L_∞在第二个点列的对应点（图88）。

事实上，$\because l(A,B,C,L_\infty,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}l_0(A_0,B_0,C_0,L_0,\cdots)$（透视中心是$S_1$）。

$l_0(A_0,B_0,C_0,L_0,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}l'(A',B',C',L',\cdots)$

（透视中心是S_2）。

$\therefore\quad l(A,B,C,L_\infty,\cdots)\overline{\wedge}l'(A',B',C',L',\cdots)$

因此L'为所求。

作其逆就是作出 l' 中的无穷远点在 l 中的对应点。可仿照上面的作法请读者自己完成。

43. **解** 设 $l(A,B,C,\cdots)\overline{\wedge}l'(A',B',C',\cdots)$，$L$ 为这两个点列的公共点。

过A、A'作一直线，在其上取点 S_1和 S_2。连结 S_1B、S_2B'、S_1C、S_2C'，设S_1B与S_2B'交于B_0，S_1C与 S_2C'交于 C_0。过 B_0、C_0作直线l_0，设 l_0与AA'交于 A_0。

连结S_1L，设 S_1L与l_0交于L_0，连结 S_2L_0，设S_2L_0与 l'交于L'，则L'为所求的点（图89）。

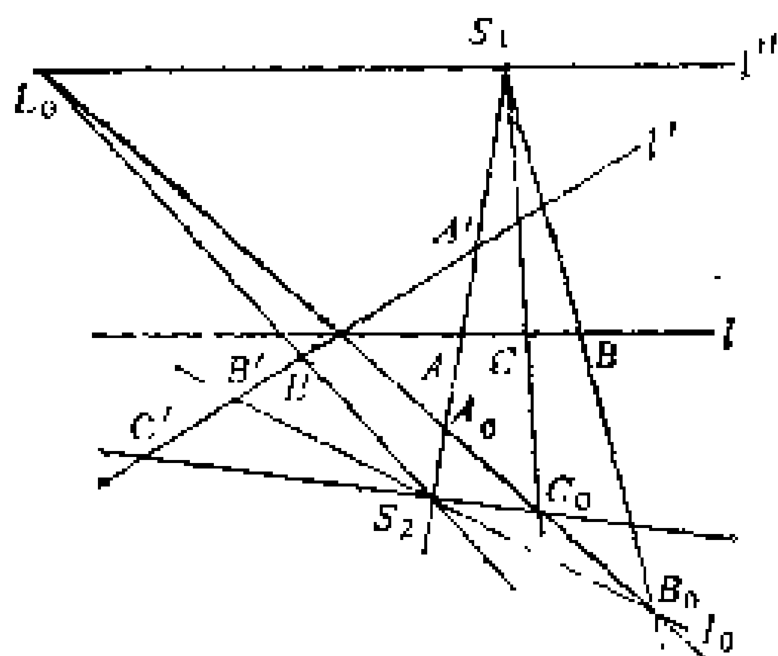


图 88

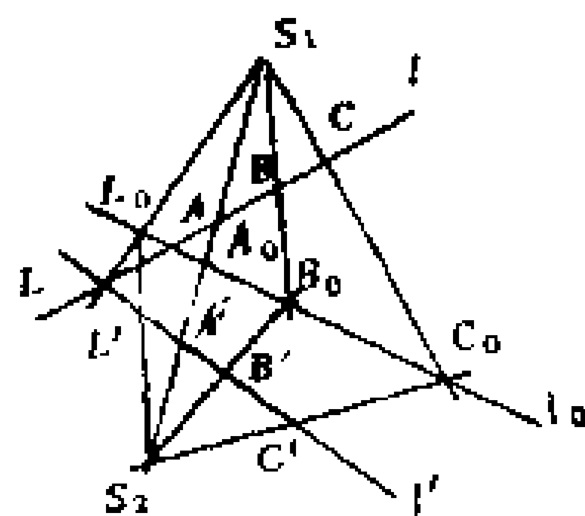


图 89

事实上，$\because l(A,B,C,L,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}l_0(A_0,B_0,C_0,L_0,\cdots)$
（透视中心是 S_1）。

$$l_0(A_0,B_0,C_0,L_0,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}l'(A',B',C',L',\cdots)$$
（透视中心是S_2）。

$$\therefore\quad l(A,B,C,L,\cdots)\overline{\wedge}l'(A',B',C',L',\cdots)$$
因此 L' 为所求的点。

作其逆就是作出L在 l 中的对应点，可仿照上面的作法请读者自己完成。

44 **解** 设 x 和x'是直线 l 和 l' 上任一对对应点的坐标，则直线 l 上的四点与 l' 上对应的四点的交比相等，即

$$\frac{2-0}{2-1}\cdot\frac{x-1}{x-0}=\frac{-2+1}{-2-0}\cdot\frac{x'-0}{x'+1}$$

整理得

$$x' = \frac{4-4x}{3x-4}$$

这就是射影对应的非齐次坐标表示式，不难得出齐次坐标表示式为

$$\begin{cases}\rho x_1' = 4x_1 - 4x_2 \\ \rho x_2' = -3x_1 + 4x_2\end{cases}$$

l 上的无穷远点在 l' 上的对应点为$(4,-3)$，l' 上的无穷远点在 l 上的对应点为 $(4,3)$ 。

45. 解　设所求的射影对应为

$$\begin{cases}\rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{cases} \qquad (1)$$

将已知三对对应点换成齐次坐标，则有 $(0,1)$，$(1,1)$，$(1,0)$对应$(1,1)$，$(1,0)$，$(0,1)$，代入（1）可求出

$$a_{11} = 0,\ a_{12} = \rho_1,\ a_{21} = -\rho_1,\ a_{22} = \rho_1$$

于是所求的射影对应为：

$$\begin{cases}\rho x_1' = x_2 \\ \rho x_2' = -x_1 + x_2\end{cases}$$

或写成非齐次坐标形式为：

$$x' = \frac{1}{-x+1}$$

46. 解　由变换式

$$x' = \frac{2x-1}{x+3}$$

求坐标原点的对应点，可将$x=0$代入变换式中，得

$$x' = -\frac{1}{3}$$

即在ox轴上坐标原点的对应点是 $C\left(-\frac{1}{3}\right)$.

为求无穷远点的对应点，把所给的变换式写成齐次坐标形式，即

$$\begin{cases}\rho x'_1 = 2x_1 - x_2\\ \rho x'_2 = x_1 + 3x_2\end{cases}$$

由于无穷远点的齐次坐标为(1,0)，代入上式得

$$\rho x'_1 = 2,\quad \rho x'_2 = 1$$

所以 ox 轴上的无穷远点的对应点是（2,1），即是 $D(2)$。

47．解　设二重点的坐标为 x，则经过所给的变换后，对应点的坐标仍为 x，所以解方程

$$x = \frac{-x-5}{x+1}$$

得

$$x_1 = -1+2i,\quad x_2 = -1-2i$$

即二重点为两个虚点，故此变换是椭圆型。

48．解　设所求的射影对应为

$$\begin{cases}\rho x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\\ \rho x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\\ \rho x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{cases} \qquad (1)$$

将已知的三对对应点换成齐次坐标，则有(0,0,1)，(1,0,1)(0,1,1)对应(0,0,1)，(0,1,1)，(1,0,1)，代入（1）式得

$$\begin{cases}0 = a_{13}\\ 0 = a_{23}\\ \rho_1 = a_{33}\end{cases}\qquad \begin{cases}0 = a_{11} + a_{13}\\ \rho_2 = a_{21} + a_{23}\\ \rho_2 = a_{31} + a_{33}\end{cases}\qquad \begin{cases}\rho_3 = a_{12} + a_{13}\\ 0 = a_{22} + a_{23}\\ \rho_3 = a_{32} + a_{33}\end{cases}$$

解之得

$$a_{11} = a_{13} = 0 \qquad a_{23} = a_{22} = 0$$

$$a_{21} = \rho_2 \qquad a_{12} = \rho_3$$

$$a_{33} = \rho_1 \qquad a_{31} + a_{33} = \rho_2 \qquad a_{32} + a_{33} = \rho_3$$

由于直线 $x+y+1=0$ 和无穷远直线的齐次线坐标分别为(1,1,1)，(0,0,1)将这对对应直线的线坐标代入下面的直线射影对应式

$$\begin{cases}\sigma u_1 = a_{11}u'_1 + a_{21}u'_2 + a_{31}u'_3\\ \sigma u_2 = a_{12}u'_2 + a_{22}u'_2 + a_{32}u'_3\\ \sigma u_3 = a_{13}u'_1 + a_{23}u'_2 + a_{33}u'_3\end{cases}$$

中，得

$$\sigma_1 = a_{31},\quad \sigma_1 = a_{32},\quad \sigma_1 = a_{33}$$

∴ $a_{31} = a_{32} = a_{33}$

∵ $a_{31} = a_{32} = a_{33} = \rho_1 = \dfrac{\rho_2}{2} = \dfrac{\rho_3}{2}$

∴ $\rho_2 = \rho_3$

∴ 所求的对应式为

$$\begin{cases}\rho' x'_1 = \rho_3 x_2\\ \rho' x'_2 = \rho_3 x_1\\ \rho' x'_3 = \dfrac{\rho_3}{2} x_1 + \dfrac{\rho_3}{2} x_2 + \dfrac{\rho_3}{2} x_3\end{cases}$$

令 $\rho = 2\rho' / \rho_3$

则所求的射影对应式为

$$\begin{cases}\rho x'_1 = 2x_2\\ \rho x'_2 = 2x_1\\ \rho x'_3 = x_1 + x_2 + x_3\end{cases}$$

49. **证明** ∵ $3\rho x'_1 - 2\rho x'_2 - \rho x'_3$

$$= 3(2x_1 - x_2 + x_3) - 2(x_1 + x_2 + x_3) - (4x_1 - 5x_2 + x_3)$$

$$= 0$$

∴ 此对应把平面上的点除一点外都变到

$$3x'_1 - 2x'_2 - x'_3 = 0$$

上.

解方程组

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 0\end{cases}$$

得

$$x_1=-2,\quad x_2=-1,\ x_3=3$$

则点$(-2,-1,3)$在所给的对应式下没有对应点，故此点除外。

50．解　设变换式为

$$\begin{cases}\rho x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ \rho x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{cases}$$

将三对对应点的坐标（齐次坐标）代入上式，则有

$$\begin{cases}\rho_1=3a_{11}+a_{12}\\ 0=3a_{21}+a_{22},\end{cases}\quad\begin{cases}0=-2a_{11}+a_{12}\\ \rho_2=-2a_{21}+a_{22},\end{cases}\quad\begin{cases}\rho_3=5a_{11}+a_{12}\\ \rho_3=5a_{21}+a_{22}\end{cases}$$

即

$$5a_{11}+a_{12}-5a_{21}-a_{22}=0\qquad(1)$$

$$3a_{21}+a_{22}=0\qquad(2)$$

$$-2a_{11}+a_{12}=0\qquad(3)$$

（1）－（3）得

$$7a_{11}-5a_{21}-a_{22}=0\qquad(4)$$

（4）＋（2）得

$$7a_{11}-2a_{21}=0$$

$$\therefore\quad a_{11}=\frac{2}{7}a_{21}$$

$$a_{22}=-3a_{21}$$

$$a_{12}=\frac{4}{7}a_{21}$$

∴　变换式为

$$\begin{cases}\rho' x'_1=\frac{2}{7}a_{21}x_1+\frac{4}{7}a_{21}x_2\\ \rho' x'_2=a_{21}x_1-3a_{21}x_2\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\rho x'_1=2x_1+4x_2\\ \rho x'_2=7x_1-21x_2\end{cases}$$

51．解　若使已知的二直线平行，则已知二直线交于无穷

远点，即只须使此二直线与无穷远直线共点即可。因此首先求出在重心坐标系下的无穷远直线方程

取重心坐标系（图90）。

设直线 A_2A_3 上的无穷远点为P_∞，则有$x_1=0$

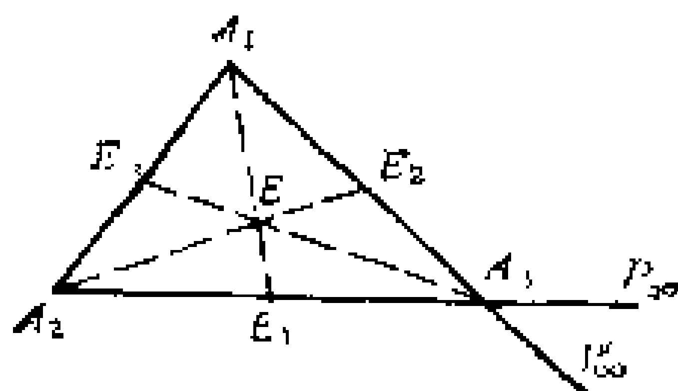


图 90

$$\frac{x_3}{x_2}=(P_\infty E_1,A_2A_3)$$

$$=\frac{P_\infty A_2}{E_1A_2}:\frac{P_\infty A_3}{E_1A_3}=\frac{E_1A_3}{E_1A_2}=-1$$

∴ P_∞的坐标为：（0, 1, −1）

同样设直线A_1A_3上的无穷远点为 P'_∞，则有

$$x_2=0$$

$$\frac{x_1}{x_3}=(P'_\infty E_2,A_3A_1)$$

$$=\frac{P'_\infty A_3}{E_2A_3}:\frac{P'_\infty A_1}{E_2A_1}=\frac{E_2A_1}{E_2A_3}=-1$$

∴ P'_∞的坐标为（1, 0, −1）

P_∞与P'_∞的连线l_∞其坐标为$\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-1, & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right)$

即（1, 1, 1），故无穷远直线的点坐标方程为：

$$x_1+x_2+x_3=0$$

因此已知二直线平行（即已知二直线与无穷远直线共点）的条件是下面方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+cx_3=0\\ a'x_1+b'x_2+c'x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

有非零解，即

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

52. **解** 射影变换

$$\begin{cases}\rho x'_1 = x_1 + x_2 \\ \rho x'_2 = \quad\quad x_2 \\ \rho x'_3 = \quad\quad\quad x_3\end{cases}$$

的不变点应满足方程组

$$\begin{cases}(1-\rho)x_1 + x_2 = 0 \\ \quad(1-\rho)x_2 = 0 \\ \quad(1-\rho)x_3 = 0\end{cases} \qquad (1)$$

而(1)式有非零解的条件为

$$\begin{vmatrix}1-\rho & 1 & 0 \\ 0 & 1-\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1-\rho\end{vmatrix} = 0$$

整理得

$$(1-\rho)^3 = 0$$

∴ $\rho = 1$是三重根

把$\rho = 1$代入（1）式解得$x_2 = 0$，故$x_2 = 0$是不动点列。

§ 4

53. **证明** （1）证明一直线上的非奇射影变换的全体构成群。

（i）非奇射影变换的积仍为非奇射影变换：

对于任意非奇射影变换

$$\begin{cases}\rho_1 x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ \rho_1 x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2\end{cases} \qquad (c = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0)$$

$$\begin{cases}\rho_2 x''_1 = b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 \\ \rho_2 x''_2 = b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2\end{cases} \qquad (b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \neq 0)$$

则

$$\begin{cases}\rho x''_1 = (b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21})x_1 + (b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22})x_2 \\ \rho x''_2 = (b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21})x_1 + (b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22})x_2\end{cases}$$

$\because$ $\begin{vmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\therefore$ 两个非奇射影变换积仍为非奇射影变换。

（ii ）非奇射影变换的逆变换仍为非奇射影变换：

$$\begin{cases} \rho x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ \rho x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{cases} \qquad (c = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0)$$

其逆变换为：

$$\begin{cases} \sigma x_1 = c_{22}x'_1 - c_{12}x'_2 \\ \sigma x_2 = -c_{21}x'_1 + c_{11}x'_2 \end{cases}$$

$$(c' = c_{22}c_{11} - (-c_{12})\cdot(-c_{21}) = c \neq 0)$$

故一直线上的非奇射影变换的全体构成群。

（2）证明：当$c>0$的变换的全体也构成群

在1）的基础上，当 $b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0$ 和 $c = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$时，显然有

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0$$

而逆变换的变换行列式显然也大于零，故 $c>0$ 的变换的全体构成群。

（3）证明：当$c<0$时的变换的全体不能构成群。

在1）的基础上，当$c = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} < 0$，$b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} < 0$ 时。

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0$$

这就表示对于$c<0$的变换对变换的乘积不封闭，所以不能构成群。

54. 证明　四个变换，两两乘积可列表如下：

·	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
Ⅰ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
Ⅱ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅳ	Ⅲ
Ⅲ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅰ	Ⅱ
Ⅳ	Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ

从表中可知由已知四个变换构成的集合对变换乘法运算是封闭的，并且第一个变换是恒等变换，从而得到 $\mathrm{I}^{-1}=\mathrm{I}$，$\mathrm{II}^{-1}=\mathrm{II}$，$\mathrm{III}^{-1}=\mathrm{III}$，$\mathrm{IV}^{-1}=\mathrm{IV}$ 即这四个变换的逆仍属于由它们所构成的集合，所以由已知四个变换可构成群，而此群成员是四个，故为有限群。

由已知四个变换构成的有限群的所有子群为：

{Ⅰ},{Ⅰ，Ⅱ};{Ⅰ，Ⅲ};{Ⅰ，Ⅳ};{Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ}

55. **解** 就欧氏几何，仿射几何、射影几何三种几何的内容而论，有下面的关系：射影几何⊂仿射几何⊂欧氏几何。因此图形的射影性质与仿射性质在欧氏几何里成立。

56. **解** 对偶原理在仿射几何和欧氏几何里不成立，这是因为射影几何引进了无穷远元素

例如命题“两个不同的点总有一条公共的直线”这在三种几何学中都成立。然而“同一平面上两条不同的直线总有一个公共点”在射影几何中成立而在仿射几何和欧氏几何里却不成立。这是因为在仿射几何和欧氏几何里存在着两条直线平行（即没有公共点）的概念，而以上命题是对偶原理的基础。所以对偶原理在仿射几何与欧氏几何里不成立。

第六章　二次曲线的射影、仿射、度量性质习题解答

§ 1

1. **证明**　设已知的变动三角形 ABC 的边绕三个不动点 P、Q、R旋转，顶点A和B分别在定直线a和b上滑动，得三角形$A_1B_1C_1$，$A_2B_2C_2$，…（图91）.

$\because\quad P(AC, A_1C_1, A_2C_2, \cdots)\ \overline{\overline{\wedge}}\ Q(AB, A_1B_1, A_2B_2, \cdots)$

$Q(AB, A_1B_1, A_2B_2, \cdots)\ \overline{\overline{\wedge}}\ R(BC, B_1C_1, B_2C_2, \cdots)$

$\therefore\quad P(AC, A_1C_1, A_2C_2, \cdots)\ \overline{\wedge}\ R(BC, B_1C_1, B_2C_2, \cdots)$

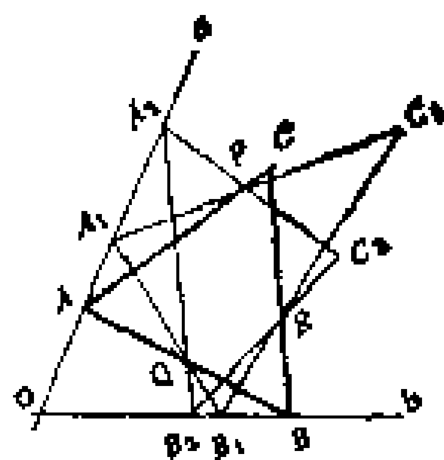


图　91

因此对应直线的交点 C, C_1, C_2，…也就是第三个顶点的轨迹是通过定点P、R的二阶曲线.

2. **解**　设$\angle NAM=\alpha$．$\angle NBM=\beta$ 分别绕顶点A和B旋转，AM 与 BM的交点M沿直线m滑动，画出点M_1、M_2、…，作$\angle M_1AN_1=\angle M_2AN_2=\alpha$，$\angle M_1BN_1=\angle M_2BN_2=\beta\cdots$，另两个边的交点$N$画出$N_1, N_2$,…（图92）.

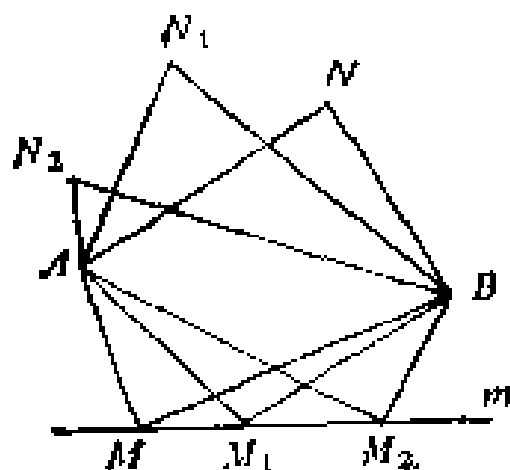


图　92

$\because\quad \angle NAN_1=\alpha-\angle M_1AN$

$\angle MAM_1=\alpha-\angle M_1AN$

$\angle N_1AN_2=\alpha-\angle M_2AN_1$

$\angle M_1AM_2=\alpha-\angle M_2AN_1$

…　　　…

$\therefore\quad \angle NAN_1=\angle MAM_1$

$$\angle N_1AN_2=\angle M_1AM_2$$

则有 $\angle NAN_2=\angle MAM_2$

同理可得

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\angle NBN_1=\angle MBM_1$$

$$\angle NBN_2=\angle MBM_2$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

所以$A(AN, AN_1, AN_2, \cdots)$与$A(AM, AM_1, AM_2, \cdots)$是恒等的线束；$B(BM, BM_1, BM_2, \cdots)$与$B(BN, BN_1, BN_2, \cdots)$是恒等的线束。

由作图$A(AM, AM_1, AM_2, \cdots)\overline{\overline{\wedge}}B(BM, BM_1, BM_2, \cdots)$

则有$A(AN, AN_1, AN_2, \cdots)\overline{\wedge}B(BN, BN_1, BN_2, \cdots)$

因此对应直线的交点N、N_1、N_2、…构成二阶曲线。即点N画出二阶曲线。

3．**解** 设A、B、C、D、E为五个已知点，连结AC、AD、AE及BC、BD、BE，构成了两个线束$A(AC, AD, AE, \cdots)$及$B(BC, BD, BE, \cdots)$

过C引直线l_1与直线AD、AE分别交于K_1、L_1；引直线l_2与直线BD、BE分别交于K_2、L_2。

连结K_1K_2、L_1L_2并设它们的交点为S。

连结S与l_1和AB的交点T_1'，设ST_1'与l_2交于T_2，连结S与l_2和AB的交点T_2'，设ST_2'与l_1交于T_1。连结AT_1，BT_2，则AT_1、BT_2就是所求的切线（图93）．

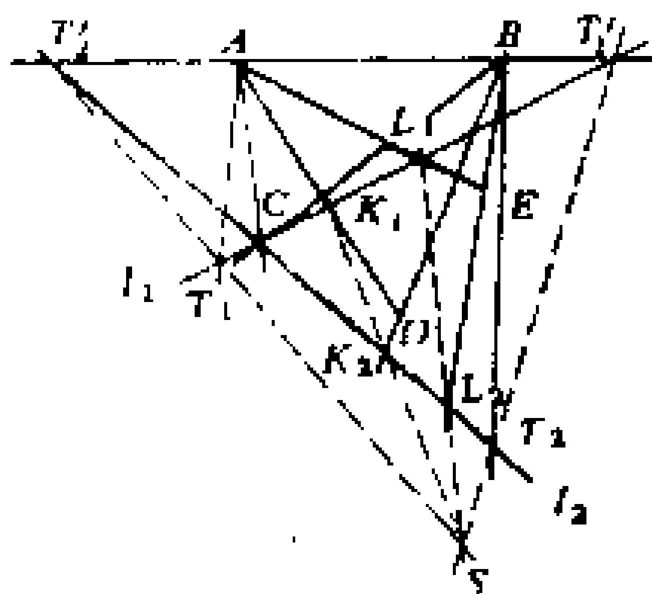


图 93

事实上，∵C、D、E在二阶曲线上，

∴ $A(AC, AD, AE, \cdots)\overline{\wedge}B(BC, BD, BE, \cdots)$

∵ C是自身对应点

$\therefore\quad l_1(C, K_1, L_1, T_1', \cdots) \overline{\overline{\wedge}}\, l_2(C, K_2, L_2, T_2, \cdots)$，

（S是透视中心）．

$\because\quad S(SC, SK_1, SL_1, ST_1', \cdots) \overline{\overline{\wedge}}\, A\,(AC, AD, AE, AB, \cdots)$

$S(SC, SK_1, SL_1, ST_1', \cdots) \overline{\wedge}\, B(BC, BD, BE, BT_2, \cdots)$

$\therefore\quad A(AC, AD, AE, AB, \cdots) \overline{\wedge}\, B(BC, BD, BE, BT_2, \cdots)$

因此BT_2是AB的对应直线，由切线定义知BT_2是二阶曲线在点B的切线。

同理得知AT_1，是在点A的切线。

（注：当学完巴斯加定理以后，本题可以很容易作出，但按本题的要求，我们没有利用巴斯加定理来作，关于利用巴斯加定理的作法将在下面第8题）

4．解　设a、b、c、d、e 为已知的五条直线，a与b交于X_0；c与a、b分别交于A、A'；d与a、b分别交于B、B'；e与a、b分别交于C、C'。在直线c上任取二点S_1、S_2，连结S_1B、S_2B'，设交点为E；连结S_1C、S_2C'，设交点为D。

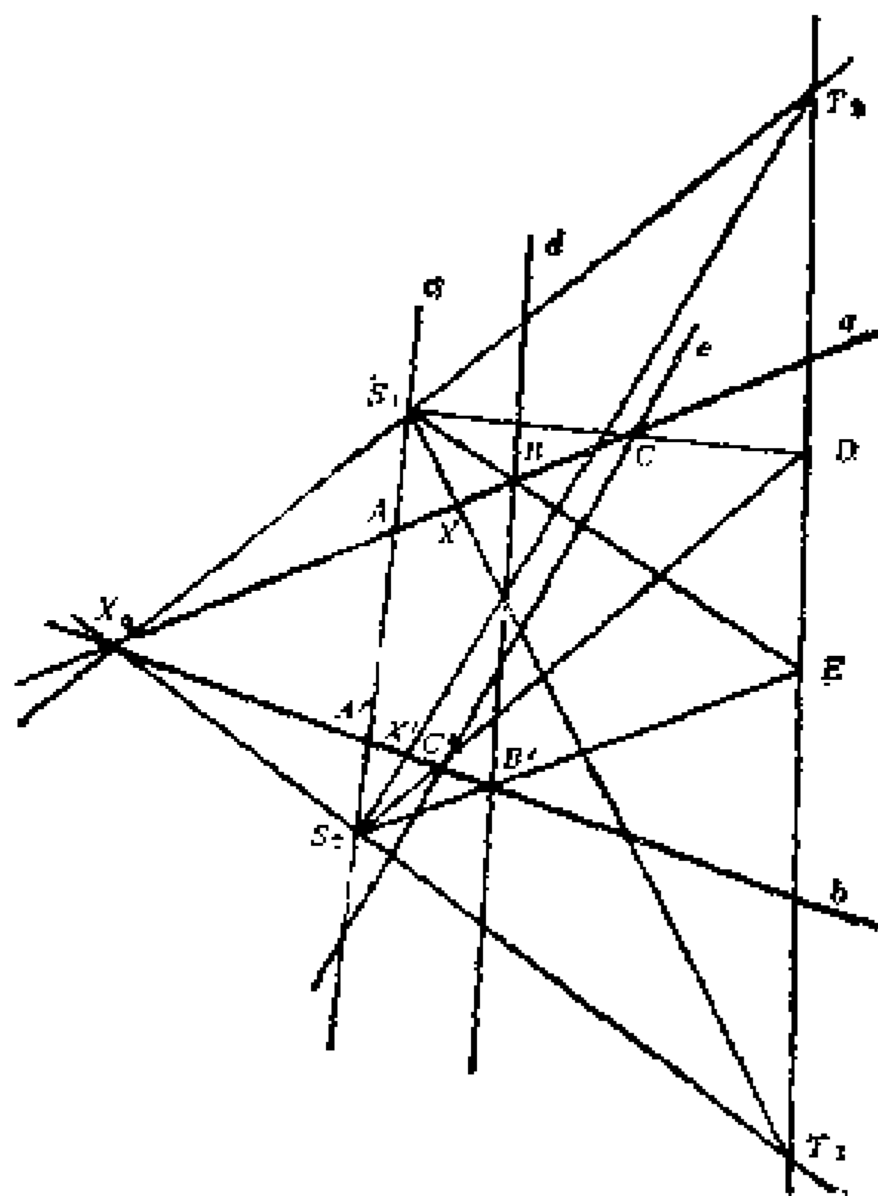


图　94

连结X_0S_1，X_0S_2分别与DE相交于T_2、T_1。连结S_1T_1与a相交于X；连结S_2T_2与b相交于X'，则X；X'分别为a、b上的切点(图94)。

事实上：

$\because \quad S_1(S_1D, S_1E, S_1S_2, S_1T_2, \cdots) \overline{\overline{\wedge}} S_2(S_2D, S_2E, S_2S_1, S_2T_2, \cdots)$

$S_1(S_1D, S_1E, S_1S_2, S_1T_2, \cdots) \overline{\overline{\wedge}} a(C, B, A, X_0, \cdots)$

$S_2(S_2D, S_2E, S_2S_1, S_2T_2, \cdots) \overline{\overline{\wedge}} b(C', B', A', X', \cdots)$

$\therefore \quad a(C, B, A, X_0, \cdots) \overline{\wedge} b(C', B', A', X', \cdots)$

因此X'是X_0(a、b的公共点)在b上的对应点，由切点的定义可知X'是b上的切点.同理可知X也确实是a上的切点。

5. **解** X轴的方程为$y=0$，化为齐次坐标为：

$$x_2=0$$

解方程组
$$\begin{cases} x_2=0 \\ \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j=0 \end{cases}$$

得：

$$a_{11}x_1^2+2a_{13}x_1x_3+a_{33}x_3^2=0$$

若 $\quad a_{13}^2-a_{11}a_{33}=0$

则二阶曲线与x轴相切．故所求条件为：

$$a_{13}^2-a_{11}a_{33}=0$$

6. (1) **解** 设二阶曲线方程为：

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3-2a_{23}x_2x_3=0$$

将已知五点坐标代入上式得：

$$\begin{cases} a_{11}+a_{22}-2a_{12}=0 \\ 4a_{11}+a_{33}-4a_{13}=0 \\ 4a_{22}+a_{33}-4a_{23}=0 \\ a_{11}+16a_{22}+4a_{33}+8a_{12}-4a_{13}-16a_{23}=0 \\ 4a_{11}+9a_{22}+4a_{33}+12a_{12}-8a_{13}-12a_{23}=0 \end{cases}$$

解方程组得：

$$a_{12}=a_{11} \qquad a_{22}=a_{11} \qquad a_{13}=\frac{9}{4}a_{11}$$

$$a_{23}=\frac{9}{4}a_{11} \qquad a_{33}=5a_{11}$$

故所求二阶曲线方程为：

$$x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+\frac{9}{2}x_1x_3+\frac{9}{2}x_2x_3=0$$

即

$$2x_1^2+2x_2^2+10x_3^2+4x_1x_2+9x_1x_3+9x_2x_3=0$$

对于（2）、（3）可以仿照上面的作法来求，在此只给出答案：

（2）$2x_1^2-3x_2^2+x_1x_2-2x_1x_3-3x_2x_3=0$

（3）$a_3(a_1-a_2)x_1x_2+a_2(a_3-a_1)x_1x_3+a_1(a_2-a_3)x_2x_3=0$

7．解　首先把已知直线和曲线方程化为齐次坐标方程，则二直线为$(1,3,1)$，$(-1,-5,1)$，，曲线方程为

$$4u_1^2+u_2^2=2u_3^2$$

设通过二直线$(1,3,1)$、$(-1,-5,1)$的交点的直线为

$$(1-\lambda,3-5\lambda,1+\lambda)$$

若所求直线属于二级曲线，则有

$$4(1-\lambda)^2+(3-5\lambda)^2=2(1+\lambda)^2$$

解此方程，得

$$\lambda_1=\frac{1}{3}\qquad \lambda_2=\frac{11}{9}$$

所以所求直线为

$$\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)\ 与\ \left(-\frac{2}{9},\ -\frac{28}{9},\ \frac{20}{9}\right)$$

用非齐次坐标表示时为：

$$\left(\frac{1}{2},\ 1\right)\ 与\ \left(-\frac{1}{10},\ -\frac{7}{5}\right)$$

8．解　对于五点形 $ABCDE$，设AB与DE交于X，BC与EA交于Y，过X、Y作直线XY，设CD与XY交于Z，连结AZ，则直线AZ就是过点A的切线（图95）．

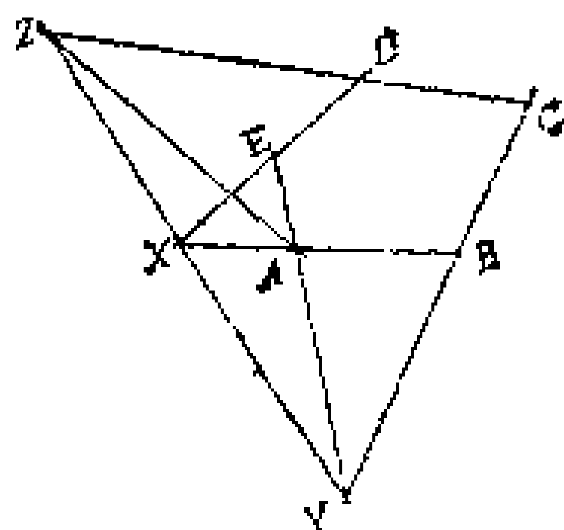


图　95

事实上，对于五点形 $ABCDE$，AB与DE，BC与EA是两对不相邻的边，$AB\times DE=X$，$BC\times EA=Y$，且

$DC \times XY = Z$，则由巴斯加定理知 AZ为 A 点处的切线

同理可作过 B 点的切线。

关于用布利安桑定理来完成习题 4 的作图留给读者作为练习。

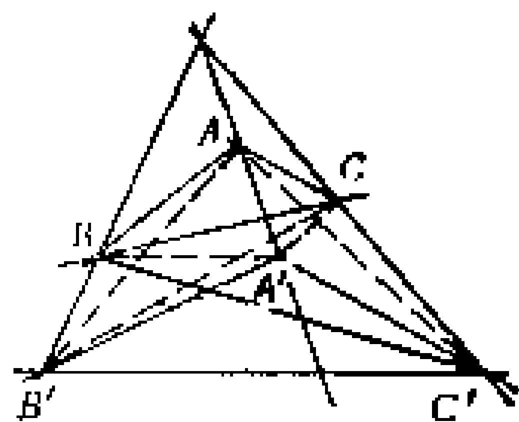


图 96

9．证明 （图96）考察六边形 $AB'CA'BC'$。

因三角形 ABC与$A'B'C'$ 是透视的，所以三对对应点连线共点，即AA'、BB'、CC'共点。

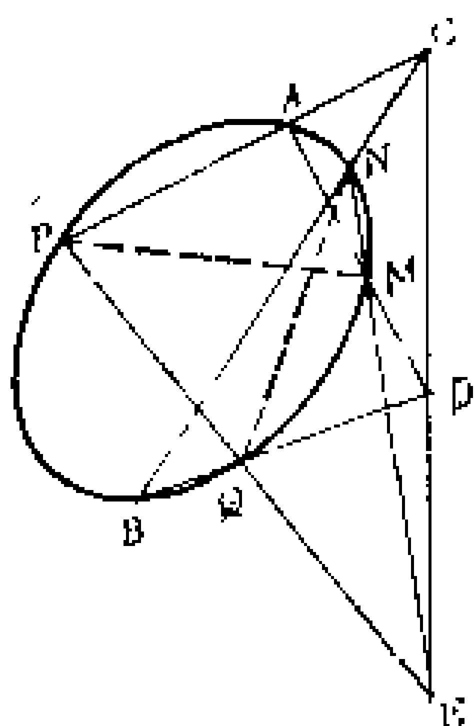


图 97

由于 A与A'、B与B'、C 与 C'正是六边形的三对对顶点，所以有连结六边形的对顶点的三条直线通过一个点，那么根据布利安桑定理的逆定理可知这个六边形的六条边所在的直线属于同一个二级曲线。

10．证明 （图97）由已知显然有：三点形 APM 与三点形 BQN 属于同一二阶曲线Γ．由第六章 § 1 例 3 可知，它们的六条边所在的直线属于一个二级曲线 .

考察六边形$CPMDQN$：

AP与CP 为同一直线，

MA与MD为同一直线，

QB与 QD为同一直线，

NC与NB 为同一直线，

所以六边 CP、PM、MD、DQ、QN、NC 属于同一个二级曲线。

由布利安桑定理知，三对对顶点的连线CD、PQ、MN共点于E。

11. **解** 设已知三个点为A、B、C，直线a、b为过点A和点B的切线。

连结BC，设BC与a交于X，过X任引一直线c，设c与b交于Y，与BA交于Z。

连结CZ、YA，设它们的交点为D，则D就是二阶曲线上的一个点（图98）。

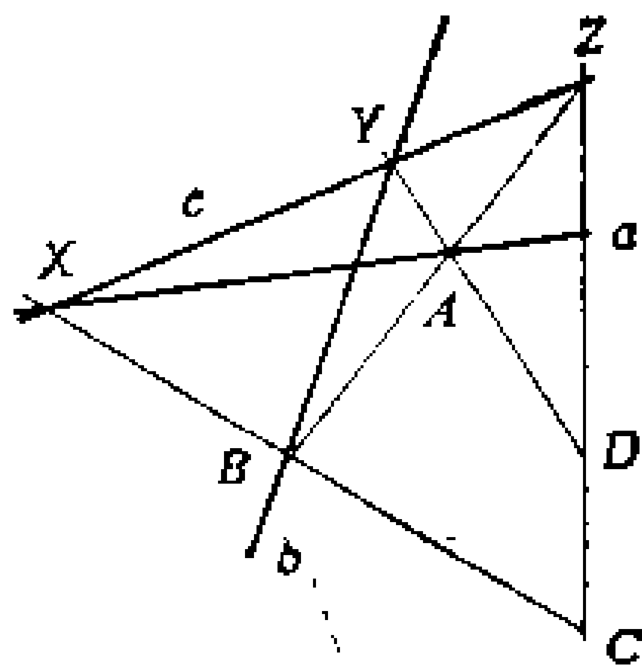


图 98

用同样的方法可以作出二阶曲线的其它点.

事实上，考察四点形$ABCD$，把A、B都看作二重点，则四点形就成为六点形$AABBCD$，其中AA与BC为一组对边，AB与CD为一组对边，BB与DA为一组对边，由作法知这三组对边的交点X、Z、Y共线. 由巴斯加定理的逆定理可知A、B、C、D属于同一个二阶曲线，即D是由A、B、C及直线a、b所决定的二阶曲线上的点.

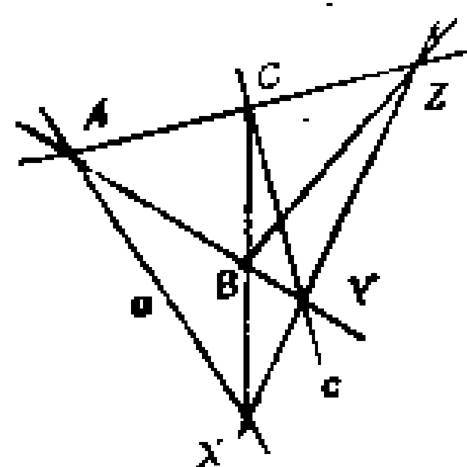


图 99

12. **解** 设已知三个点A、B、C，直线a、c为过A、C点的切线。

设a与CB交于X，c与AB交于Y。

连结XY、AC设它们的交点为Z。

连结BZ，则BZ就是过点B的切线（图99）。

事实上，由巴斯加定理的推论可知X、Y、Z是巴斯加线上的点，因此BZ是二阶曲线在点B的切线。

13. **解** 设a、b、c、d是二阶曲线的四条切线，点A为a上的切点。

设c与a、b分别交于C、C'，d与a、b分别交于D、D'，a与b交于X。

把a、b作为构成二级曲线的两个点列的底，利用三对对应点：A、D、C（在直线a上），X、D'、C'（在直线b上）确定两个点列的射影对应，在a上任取一点M，在b上作出对应点M'（M' 点的作法可参看第五章习题43的作法），则MM'是所求的切线（图100）。

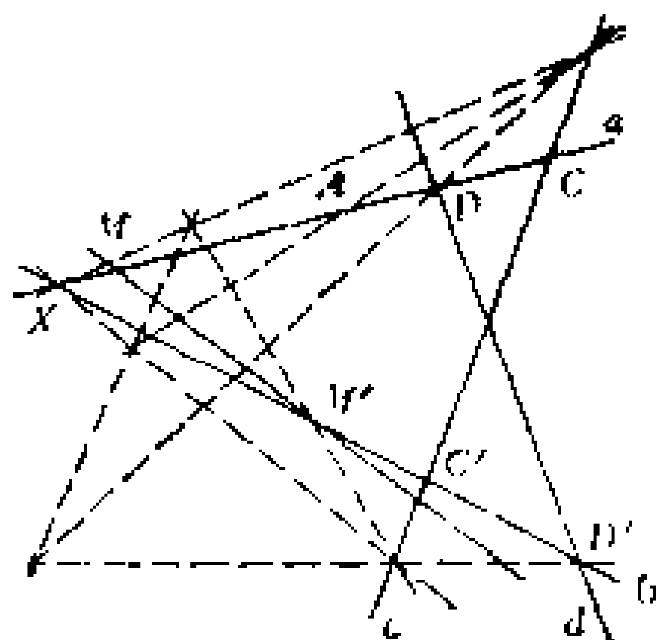


图 100

利用点列的这种对应，可作出二级曲线任意多个直线，它们都是二阶曲线的切线。

事实上，由于 M，M' 是射影的一对对应点，所以直线MM'属于 a、b、c、d 构成的二级曲线，故MM'是二阶曲线的切线。

14．（1）解　根据公式(6．4)'，极线方程应为：

$$(a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3)x_1+(a_{21}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3)x_2$$
$$+(a_{31}p_1+a_{32}p_2+a_{33}p_3)x_3=0$$

由已知条件知：

$$p_1=1 \qquad p_2=-1 \qquad p_3=0$$
$$a_{11}=3 \qquad a_{22}=5 \qquad a_{33}=1$$
$$a_{21}=a_{12}=\frac{7}{2},\ a_{31}=a_{13}=2,\ a_{23}=a_{32}=\frac{5}{2}$$

将以上各值同时代入极线方程中，则有

$$x_1+3x_2+x_3=0$$

这就是所求的极线方程。

（2）解　可利用解（1）的方法解之。其结果为：

$$x_2=0$$

（3）解　∵

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

又已知点的坐标满足方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

所以给的点为奇异点，故不存在极线。

15．（1）解　根据公式(6.5)′来求极点坐标

$\because$
$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$\therefore$　$A_{11} = -9$，$A_{22} = -1$，$A_{33} = 0$

$A_{12} = A_{21} = -3$，$A_{13} = A_{31} = 2$，$A_{23} = A_{32} = 2$

从而有

$$\begin{cases} \sigma p_1 = -9u_1 - 3u_2 + 2u_3 \\ \sigma p_2 = -3u_1 - u_2 + 2u_3 \\ \sigma p_3 = 2u_1 + 2u_2 \end{cases}$$

已知直线的线坐标为（3，－1，6）代入上式得

$\sigma p_1 = -12$，$\sigma p_2 = 4$，$\sigma p_3 = 4$

所以所求的极点坐标为（－12，4，4）。

（2）、（3）解　用解（1）的方法，可解出（2）和（3）的结果，在此仅给出其结果：

（2）　（1，3，0）

（3）直线$9x_1 - x_2 + 9x_3 = 0$上的点都是极点。

16．解　设直线AB、CD是过点P的二直线，A、B、C、D为此二直线与曲线Γ的交点。

连结 AD、BC、AC、BD，构成一个完全四点形。

设　$Q = AC \times BD$

$R = AD \times BC$

又已知$P = AB \times CD$

连结QR，则QR就是所求的极线（图101）。

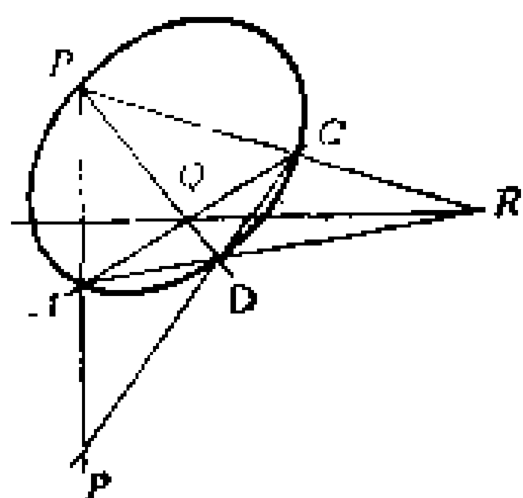


图 101

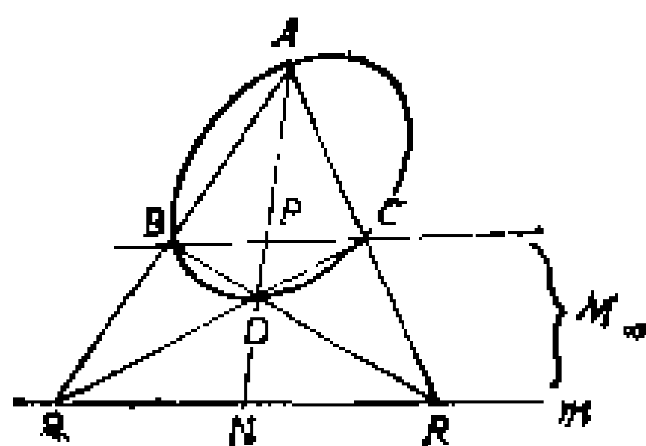


图 102

事实上，由于P、Q、R是顶点在二阶曲线Γ上的完全四点形的对边点，所以两个对边点连线QR是另一个对边点P关于Γ的极线。

17．解　按上题的作法作出点P关于二阶曲线Γ的极线m。

过点P作直线m的平行线设与二阶曲线Γ交于点B、C，则BC就是所求的弦（图102）。

事实上，由极线的定义，m应该是二阶曲线Γ的某个完全四点形$ABCD$的对角线。

$\because\quad BC \parallel m$

$\therefore\quad (BC,\ PM_\infty) = (QR,\ NM_\infty) = -1$

$\therefore\quad (BCP) = -1$

故P为BC的中点。

18．解　设直线a、b和直线c、d分别是从点P和点Q引的二阶曲线Γ的两条切线。

设两对切线的四个交点为M、N、L、K。
连结ML，KN，设其交点为R，则R就是直线PQ关于二阶曲线Γ的极点（图103）。

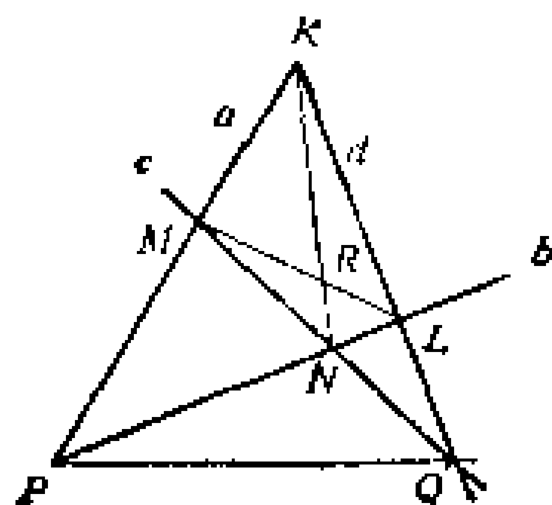


图 103

事实上，因为四边形$MNLK$是曲线Γ的外切四边形，故对角线

ML、KN的交点 R 是直线PQ关于曲线Γ的极点。

（注：上面的论证中采用了下面的一个事实：已知二阶曲线Γ上的四个点A、B、C、D，曲线Γ在这些点的切线构成一个外切四角形，那么外切四角形对边交点与内接四角形$ABCD$对边交点所在的直线是这两个四角形对角线所通过的点的极线。这个事实可利用巴斯加定理和布利安桑定理来证明，这个证明留给读者作为练习）。

19. **证明** （图104）设 $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ 是二阶曲线Γ的外切六线形，现在来证明 Q_1Q_4、Q_2Q_5、Q_3Q_6 三直线共点。

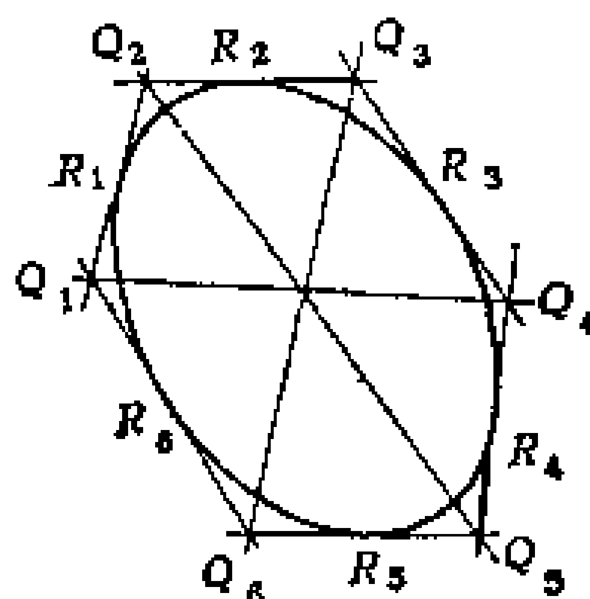


图 104

令Q_1Q_2、Q_2Q_3、Q_3Q_4、Q_4Q_5、Q_5Q_6、Q_6Q_1 的切点分别为 R_1、R_2、R_3、R_4、R_5、R_6，则有

$R_1R_2R_3R_4R_5R_6$ 是二阶曲线Γ的内接六点形。

因为R_1R_2与R_4R_5 的交点为 Q_2Q_5的极点，R_2R_3与R_5R_6的交点为Q_3Q_6的极点，R_3R_4与 R_6R_1 的交点为 Q_1Q_4 的极点，根据巴斯加定理这三个交点共线，即 Q_1Q_4、Q_2Q_5、Q_3Q_6 共点。

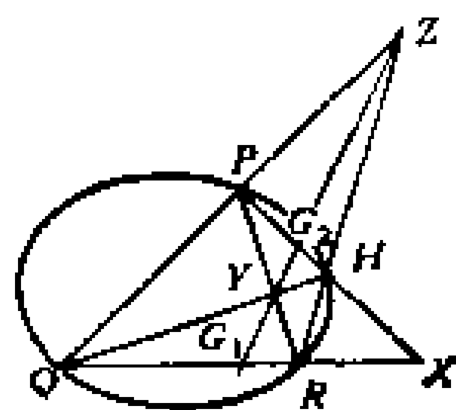


图 105

20. **证明** 设内接完全四点形的对边点是：

$$X = PH \times QR$$

$$Y = QH \times RP$$

$$Z = RH \times PQ$$

（图105），直线YZ交两边QR、PH于G_1、G_2二点，那么

$$(QR,\ XG_1) = -1$$

$$(PH,\ XG_2) = -1$$

因此X点的极线是 G_1G_2，即YZ。同理，Y点的极线是XZ，

Z点的极线是XY，所以三点形XYZ是自极三点形。

21. **证明** 由上题可知三点形XYZ是自极三点形。

因为B、C处的切线交点是BC的极点，而BC通过YZ的极点X，所以YZ必通过BC的极点，即B、C处的切线交点在YZ上。

同理可知A、D处的切线的交点也在YZ上。

22. **证明** 设PC与曲线的另一个交点为N（图106）

∵ QR、PN通过C，

∴ PR与QN交在C的极线AB上

又∵ PR通过B

∴ QN通过B。

因此$PQRN$作为二阶曲线的内接完全四点形，点B、C是其两个对边点。

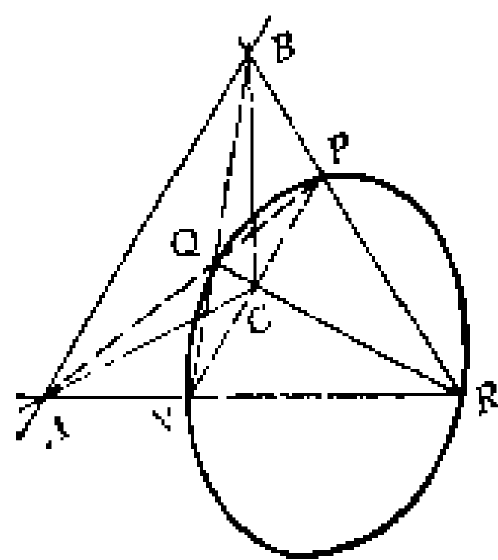


图 106

∵ PQ与RN交于BC的极点A

∴ PQ通过点A。

23. **解** 可以仿照讲义的方法化简方程为标准方程，在此仅给出答案：

（1）$x_1'^2 - x_2'^2 = 0$

（2）$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$

24. **证明** 因为常态二次曲线是由五个点唯一确定的，所以不同的两个常态二次曲线的交点不能多于四个，否则两个曲线重合；这就与两曲线不同矛盾。

25. **证明** 设二次曲线Γ其方程为：

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0$$

A、B连线上任意一点C为：$C = A + \lambda B$，将C点坐标代入Γ的方程中得

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(a_i+\lambda b_i)(a_j+\lambda b_j)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}a_ia_j+2\lambda\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}a_ib_j+\lambda^2\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_ib_j$$

由于A是Γ的奇异点，所以有：

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}a_ia_j=0$$

由于B是Γ上的点，所以有：

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_ib_j=0$$

由于任何一点的极线通过奇异点A，所以有：

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}a_ib_j=0$$

$$\therefore\quad \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(a_i+\lambda b_i)(a_j+\lambda b_j)=0$$

因此A、B连线上的点C在Γ上，由于C的任意性可知A、B的连线全在曲线Γ上。

§ 2

26．解　将曲线方程化为齐次坐标方程：

$$x_1^2+3x_1x_2-4x_2^2+2x_1x_3-10x_2x_3=0$$

系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -4 & -5 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}\neq 0$$

$$A_{31}=-\frac{7}{2},\quad A_{32}=\frac{13}{2},\quad A_{33}=-\frac{25}{4}$$

所以中心为$\left(-\frac{7}{2},\ \frac{13}{2},\ -\frac{25}{4}\right)$即$\left(\frac{14}{25},\ -\frac{26}{25}\right)$。

根据渐近线方程（6.8），则可得渐近线方程为：

$$X^2+3XY-4Y^2=0$$

即

$$(X+4Y)(X-Y)=0$$

其中 $X=x-\frac{14}{25}$，$Y=y+\frac{26}{25}$，代入上式得：

$$5x+20y+18=0$$

$$5x-5y-8=0$$

27. **证明** 设HK交无穷远直线l_∞于X_∞（图107）则有

$$(HK,\ P_1X_\infty)=-1$$

所以 P_1与X_∞ 关于二次曲线为共轭点，即 X_∞在 P_1 的极线上。

因为 HK与P_1 的极线有公共点X_∞，所以HK平行于 P_1的极线。

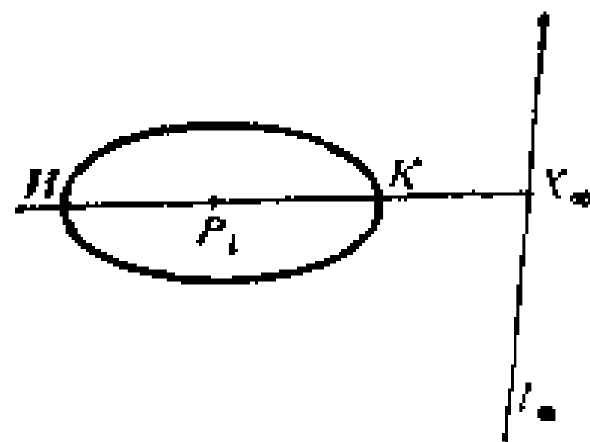


图 107

28. **证明** （图108）设 P 为双曲线上任意一点，PB、PA 分别与渐近线OA、OB平行，设过P点的双曲线的切线交渐近线于 C、D，则P为线段CD的中点（此处的结论应当有详细证明，这个证明请看下面第30题，故在此不给出证明），再根据第六章§2的2.2例2知$\triangle OCD$的面积为一常数a。

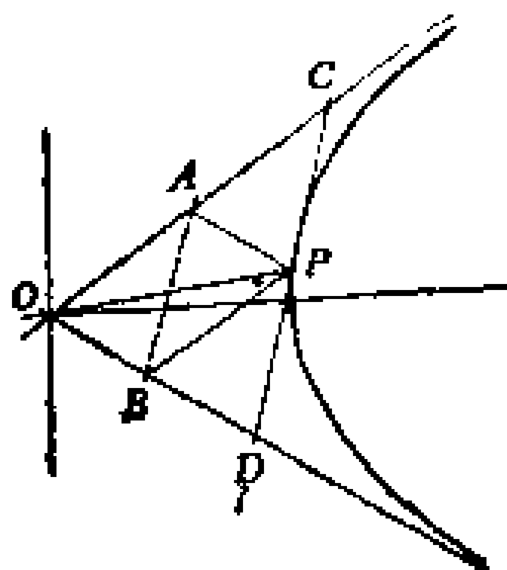


图 108

令平行四边形 $OAPB$ 面积为$S_{\square OAPB}$

$$\because\quad S_{\square OAPB}=S_{\triangle OCD}-S_{\triangle APC}-S_{\triangle BPD}$$

$$S_{\triangle APC}=S_{\triangle APD}=S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}S_{\square OAPB}=S_{\triangle BPD}$$

$$\therefore\quad S_{\square OAPB}=a-S_{\square OAPB}$$

$$\therefore\quad S_{\square OAPB}=\frac{a}{2}$$

29. **证明** 首先求出双曲线的渐近线方程为

$$\frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}$$

即

$$y_1=\frac{b}{a}x,\quad y_2=-\frac{b}{a}x$$

由直径定义知道，直径通过中心，故可写出直径方程

$$y_1'=\lambda x\qquad y_2'=\lambda' x$$

其中 λ、λ' 表示这两条直径的斜率。

若这两条直径共轭，则两条渐近线调和分隔这两条直径，则有：

$$(y_1y_2,\ y_1'y_2')=-1$$

用其斜率表示为：

$$\frac{\frac{b}{a}-\lambda}{-\frac{b}{a}-\lambda}\cdot\frac{-\frac{b}{a}-\lambda'}{\frac{b}{a}-\lambda'}=-1$$

即

$$\left(\frac{b}{a}-\lambda\right)\left(\frac{b}{a}+\lambda'\right)=-\left(\frac{b}{a}+\lambda\right)\left(\frac{b}{a}-\lambda'\right)$$

$$\frac{b^2}{a^2}-\frac{b}{a}\lambda+\frac{b}{a}\lambda'-\lambda\lambda'=-\frac{b^2}{a^2}-\frac{b}{a}\lambda+\frac{b}{a}\lambda'+\lambda\lambda'$$

$$\therefore\quad \lambda\lambda'=\frac{b^2}{a^2}$$

30．**证明** （图109）设M点是切线PQ上的切点，那么与PQ平行的直径ON一定和OM共轭；这两条共轭直径与渐近线OP、OQ成调和共轭，因此M点与PQ上的无穷远点关于P、Q两点成调和共轭，即M为线段PQ的中点

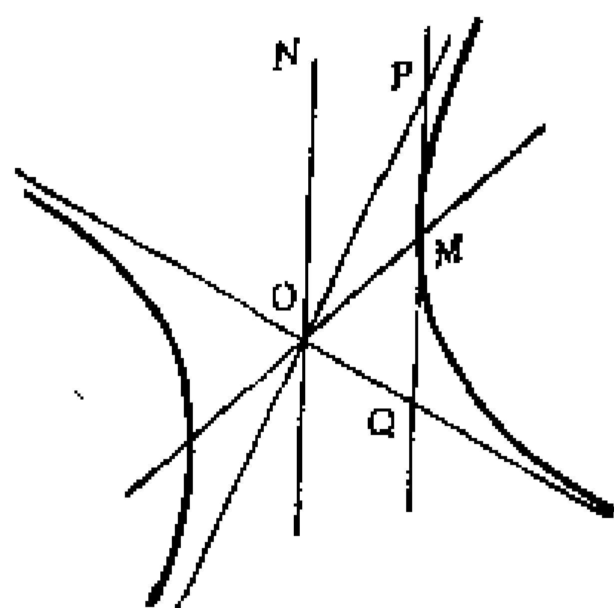


图 109

31．**证明** 设AB为二阶曲线Γ的直

径，O为中心，直线a、b分别为切Γ于A、B点的切线。

设直线AB的极点为P_∞。因为a为A的极线，b为B的极线，且P_∞的极线AB通过a的极点A，所以A的极线a必通过AB的极点P_∞。同理可证B的极线b也通过AB的极点P_∞，所以a与b平行。

32. **证明** 设二阶曲线Γ，O为中心，p为Γ的一条直径，它通过一个定点L，q为p的共轭直径，L的极线为l。

设直径p、q的极点分别为无穷远点P_∞、Q_∞，因为p与q共轭，所以P_∞在q上，Q_∞在p上，且无穷远直线$P_\infty Q_\infty$是中心O的极线。

如果l与直线$P_\infty Q_\infty$交于R_∞，则R_∞的极线r必通过点L，又r是Γ的直径必通过中心O，就是说R_∞的极线r与p重合（同时通过O、L）由于p的极点是唯一的，因此P_∞与R_∞重合，所以l与q交于P_∞，即l与q平行。

33. **解** 设无穷远直线l_∞关于常态二阶曲线Γ的极点为P，且P在Γ上，根据定理6．10，直线l_∞一定在点P与Γ相切，就是说无穷远直线l_∞与Γ有一个交点（二交点重合），所以Γ是抛物型的二阶曲线。

34. **证明** 设二阶曲线Γ的中心为O，其上任一弦为AB，过A、B与Γ相切的直线a、b交于一点M。

设点C为弦AB的中心，P_∞为AB的无穷远点，则

$$(AB,CP_\infty)=-1$$

所以C在P_∞的极线p上，因为M的极线为直线AB，且AB通过P_∞，所以P_∞的极线p必通过M，又p是通过C的Γ的直径，所以M在过AB中点的一条直径上。

35. **证明** （图110）设PP'交Q点的切线于Y，YX交P'点的切线于B，又PX、$P'B$为直径端点的两切线，由习题31知$P'B$与PX平行。

从完全四点形 $PRQP'$ 知

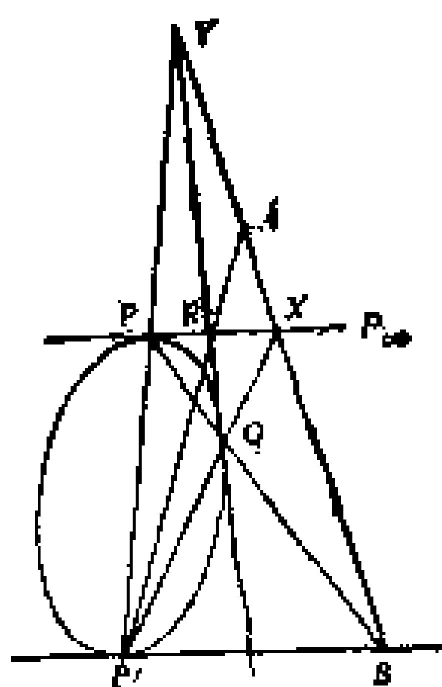


图 110

$$(XY, AB) = -1$$

由于$AB(X,Y,A,B)\overline{\overline{\wedge}}P'(P'X, P'P, P'R, P'P_\infty)$

则有

$$(XP, RP_\infty) = -1$$

即：

$$(XPR) = -1$$

所以R是线段PX的中点。

36. **解** 仿第六章§2.2的例子可得出化简后的曲线方程为：

（1）$x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 = 0$

（2）$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0$

§ 3

37. **证明** 设两条直线斜率分别为λ_1, λ_2，交角为α，则有

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2} \qquad (1)$$

由于

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{i}\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}$$

则

$$\alpha = \frac{1}{2i}\ln\frac{i - \operatorname{tg}\alpha}{i + \operatorname{tg}\alpha}$$

所以，α不定的条件是$\operatorname{tg}\alpha = i$或$\operatorname{tg}\alpha = -i$，由（1）得：

$$(\lambda_1 + i)(\lambda_2 - i) = 0 \text{或} (\lambda_1 - i)(\lambda_2 + i) = 0$$

可见至少有一条直线是迷向直线。

38. **证明** 因为已知直线方程可以写成

$$y = -\frac{a_1}{a_2}x - \frac{a_3}{a_2}$$

所以已知直线为迷向直线当且仅当$-\frac{a_1}{a_2} = \pm i$，即

$$a_1^2+a_2^2=0$$

39. **证明** 设 $y=\lambda x+b$ 是一条虚直线。$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$是其上任意两个不同的非无穷远点，

则有：

$$y_2-y_1=\lambda(x_2-x_1)$$

所以

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(1+\lambda^2)(x_2-x_1)^2}$$

因此，若$|P_1P_2|=0$，则$\lambda=\pm i$。反之，若$\lambda=\pm i$，则$|P_1P_2|=0$

40. **解** 将原方程化为齐次坐标方程：

$$7x_1^2+6x_1x_2-x_2^2-16x_3^2=0$$

由主轴方程公式（6.13）可得所给二次曲线的主轴为：

$$7x_1+3x_2+k_1(3x_1-x_2)=0$$

及

$$7x_1+3x_2+k_2(3x_1-x_2)=0$$

现在来确定k_1和k_2的值，解特征方程

$$(7-\lambda)(-1-\lambda)+3^2=0$$

得

$$\lambda_1=-2, \qquad \lambda_2=8$$

由 $a_{11}+a_{12}k=\lambda$ 可得

$$k_1=-3, \quad k_2=\frac{1}{3}$$

因此主轴方程为：

$$x_1-3x_2=0$$

及

$$3x_1+x_2=0$$

求顶点，只要解主轴与曲线的交点即可。

解方程组：

$$\begin{cases}x_1-3x_2=0\\7x_1^2+6x_1x_2-x_2^2-16x_3^2=0\end{cases}$$

得：

$$x_1 = \pm\frac{3}{\sqrt{5}},\ x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}},\ x_3 = 1$$

故得一组顶点为$\left(\pm\frac{3}{\sqrt{5}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{5}},\ 1\right)$

解方程组

$$\begin{cases}3x_1 + x_2 = 0\\ 7x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2 - 16x_3^2 = 0\end{cases}$$

得

$$x_1 = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}i,\ x_2 = \mp\frac{6}{\sqrt{5}}i,\ x_3 = 1$$

故又得一组顶点为$\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}i,\ \mp\frac{6}{\sqrt{5}}i,\ 1\right)$

现在来求焦点．设具有斜率为 k 的一组平行弦的方程为：

$$y = kx + h$$

代入曲线的原非齐次坐标方程得

$$7x^2 + 6x(kx+h) - (kx+h)^2 - 16 = 0$$

即

$$(7+6k-k^2)x^2 + 2h(3-k)x - (h^2+16) = 0 \qquad (1)$$

若平行弦之一与曲线相切，则此时（1）有等根，即（1）的判别式等于零，可得：

$$4h^2(3-k)^2 + 4(h^2+16)(7+6k-k^2) = 0$$

则有

$$h = \pm\sqrt{k^2-6k-7}$$

因此曲线具有斜率为 k 的切线方程为

$$y = kx \pm \sqrt{k^2-6k-7}$$

过 I、J 的切线具有斜率为 i 或 $-i$，所以迷向直线方程分别为：

$$y = ix \pm i\sqrt{8+6i}$$

$$= ix \pm i(3+i)$$

$$y = -ix \pm i\sqrt{8-6i}$$
$$= -ix \pm i(3-i)$$

解下面四个方程组得出四组解即为焦点坐标：

1） $\begin{cases} y = ix + i(3+i) \\ y = -ix + (3-i) \end{cases}$

2） $\begin{cases} y = ix + i(3+i) \\ y = -ix - i(3-i) \end{cases}$

3） $\begin{cases} y = ix - i(3+i) \\ y = -ix + i(3-i) \end{cases}$

4） $\begin{cases} y = ix - i(3+i) \\ y = -ix - i(3-i) \end{cases}$

其解为：

1） $(-i, 3i)$

2） $(-3, -1)$

3） $(3, 1)$

4） $(i - 3i)$

即焦点为：

$(3,1)$，$(-3,-1)$，$(i,-3i)$，$(-i,3i)$

下面来求准线方程，也就是焦点关于曲线的极线，将各焦点坐标化成齐次坐标，利用公式(6.4)′，即可求得各焦点所对的极线（即准线），它们是：

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$
$$ix_1 - 3ix_2 + 8x_3 = 0$$
$$ix_1 - 3ix_2 - 8x_3 = 0$$

非齐次坐标方程为：

$$3x + y - 2 = 0$$
$$3x + y + 2 = 0$$
$$ix - 3iy + 8 = 0$$

$ix-3iy-8=0$

41. 证明　设 $\triangle ABC$ 外切于抛物线，又抛物线与无穷远直线相切。从 I、J 引抛物线的切线，它们的有穷交点为焦点 F，则 $\triangle IJF$ 也是抛物线的外切三角形（图111）。

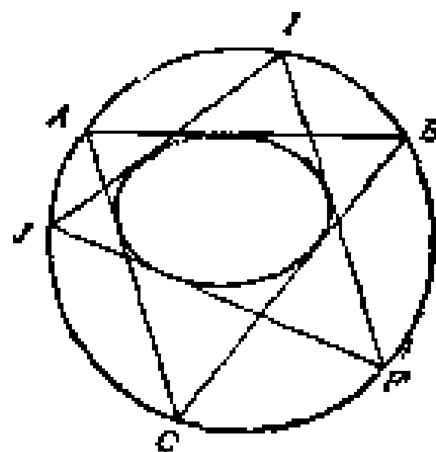


图　111

由第六章§1例题知：$\triangle ABC$ 与 $\triangle IJF$ 也同时内接于一个二次曲线。

由于A、B、C、I、J共圆，而五点决定唯一一个二次曲线，所以焦点 F 必在此圆上，即$\triangle ABC$的外接圆通过抛物线的焦点。

后　记

本书由张永顺、金成相主编。孙传林参加编写了第四章和本章学习指导，刘梦飞选编了全部习题并作了详细解答。

本书在编写过程中，得到了东北师范大学数学系和几何教研室的支持，郭卫中副教授审阅了原稿，王家彦副教授绘制了全部插图。

承蒙辽宁大学数学系关士培、崔玉衡副教授审阅了原稿，提出了不少宝贵意见。在此，谨表谢意。

限于编者水平有限，本书定有欠妥甚至错误之处，欢迎读者指正。

编　者

1983年11月

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等几何
作者＝
页数＝５７３
ＳＳ号＝０
出版日期＝
Ｖｓｓ号＝８６３２８０００